





375  
388

CURS

DE

# MECANICĂ

RAȚIONALĂ

PREDAT LA

FACULTATEA DE ȘTIINȚE A UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ

DE

Generalul ST. BURILEANU

DOCTOR ÎN MATEMATICI DELA PARIS

Cu 3 Note de D-nii profesori

D. POMPEIU — C. POPOVICI — V. VÂLCOVICI

dela Facultatea de Științe a Universității din București

VOLUMUL II  
DINAMICA

BUCUREȘTI

ATELIERELE GRAFICE SOCEC & Co., S. A. R.

1944



200 388

## P R E F A T ă .

Prezenta lucrare formează volumul al doilea al cursului de Mecanică rațională, pe care l-am predat la Facultatea de Științe a Universității din Cluj. L-am intitulat: **Dinamica**, dar cititorul va vedea că el coprinde și tot ce se referă la echilibrul solidelor și sistemelor materiale, cu alte cuvinte coprinde și întreaga Statică.

Ca și pentru volumul de Cinematică, am căutat să dau redactării Dinamicii cât mai multă precizie și claritate, pentru ca tinerii cititori, cărora mă adresez, să aibe satisfacția de a înțelege tot ce vor citi, fără greutate și fără opriri care să le consume timpul în mod inutil. Dacă voi fi izbutit, aceasta va fi spre cea mai mare mulțumire a mea, căci numai pentru a fi folositor tineretului am luat osteneala de a scrie aceste cărți.

Ultima parte a volumului de față tratează despre Mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate. Aceasta ca aplicațiune la un caz concret a teoriei mișcării unui solid în jurul unui punct fix, dezvoltată într'un capitol anterior.

Despre mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate, pe timpul când proiectilul se mișcă în aer, s'a



scris mult în Franța, Germania și Italia. Cu deosebire de interesant în această privință este *Mémorial de l'Artillerie Française*, tome VI, 3-e fascicule, din 1927, consacrat în întregime numai acestui subiect, pe care îl tratează pe rând și independent unul de altul, mai mulți autori specialiști<sup>1)</sup>.

Primele și cele mai importante lucrări asupra teoriei mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate sunt însă acelea datorite lui **M. de Sparre**, la care se referă toți autorii din urmă. Dela 1875 când era Locotenent de Artilerie și până în 1924, M. de Sparre, printr-o serie de Memorii apărute atât în *Mémorial de l'Artillerie de Marine* cât și în diferite Buletine ale Societăților savante, a dezvoltat în adevăr această teorie așa cum nu făcuse nimeni înaintea sa, ajungând să lămurească mișcarea axului proiectilului și să determine influența asupra acestei mișcări a numeroase cauze de perturbări inițiale sau de defecte de construcție a proiectilului.

Lucrările lui M. de Sparre, cu care am luat contact personal încă din anul 1899, îmi sunt familiare și le-am citat neconținut în cartea mea de **Balistică Exterioară**, din acel an. Studiul asupra mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate, din volumul de față, se bazează atât pe lucrările lui M. de Sparre publicate până în 1924, cât și pe alte lucrări din ultimul timp printre care acelea ale Profesorului **Esclangon** și ale Lt.-Colonelului **Dufrénois**, Profesor la Școala Superioară tehnică a Artileriei dela Paris. Cum nimeni dela noi din țară n'a tratat această grea chestiune înaintea mea, nădăjduiesc că prin lucrarea ce prezint, în forma precisă și clară pe care i-am dat-o, voi aduce un real serviciu tineretului, punându-l în curent cu una din cele mai interesante aplicațiuni ale teoriilor de Mecanică rațională, chiar în coprinsul unui Curs de această specialitate.

---

<sup>1)</sup> Charbonnier, Esclangon, Burzio, Sugot, Cranz și Schmundt.



În cuprinsul cărții mă ocup de altfel incidental și de alte câteva chestiuni importante de artilerie, cum sunt acelea privind particularitățile curbei balistice, deviația proiectilelor din cauza învârtirii pământului și percușiile tunurilor la trageri, care au raport cu construcția așetelor și a frânelor de tunuri, reamintind proiectul meu pentru construcția așetului destinat (evilor de tunuri de 150  $m/m$  scoase din forturile cetății București, precum și calculele mele referitoare la construcția frânei de tragere a tunului antiaerian de 57  $m/m$  cu tragere repede, care poartă numele meu.

Am profitat în sfârșit de această ocazie, pentru a da publicității rezultatele obținute la tragerea de experiență din 25. IV. 1940 cu un proiectil de 75  $m/m$  tip Francez din serviciul armatei noastre, căruia adăugându-i peste ogivă o coafă de un profil special calculat de mine, i s'a putut mări bătaia cu 22%, ceea ce părea de necrezut.

Am stabilit astfel, împotriva celor susținute de mulți eminienți balisticieni<sup>1)</sup>, că: Bătaia unui proiectil depinde foarte mult de profilul ogivei sale, care trebuie studiat cu îngrijire.

Și la această concluzie am ajuns nu în anul 1940 când a avut loc tragerea de experiență dela poligonul Sudiți, dar încă din anul 1931 căci atunci am cerut eu Ministerului de Război, printr'un raport cu data de 26 Ianuarie, ca să aprobe executarea coafelor mele, potrivit desenurilor ce am înaintat și experimentarea lor la trageri, raport care se termina prin următoarea frază categorică: „Acesta fiind rezultatul general al studiului meu, am onoarea a vă propune să binevoiți a-mi da posibilitatea să verific prin trageri rezultatele la care m'au condus studiile teoretice, în credința pe care o am că voi izbuti a mări toate bătaile proiectilelor noastre cu cel puțin 20%”.

Și experiența a confirmat teoria.

---

<sup>1)</sup> Cranz și Balistica sa Exterioară, Revista Artileriei, Oct. 1939.



*Inchei această prefață mulțumind călduros d-lor:*

**D. Pompeiu**, Profesor Universitar și membru al Academiei Române;

**C. Popovici**, Profesor Universitar și Directorul Observatorului Astronomic din București;

**V. Vâlcovici**, Profesorul cursului de Mecanică la Facultatea de Științe din București și Directorul Institutului Aerodinamic;

care au binevoit a onora cartea mea cu câte una din lucrările d-lor personale, pe care le public la sfârșit, sub formă de Note.

**General ST. BURILEANU**



# DINAMICA

## DIVIZIUNE:

PARTEA I. Mișcarea și echilibrul unui punct material.

PARTEA II. Echilibrul sistemelor materiale.

PARTEA III. Mișcarea sistemelor materiale.

PARTEA IV. Mișcarea solidelor invariabile.

PARTEA V. Mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate.



## PARTEA I.

# MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL.

## I. INTRODUCERE.

### I. PRINCIPII FUNDAMENTALE.

1. **Axe fixe.** Cinematica studiază, după cum s'a văzut, mișcarea sistemelor geometrice. Teoremele ei au caracterul adevărurilor absolute și sistemele de axe la care se raportează mișcările pot fi alese în mod arbitrar.

Dinamica se ocupă cu mișcarea sistemelor materiale, a căror molecule iau numele de puncte materiale. Așa dar, punctul material este o porțiune de materie de dimensiuni neglijabile, și ca atare, poziția lui față de un sistem de axe cordonate se raportează întocmai ca și aceea a unui punct geometric.

Cum în natură materiile prezintă o varietate infinită, punctele materiale vor fi și ele diferite, după sistemul sau corpul din care fac parte.

Dinamica se bazează pe câteva principii fundamentale, deduse din observarea mișcării corpurilor din natură, unele față de altele, însă aceste principii nu sunt riguros adevărate decât în mișcările absolute raportate la sistemul de axe având ca origină centrul de greutate al sistemului solar și axele îndreptate spre 3 stele fixe ale boltei cerești. Centrul de greutate al sistemului solar coincide de altfel, în mod aproximativ, cu centrul soarelui. Sistemul de axe astfel definit, este considerat ca un *sistem absolut fix*, pentru orice mișcare din interiorul sistemului solar, asupra căruia, stélele, din cauza enormei depărtări la care se găsesc, se admite că nu au nici o influență sensibilă.



**2. Principii fundamentale.** *Principiul I-iu: Un punct material, care ar exista singur în spațiu, n'ar putea dobândi nici-o accelerație.*

Principiul acesta cunoscut sub numele de „principiul inerției”, mai poate fi enunțat și astfel: Un punct material izolat, nu-și poate modifica singur starea lui de repaus, sau mărimea, direcția și sensul vitezei de care ar fi animat, așa că față de sistemul fix de axe, mișcarea lui n'ar putea fi decât nulă sau rectilină și uniformă.

*Principiul al II-a: Două puncte materiale izolate, animate de viteze oarecare, determină, unul asupra celuilalt, accelerațiuni îndreptate pe dreapta care le unește și de sensuri contrarii.*

Acest principiu trebuie înțeles astfel: Orice punct material A, exercită o influență asupra mișcării unui alt punct material B și invers, influență care se traduce prin dobândirea accelerațiilor  $w_A$  și  $w_B$  îndreptate pe dreapta AB, în sensuri contrarii.

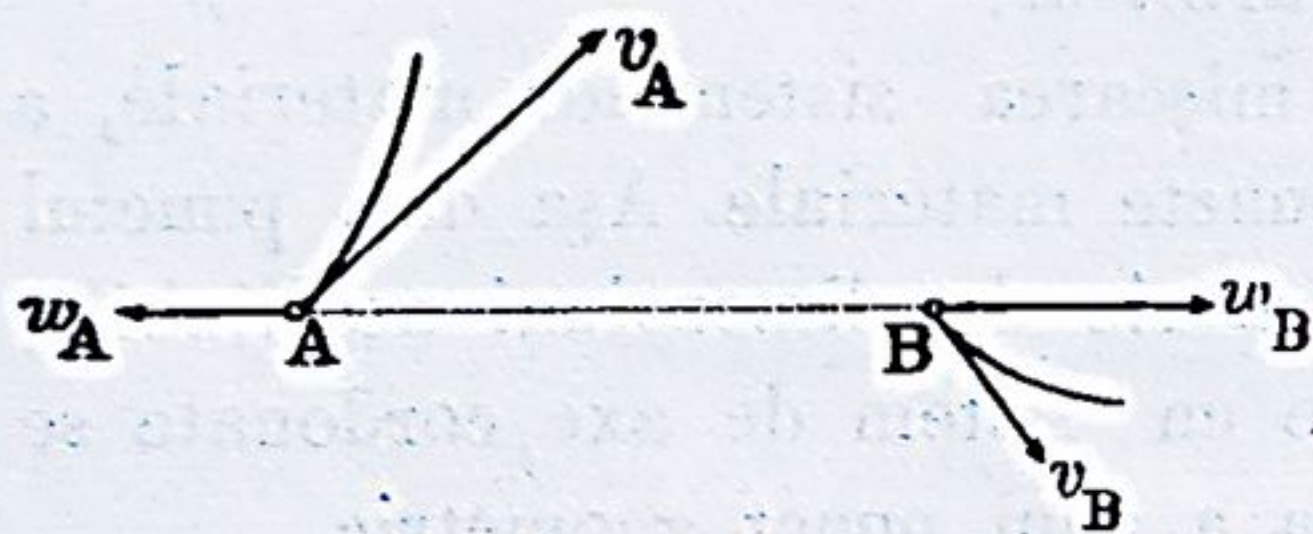


Fig. 1

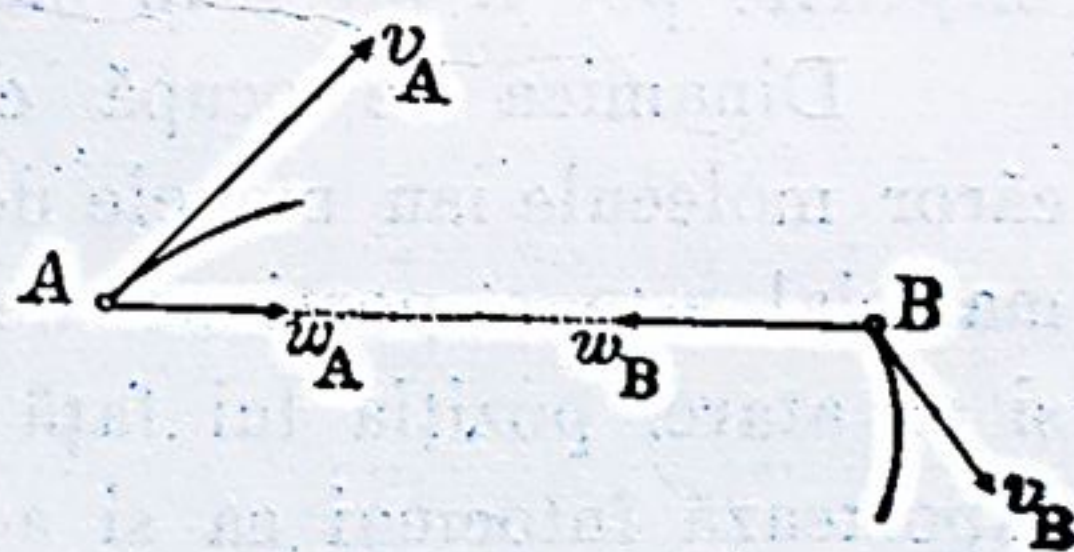


Fig. 2

*Principiul al III-a: Raportul valorilor numerice ale accelerațiilor, ce determină două puncte materiale unul asupra celuilalt, este constant.*

Accelerațiile pe care două puncte materiale A și B le determină unul asupra celuilalt pot fi datorite atracțiunei universale, electrizărei punctelor A și B, presiunei mutuale a acestor puncte, etc.

Principiul trebuie înțeles în sensul că oricare ar fi condițiile fizice care produc accelerația, raportul  $\frac{w_B}{w_A}$  pentru cele două puncte considerate A și B, rămâne întotdeauna același, cu toate că accelerațiile  $w_B$  și  $w_A$  pot varia odată cu condițiile fizice ce le dau naștere.



Aşa dar  $\frac{w_B}{w_A} = \text{const.}$ , sau ceea ce este tot una :  $\frac{w_B}{w_A} = \frac{m_A}{m_B}$  în care  $m_A$  va reprezenta un număr ales în mod arbitrar, iar  $m_B$  un număr determinat, depinzând numai de natura punctelor A şi B.

Dacă punem în prezenţa punctului A, nu punctul B, ci un alt punct material C, vom avea deasemenea, oricare ar fi valorile acceleraţiilor:  $\frac{w_C}{w_A} = \frac{m_A}{m_C}$  în care  $m_A$  va fi numărul ales la început, iar  $m_C$  un număr caracterizând natura cuplului de puncte A şi C.

Pentru alte puncte D, E, F, etc., puse în prezenţa lui A se vor obţine alţi numitori  $m_D, m_E, \dots m_K, \dots$  aşa că în general vom putea scrie  $\frac{w_K}{w_A} = \frac{m_A}{m_K}$ , în care  $m_A$  va fi cel dintâi număr, iar  $m_K$  numărul corespunzător indicelui K din şirul:  $m_A, m_B, m_C, \dots m_K, \dots$

*Complectarea principiului al III-a: Raportul acceleraţiilor pe care două puncte P şi Q le determină unul asupra celuilalt, este egal cu raportul dintre acceleraţia punctului P şi aceia a unui alt punct oarecare, spre exemplu punctul A, puse în prezenţă, divizat prin raportul dintre acceleraţia punctului Q şi acceleraţia aceluiaşi punct A.*

Aceasta revine a zice că raportul acceleraţiilor  $w_P$  şi  $w_Q$  este egal cu câtul dintre rapoartele  $\frac{m_A}{m_P}$  şi  $\frac{m_A}{m_Q}$ , adică avem

$$\frac{w_P}{w_Q} = \frac{m_Q}{m_P}.$$

Ca urmare imediată, tabloul numerilor

$$m_A, m_B, m_C, \dots m_K, \dots$$

ne permite de a calcula raportul acceleraţiilor a două puncte materiale oarecare. Acest raport este egal cu inversul raportului numerilor  $m$  care corespund în tablou punctelor considerate.

Putem remarca analogia dintre proprietăţile acestui tablou şi acelea ale tabloului echivalenţilor chimici.

*Definiţiune.* Numerii  $m_A, m_B, m_C, \dots$  se numesc *massele* punctelor A, B, C, ... Valoarea uneia dintre ele, spre exemplu



$m_1$ , poate fi aleasă în mod arbitrar, însă această valoare odată aleasă, toate celelalte devin bine determinate.

**Principiul al IV-a:** *Intr'un sistem constituit din mai multe puncte materiale, accelerația unuia dintre ele,  $M$ , se obține făcând suma geometrică a accelerațiilor ce ar determina asupra lui  $M$ . fiecare în parte din celelalte puncte, potrivit principiului al II-a.*

**Observațiune.** Principiile de mai sus nu sunt riguros adevărate decât în mișcările absolute raportate la sistemul de axe fixe despre care am vorbit. În Astronomie, acest sistem se impune dela sine, însă pentru mișcările de pe pământ, se ia ca sistem de referință un sistem de axe invariabil legat pământului. Procedând astfel, neglijăm efectul deplasării centrului pământesc cum și efectul rotației terestre, însă eroarea care rezultă este în marea majoritate a cazurilor neglijabilă, după cum vom dovedi mai târziu.

**3. Introducerea noțiunii de forță.** Cuvântul de *forță* nu intră în principiile de mai sus și am putea să ne lipsim de el. Este totuși avantajos, din punct de vedere al prescurtărilor, de a face convențiunea următoare:

Când un punct  $M$  de masă  $m$ , pus în prezența unuia sau mai multor puncte materiale, dobândește din acest fapt o accelerație  $w$ , vom zice că  $M$  se găsește supus din partea celorlalte puncte materiale la o forță, reprezentată printr'un vector  $MF$  având ca origină punctul  $M$ , ca direcție și sens direcția și sensul vectorului  $Mw$  al accelerației și ca mărime, sau *intensitate*, produsul  $mw$  al masei punctului cu mărimea accelerației.

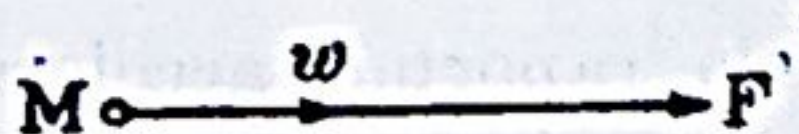


Fig. 3

Așa dar  $F = mw$  în mărime, direcție și sens.

Noțiunea de forță intervine deci ca o noțiune derivată, iar nu ca o noțiune primă.



4. **Compunerea forțelor.** Principiul al IV-a ne dă imediat regula compunerii forțelor. Un punct  $M_1$  lucrând singur asupra lui  $M$  îi dă acestuia o accelerație  $w_1$ ; el produce deci asupra lui  $M$  o forță definită prin egalitatea

$$F_1 = mw_1.$$

Un alt punct  $M_2$  lucrând singur, produce asupra lui  $M$ , în aceleași condiții de poziție și de viteză, o forță  $F_2 = mw_2$  și așa mai departe, până la  $F_n = mw_n$  datorită acțiunii punctului  $M_n$ .

Când toate punctele  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , lucrează deodată asupra lui  $M$ , în aceeași stare a acestui punct, ca poziție și viteză, ele îi dau, potrivit principiului al IV-a, o accelerație

$$(w) = (w_1) + (w_2) + \dots + (w_n)$$

din care rezultă, prin înmulțire cu  $m$ ,

$$(mw) = (mw_1) + (mw_2) + \dots + (mw_n).$$

Această egalitate arată, că dacă punem  $F = mw$ , forța  $F$  este suma geometrică a forțelor

$$F_1 = mw_1, \quad F_2 = mw_2, \quad \dots \quad F_n = mw_n.$$

Forța  $F$  este zisă *rezultantă*. Putem, după cum se vede, să aplicăm compunerii și descompunerii forțelor care lucrează asupra unui același punct, tot ceea ce știm asupra compunerii și descompunerii vectoarelor concurente.

5. **Principiul egalității între acțiune și reacțiune.** Principiile fundamentale ale Dinamicii, sunt datorite în esența lor lui *Galileu* și lui *Newton*, care au introdus însă în enunțarea lor noțiunea de forță ca o noțiune primă. Forma sub care le-am prezentat noi, datează numai de vre-o câțiva ani și a fost inspirată de lucrările lui *Kirchhof* și *Mach*.

*Newton* a enunțat, sub numele de *principiul egalității între acțiune și reacțiune*, legea următoare:

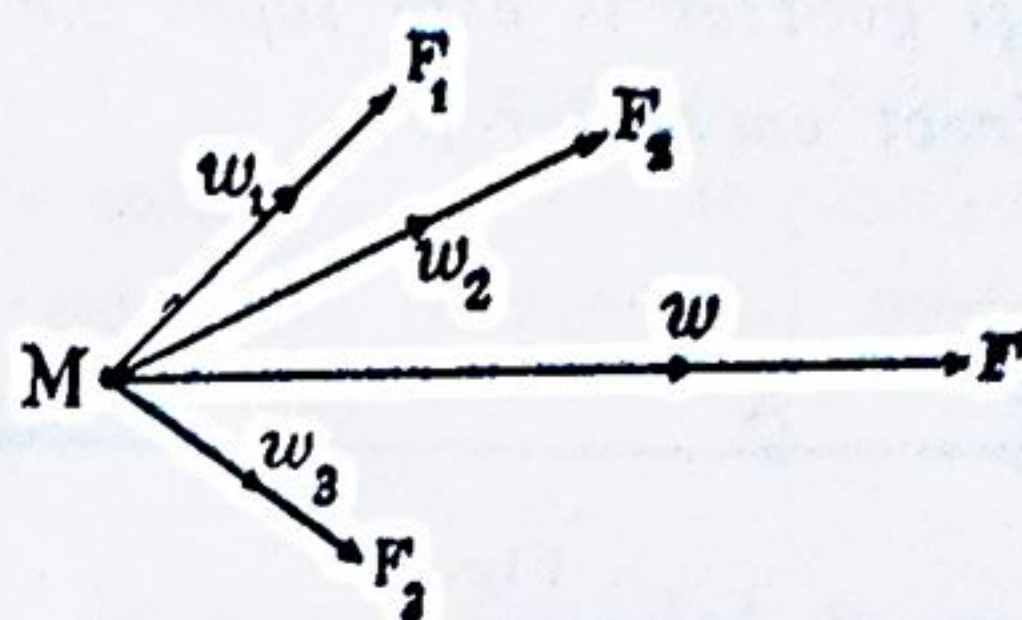


Fig. 4



„Dacă un punct A este solicitat de o forță  $F$ , datorită prezenței unui alt punct B, această forță este îndreptată pe dreapta AB și punctul B este supus din partea lui A la o forță  $F'$  egală și direct opusă lui  $F$ “.

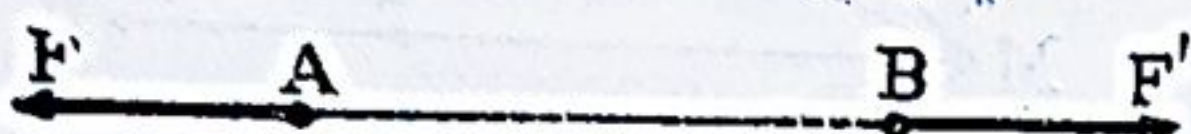


Fig. 5



Fig. 6

Newton a exprimat acest fapt zicând că *reacțiunea este egală și direct opusă acțiunii*. Principiul lui Newton este însă coprins, în mod implicit, în principiile fundamentale de mai sus.

Fie în adevăr două puncte materiale A și B de mase  $m$  și  $m'$ , care lucrează unul asupra celuilalt. Potrivit principiilor fundamentale, accelerațiile  $w$  și  $w'$  ale acestor puncte sunt îndreptate pe AB în sensuri contrarii și verifică egalitatea

$$\frac{w}{w'} = \frac{m'}{m} \quad \text{sau} \quad mw = m'w'.$$

Forțele  $F = mw$  și  $F' = m'w'$ , aplicate în punctele A și B, sunt deci îndreptate pe AB, de sensuri contrarii și de aceeași intensitate. Ori, aceasta este tocmai legea lui Newton.

Principiul egalității acțiunii și reacțiunii se aplică imediat și la acțiunile mutuale a două sisteme de puncte  $S$  și  $S'$ , sub forma următoare:

*Dacă punctele sistemului S exercită asupra acelor din sistemul S' anumite forțe, invers, punctele sistemului S' exercită asupra acelor din S acțiuni reprezentate prin forțe egale și direct opuse celor dintâi.*

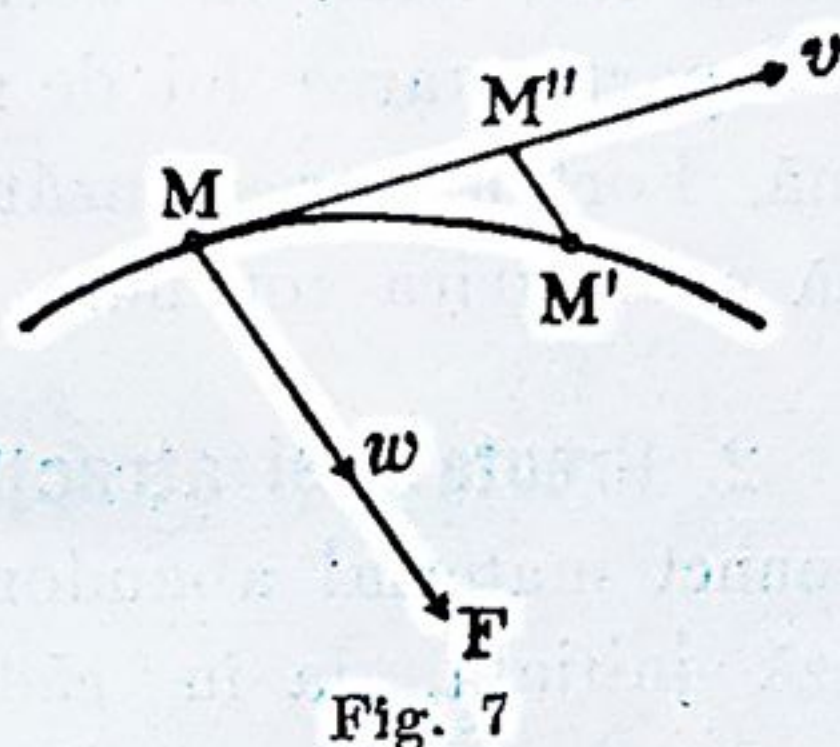
Astfel când un cal trage o trăsură, acțiunile șleaurilor asupra trăsuri sunt în tot momentul egale și direct opuse acelor ale trăsuri asupra șleaurilor. Când învârtim o piatră ținută în mână, acțiunea mâinii asupra pietrii este egală și direct opusă reacțiunii pietrii asupra mâinii. Forța cu care pământul atrage luna, este egală și direct opusă aceleia cu care luna atrage pământul, etc.



*Notă.* Fie sub forma modernă, fie sub forma ce le-a dat Galileu și Newton, principiile fundamentale ale Dinamicei nu pot fi verificate cu precizie matematică prin experiență. Cea mai admirabilă probă a adevărului ce exprimă, o oferă însă calculele de *Mecanică cerească*, referitoare la mișcările planetelor din sistemul solar, care conduc la rezultate în cea mai perfectă concordanță cu observările astronomice.

**6. Asupra deviațiunei.** Fie  $M$  un punct material de masă  $m$ , animat în momentul  $t$  de viteza  $v$  și  $w$  accelerația pe care o dă lui  $M$  un sistem de puncte materiale. Forța corespunzătoare acestei accelerații este  $F = mw$ .

Fie  $M'$  poziția lui  $M$  după timpul  $dt$ . Se știe că dacă luăm  $MM'' = v \cdot dt$  atunci valoarea principală a segmentului  $M''M'$ , zisă *deviațiune*, are ca expresie  $M''M' = \frac{1}{2}w dt^2$  direcția deviațiunei fiind aceea a accelerației  $w$ .<sup>1)</sup>



Ori aceasta este expresia spațiului pe care l-ar parcurge punctul  $M$  în timpul  $dt$ , plecând din repaus, dacă accelerația  $w$ , și deci forța  $F$ , ar rămâne constantă în acest interval de timp. Pe de altă parte, lungimea  $MM'' = vdt$ , reprezintă spațiul pe care l-ar parcurge punctul  $M$  dacă ar exista singur în spațiu.

Putem deci zice că *efectul forței  $F$  considerată ca constantă în timpul  $dt$ , este acela de a deplasa punctul  $M$ , din mișcarea sa rectilină și uniformă de pe tangentă, de cantitatea  $M''M'$  egală cu deviațiunea.*

Înțelegem acum, motivul denumirii de deviațiune ce s'a dat segmentului  $M''M'$ .

*Notă.* Să observăm că deviațiunea fiind egală cu  $\frac{1}{2}w dt^2$  este un infinit mic de ordinul al doilea, pe când deplasarea elementară  $MM''$  de pe tangentă este un infinit mic de ordinul întâi. În

<sup>1)</sup> *Cinematica*, pag. 61.



Intervalul de timp  $dt$ , efectul forței asupra deplasării punctului este prin urmare mult mai mic decât acela datorit vitezei din punctul M.

## II. DETERMINAREA VALORII NUMERICE A MASELOR ȘI A FORTELOR. DESPRE OMOGENITATE ȘI SIMILITUDINE MECANICĂ.

1. **Echilibru.** Să presupunem că un punct material M este supus influenței unui sistem de mai multe alte puncte materiale, care îi comunică astfel de accelerații încât suma geometrică a acestora este nulă. În asemenea condiții punctul își va păstra mai departe starea lui de repaus sau de mișcare rectilină și uniformă. Forțele corespunzătoare accelerațiilor vor avea și ele o sumă geometrică tot nulă și se va zice că ele își fac echilibru.

2. **Greutate și atracțiune terestră.** Experiența dovedește că un punct material abandonat în vid, dela înălțimi mici și fără viteză inițială, ia în căderea lui, față de pământ, o mișcare rectilină, uniform variată. Direcția căderii ne dă ceea ce numim verticala locului. Dacă însemnăm prin  $m$  masa punctului și prin  $g$  valoarea accelerației, forța care produce mișcarea este  $p = mg$  și i se dă numele de *greutate*.

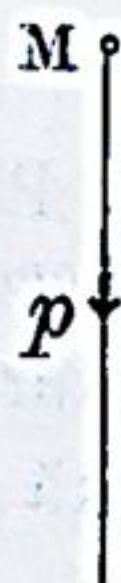


Fig. 8

Dacă punctul, în loc de a fi lăsat să cadă, este ținut de un fir vertical, el stă în repaus relativ. Mișcarea lui se găsește împedecată de tracțiunea firului, care potrivit principiului acțiunii și reacțiunii este egală cu forța care în căderea liberă dă punctului accelerația  $g$ . Greutatea este deci o forță egală și direct opusă acestei tracțiuni.

În presupunerea că pământul ar sta nemișcat, punctul material susținut de fir ar fi în echilibru sub acțiunea tracțiunii firului și a *atracțiunii terestre* datorită substanței pământului. Această atracțiune ar fi deci egală cu greutatea punctului.



Mișcarea pământului dă însă punctului o mișcare ce nefiind rectilină și uniformă se execută cu o accelerație care nu este nulă. În consecință, cele două forțe care lucrează asupra punctului, adică tracțiunea firului și atracțiunea terestră, nu-și fac echilibru, așa că în realitate *greutatea diferă de atracțiune*. Diferența este însă foarte mică și poate fi neglijată. Vom vedea în adevăr mai târziu că un punct material, căzând în vid dela o mică înălțime, ia în raport cu pământul aceeași mișcare ca și cum pământul ar sta nemișcat și punctul ar fi solicitat de greutatea sa.

Greutatea este o forță susceptibilă de măsurătoare și aceasta prin măsurarea alungirii pe care o ia un fir spiral sub acțiunea ei.

**3. Cele trei unități fundamentale.** În Geometrie se întrebuintează o singură unitate fundamentală, *unitatea de lungime*, din care derivă unitățile de suprafață și de volum.

În Cinematică, ne servim de două unități fundamentale: *unitatea de lungime* și *unitatea de timp*, din care se deduc unitățile întrebuintate pentru măsurarea vitezelor și accelerațiilor.

În sfârșit în Dinamică, pe lângă *unitatea de lungime* și *unitatea de timp*, avem nevoie de o a treia care poate fi ori *unitatea de masă*, ori *unitatea de forță*. Deci două sisteme diferite de unități. În cel dintâi, unitatea de forță derivă din unitatea de masă, pe când în cel de al doilea unitatea de masă derivă din unitatea aleasă pentru forță.

*Primul sistem. Unitate de masă.* În acest sistem se precizează mai întâi valoarea numerică a maselor. Acestea se pot determina cu o balanță, grație faptului dovedit de experiență că într'un același loc al pământului, toate punctele materiale execută căderea lor cu aceeași accelerație și au deci masele proporționale greutăților, potrivit formulei  $p = mg$  în care  $g$  este același ori care ar fi punctul sau corpul material considerat.

Faptul în chestiune nu poate fi stabilit prin aplicația



principiilor fundamentale, căci nici unul din aceste principii nu conduce la el. De altfel, nu constatăm noi, spre exemplu, că ferul care este mai ușor decât platina este mai puternic atras de un magnet, cu alte cuvinte că accelerația pe care o dă acțiunea magnetului asupra ferului este mai mare decât aceea pe care o dă aceiași acțiune asupra platinei, deși platina este mai grea?

Tot astfel, atracția pământului ar putea da ferului o accelerație diferită decât aceea pe care o dă platinei. După cum am spus însă, experiența dovedește că formula  $p = mg$  se aplică, într'un același loc, tuturor punctelor materiale, ori care ar fi masele lor, luând pentru  $g$  aceiași valoare. În particular la București, valoarea lui  $g$  este egală cu 9,805 metri pe secundă. Ea variază cu latitudinea locului și cu altitudinea. La Paris  $g = 9,808$ .

Masele fiind proporționale greutateilor, se vor compara între ele ca și greutateile. Unitatea de masă poate fi aleasă în mod arbitrar. În sistemul zis C. G. S., în care unitatea de lungime este centimetrul și unitatea de timp secunda sexagesimală, se ia ca unitate de masă, masa unui c. m. c. de apă distilată, la temperatura de  $+4$  grade Celsius, când densitatea apei este maximă. Această unitate este zisă *gram-masă*. Un corp material care pe o balanță ține în echilibru  $m$  centimetri cubi de apă, va avea masă egală cu  $m$ .

Dacă în formula generală  $F = mw$ , facem  $m = 1$  și  $w = 1$ , valoarea lui  $F$  devine egală cu 1. Deci în sistemul C. G. S. unitatea de forță zisă *dină*, este forța care lucrând asupra unui c. m. c. de apă îi dă o accelerație egală cu 1 centimetru linear.

Greutatea unui c. m. c. de apă corespunde la ceeace numim *gram*. Rezultă, că la București, greutatea de un gram este egală cu 980,5 dine, căci această greutate comunică masei de  $1 \text{ cm}^3$  de apă o accelerație egală cu 9,805 metri, adică 980,5 centimetri.

*Al doilea sistem. Unitate de forță.* În aplicațiunile Mecanicei, cel mai utilizat dintre sisteme este sistemul zis M. K. S. în care unitatea de lungime este metrul, unitatea de timp secunda, iar unitatea de forță kilogramul, adică greutatea, într'o



localitate, măsurată cu un resort spiral a unui decimetru cub de apă distilată, la temperatura  $+ 4^{\circ}$  Celsius.

Acest sistem nu are invariabilitatea celui precedent deoarece greutatea unui d. m. c. de apă variază cu latitudinea localității unde se face măsurătoarea. Astfel dacă suspendăm unui resort spiral vertical un decimetru cub de apă la Paris, resortul se întinde ceva mai mult decât s'ar întinde la București sub acțiunea aceleiași cantități de apă. Se înțelege dar, că pentru o țară oarecare, unitatea de forță va fi prin convențiune greutatea unui d. m. c. de apă determinată într'o regiune centrală a țării sau în capitala ei, căci nu se determină valoarea lui  $g$  în toate punctele țării.

În sistemul M.K.S. masa unui corp este  $m = \frac{p}{g}$ . Dacă facem  $p = g$  avem  $m = 1$ . Deci unitatea de masă este masa unui corp a cărui greutate într'o localitate este exprimată prin același număr ca accelerația datorită greutății în aceea localitate. La București,  $g$  fiind egal cu 9,805 metri, unitatea de masă este masa unui corp de greutate egală cu 9,805 kilograme, adică masa a 9,805 decimetri cubi de apă.

*Notă.* Din cele ce precedă rezultă că greutatele, utilizate în comerț la măsurătorile cu balanța, nu sunt greutăți propriu zise, ci mase. Un litru de apă echilibrează în toate punctele globului pământesc aceiași greutate de 1 kg. de fer ce-i corespunde.

**4. Măsurarea forțelor.** Forțele se măsoară cu dinamometrul adică cu un resort spiral, legând una din extremitățile resortului de un stâlp sau de o grindă fixă și făcând să acționeze forța la cealaltă extremitate a resortului. Dacă gradăm întinderea resortului pentru greutăți de 1, de 2 kg., etc. se înțelege că un asemenea resort ne va da în kg. intensitatea oricărei forțe <sup>1)</sup>.

Un dinamometru gradat la Paris, dă aceiași indicație și la București, pentru aceiași forță, însă nu și pentru greutatea aceleiași mase, spre ex. pentru greutatea masei de 1 d. m. c.

---

<sup>1)</sup> În mod dinamic, forța  $F$  care acționează un punct de masă  $m$  având ca expresie  $F = m w$ , se determină măsurându-se accelerația  $w$ .



de apă. Rezultă, că dacă voim să evaluăm forțele în kilogra-me care corespund unei localități, trebuie să gradăm dinamo-metrul potrivit kilogramului ce corespunde localității.

Dacă măsurăm cu un dinamometru intensitatea forței  $F$  care acționează un punct material și o substituim în relațiunea  $F = mw$ , atunci această relațiune fundamentală a Dinamicei nu mai reprezintă o simplă identitate ci o egalitate între o valoare măsurată experimental și produsul  $mw$ .

Să presupunem că cunoaștem valorile lui  $F$  pe tot timpul mișcării unui punct și să însemnăm prin  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  proiecțiile sale pe 3 axe cordonate. Cum forța  $F$  are aceeași direcție și același sens ca accelerația  $w$ , egalitatea  $F = mw$  ne dă în proec-țiune pe axe:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

care vor fi ecuațiile mișcării punctului.

**5. Despre omogenitate.** Mărimile ce se întâlnesc în Meca-nică se exprimă numeric, în funcție de unitățile fundamentale de lungime, de timp și de masă, prin expresiuni monoame de forma  $L^\alpha T^\beta M^\gamma$  în care  $L$ ,  $T$  și  $M$  reprezintă respectiv o lun-gime, un timp și o masă, măsurate cu ajutorul unităților alese, iar  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt exponenți numerici independenți de alegerea unităților. Acești exponenți se numesc *dimensiuni* ale mărimii considerate.

Iată dimensiunile mărimilor ce am întâlnit până acum:

Lungime	. . . . .	$L$
Suprafață	. . . . .	$L^2$
Volum	. . . . .	$L^3$
Timp	. . . . .	$T$
Viteză: $V = \frac{L}{T}$	. . . . .	$LT^{-1}$
Accelerație: $w = \frac{V}{T}$	. . . . .	$LT^{-2}$
Massă	. . . . .	$M$
Forță: $F = Mw$	. . . . .	$LT^{-2}M$
Momentul unei forțe: $F.L$	. . . . .	$L^2T^{-2}M$



Raportul a două mărimi de aceeași natură nu are dimensiuni, acesta fiind un număr. Astfel un unghi  $0$ , fiind raportul a două lungimi, nu are nici o dimensiune. În consecință, dimensiunile vitezei unghiulare și ale vitezei areolare sunt:

$$\text{Viteză unghiulară } \omega = \frac{\theta}{T} \dots T^{-1}$$

$$\text{Viteza areolară } v = r^2 \omega \dots L^2 T^{-1}$$

Dacă luăm o unitate de lungime de  $p$  ori mai mică, o unitate de timp de  $q$  ori mai mică și o unitate de masă de  $r$  ori mai mică, o expresiune de forma  $L^\alpha \cdot T^\beta \cdot M^\gamma$  va deveni  $(Lp)^\alpha \cdot (Tq)^\beta \cdot (Mr)^\gamma$  adică  $(L^\alpha \cdot T^\beta \cdot M^\gamma) \cdot (p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma)$ .

Ori, ecuațiile de Mecanică trebuie să subsiste ori care ar fi sistemul de unități fundamentale, adică să aibe loc, pentru ori ce valori atribuite factorilor  $p$ ,  $q$ , și  $r$ . Condiția necesară și suficientă, pentru aceasta, este ca ecuația să poată fi pusă sub astfel de formă ca ea să nu conțină decât raporturi de lungimi, raporturi de timpuri și raporturi de mase, căci atunci factorii în chestiune se elimină.

Această observație poate servi la verificarea exactității calculelor. Ea ne mai permite în multe cazuri să stabilim, *a priori*, fără alt raționament, structura formulelor.

a). *Verificarea unei formule.*  $T$  fiind durata oscilațiunii infinite de mici a unui pendul simplu de lungime  $l$ , într'un loc unde accelerația datorită gravitației este  $g$ , avem, după cum se va vedea mai târziu

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dacă schimbăm de unități, ca mai sus, obținem:

$$Tq = \pi \sqrt{\frac{lp}{gpq^2}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} q^2 = q \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

formula este deci omogenă.

b). *Stabilirea structurei unei formule.* Să admitem că durata  $T$  a oscilațiilor unui pendul depinde numai de lungimea  $l$  a pendulului, de masa  $m$  a greutății suspendate, de accelerația  $g$  a greutății și de unghiul de pornire inițială  $\alpha$ . Potrivit aces-



tei presupuneri putem scrie  $f(l, m, g, \alpha) = 0$ ,  $f$  fiind o funcțiune pe care ne propunem de a o preciza.

În conformitate cu principiul omogenității, masa  $m$  nu poate să figureze în ecuație. Apoi cele două cantități  $l$  și  $g$ , care sunt de gradul întâi în raport de lungimi, nu pot să intervină decât prin raportul lor  $\frac{g}{l}$ . Așa dar

$$f\left(T, \frac{g}{l}, \alpha\right) = 0.$$

Ori,  $T$  este un timp iar  $\frac{g}{l}$  este inversul patratului unui timp. Pentru ca relația să fie independentă de timp trebuie ca  $T$  și  $\frac{g}{l}$  să fie asociați sub forma  $\frac{g}{l} T^2$ , ceea ce reduce ecuația la forma

$$f\left(\frac{g}{l} T^2, \alpha\right) = 0$$

sau, rezolvind în raport de  $T$ ,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \varphi(\alpha)$$

și nu mai rămâne astfel decât de a găsi funcțiunea  $\varphi(\alpha)$  de unghiul  $\alpha$ , ceea ce vom face mai târziu.

**6. Despre similitudine mecanică.** Considerațiile de mai sus servesc de bază și la teoria similitudinii în Mecanică. Pentru ca două sisteme mecanice să poată fi privite ca asemenea, trebuie ca să se poată trece de la unul la altul înmulțind toate lungimile printr'un același factor  $p$ , toate timpurile prin  $q$ , toate masele prin  $r$ , vitezele prin  $pq^{-1}$ , accelerațiile prin  $pq^{-2}$  și forțele prin  $pq^{-2}r$ .

### III. TRAVALIUL FORTELOR.

**1. Travaliiu elementar.** Se numește *travaliiu elementar* al unei forțe, *productul intensității acestei forțe cu deplasarea infinit de mică a punctului ei de aplicație și cu cosinusul unghiului cuprins între direcția forței și aceea a deplasării*.

$$d\mathcal{E} = F \cdot ds \cdot \cos(F, ds) \quad \text{sau} \quad d\mathcal{E} = F \cdot ds \cos \alpha$$



$ds$  fiind mărimea geometrică  $MM'$  socotită pe tangenta din  $M$  în sensul deplasării punctului.

Travaliul astfel definit este o mărime susceptibilă de semn care va fi  $+$  sau  $-$  după cum forța și deplasarea vor face între ele un unghi ascuțit sau obtus.

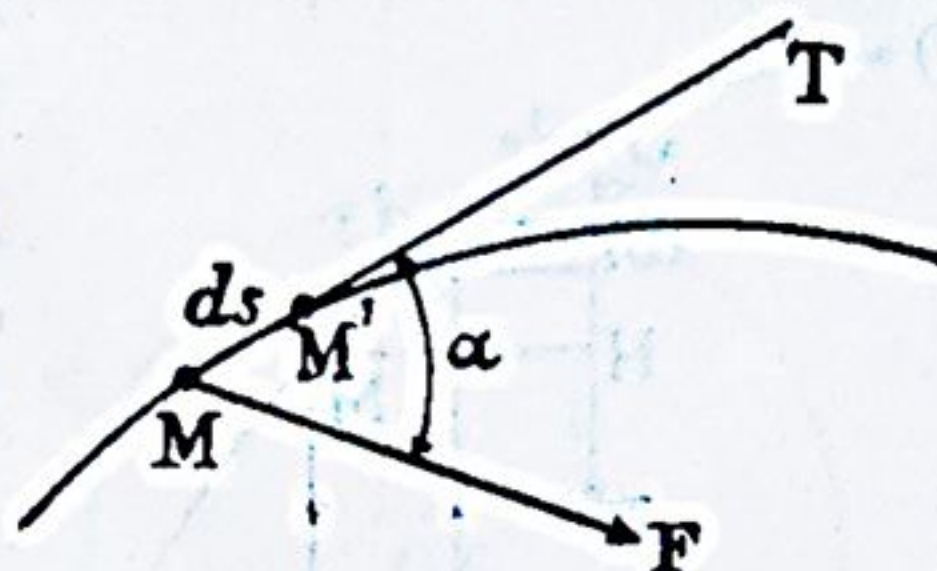


Fig. 9.

Scriind travaliul sub forma  $F \cdot ds \cos \alpha$  sau sub forma  $ds \cdot F \cos \alpha$  vedem că putem defini travaliul elementar ca fiind *productul forței cu proiecția deplasării pe direcția forței* sau ca *productul deplasării cu proiecția forței pe direcția deplasării*.

Travaliul elementar este nul, dacă direcția forței este perpendiculară pe aceea a deplasării.

Definiția travaliului elementar se aplică la orice forță care lucrează asupra unui punct, iar nu după cum s'ar putea crede, numai la rezultanta forțelor care determină mișcarea efectivă a punctului.

**2. Travaliu total.** Să considerăm o deplasare finită a punctului de aplicație a unei forțe și să dividem arcul parcurs în elemente infinit de mici. Suma travaliurilor elementare corespunzătoare acestor deplasări infinit de mici, constituie ceea ce se numește *travaliul total* al forței. Așa dar travaliul total al forței  $F$  dela  $M_0$  la  $M$  are ca expresie

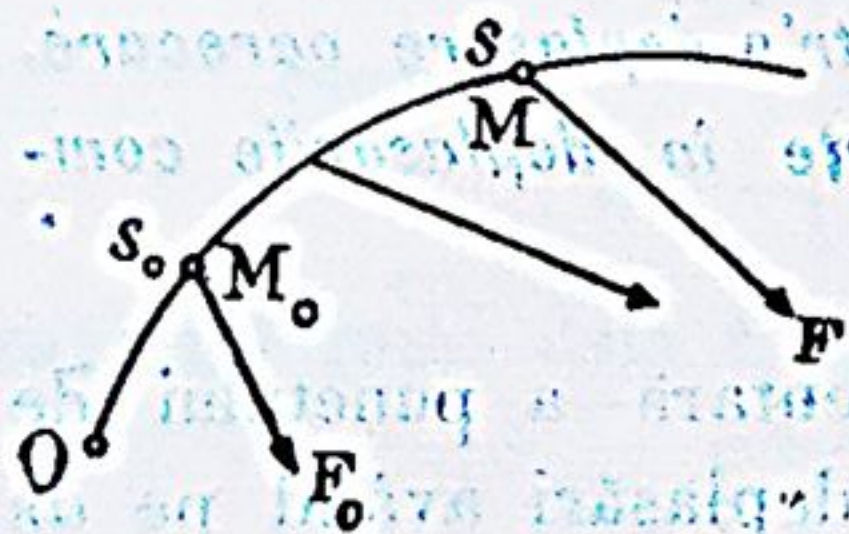


Fig. 10

$$\mathcal{E} = \int_{s_0}^s F \cos \alpha \cdot ds.$$

Integrațiunea se face imediat când forța este constantă. Avem atunci (fig. 11)

$$\mathcal{E} = F \int_{s_0}^s \cos \alpha \cdot ds = F \int_{M_0}^M dh = F \cdot M_0 H$$

adică: *travaliul total al unei forțe constante este egal cu productul intensității forței cu proiecțiunea pe direcția forței a drumului parcurs*. Travaliul nu depinde prin urmare de forma curbei dintre  $M_0$  și  $M$ .



Astfel, *travaliul greutății, într'o deplasare oarecare a punctului M, este egal cu greutatea înmulțită cu deplasarea verticală a punctului, travaliul fiind pozitiv dacă deplasarea totală corespunde unei coboriri și negativ în cazul contrariu.*

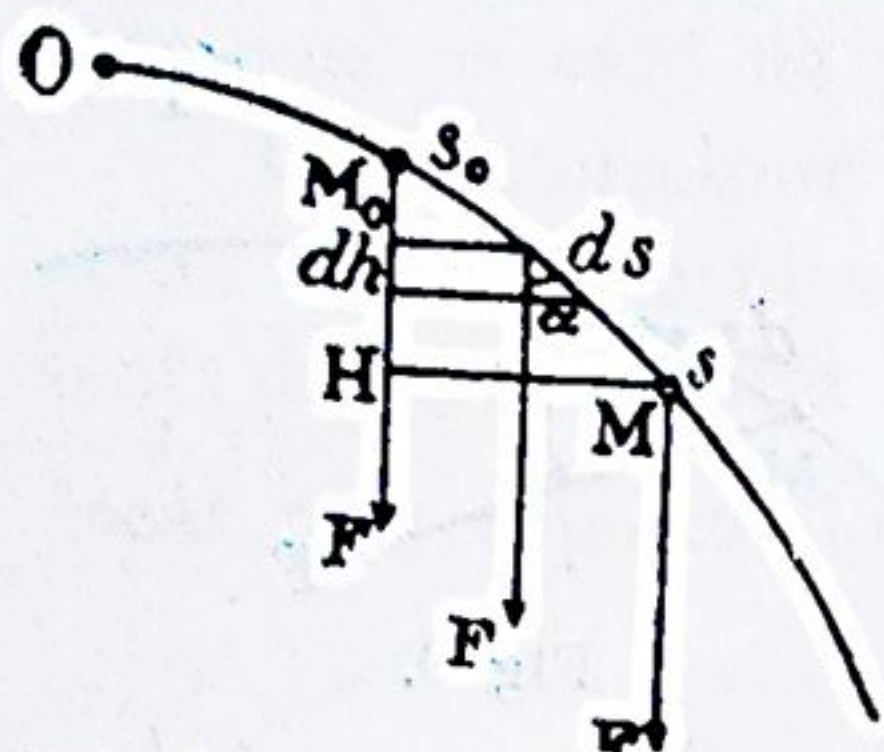


Fig. 11

Travaliul forțelor este o mărime care joacă un rol de o importanță capitală în teoriile Mecanicei raționale și a Mecanicei aplicată la Fizică.

**3. Teorema I.** *Travaliul unei forțe, pentru o deplasare oarecare, este egal cu suma travaliurilor componentelor forței pentru aceeași deplasare.*

Fie  $F$  o forță,  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , componentele ei și  $ds$  o deplasare elementară a punctului de aplicație. Proiecția rezultantei pe direcția deplasării fiind egală cu suma proiecțiilor componentelor, avem:

$$F \cos (F, ds) = F_1 \cos (F_1, ds) + F_2 \cos (F_2, ds) + \dots$$

și înmulțind ambii membri cu  $ds$ , deducem:

$$F \cos (F, ds) ds = F_1 \cos (F_1, ds) ds + F_2 \cos (F_2, ds) ds + \dots$$

Această relație ne dă demonstrația teoremei pentru *travaliul elementar*. Luând integrala, obținem demonstrația pentru *travaliul total*.

**4. Teorema II.** *Travaliul unei forțe într'o deplasare oarecare, este egal cu suma travaliurilor acestei forțe în deplasările componente.*

Fie  $F$  o forță,  $ds$  o deplasare elementară a punctului de aplicație și  $ds_1, ds_2, ds_3, \dots$ , diverse deplasări având pe  $ds$  ca rezultantă.

Proiectând pe  $ds_1, ds_2, \dots$ , și pe  $ds$  pe direcția lui  $F$ , avem

$$ds \cos (F, ds) = ds_1 \cos (F, ds_1) + ds_2 \cos (F, ds_2) + \dots$$

Inmulțind ambii membri cu  $F$  și apoi integrând, avem demonstrația teoremei.



5. **Teorema III.** *Travaliul unei forțe într'o mișcare elementară de rotație, este egal cu momentul forței în raport cu axul de rotație, înmulțit cu deplasarea unghiulară.*

Fie o rotație în jurul unui ax proiectat în  $O$  și o forță  $F$  aplicată în  $M$ . Duc planul proiectant al forței și în acest plan descompun pe  $F$  într'o forță  $F_1$  perpendiculară în  $M$  pe planul figuri și în forța  $F_2$  din plan. Travaliul forței  $F_1$  este nul. Forța  $F_2$  se poate descompune în componentele  $f_n$  și  $f_t$ . Travaliul componentei  $f_n$  este și el nul. Rămâne travaliul lui  $f_t$  care este egal cu  $f_t \cdot ds$  adică cu  $f_t \cdot r d\theta$ . Ori  $f_t \cdot r$  este momentul forței  $F$  în raport de axul  $O$  (nu în raport de punctul  $O$ ). Deci

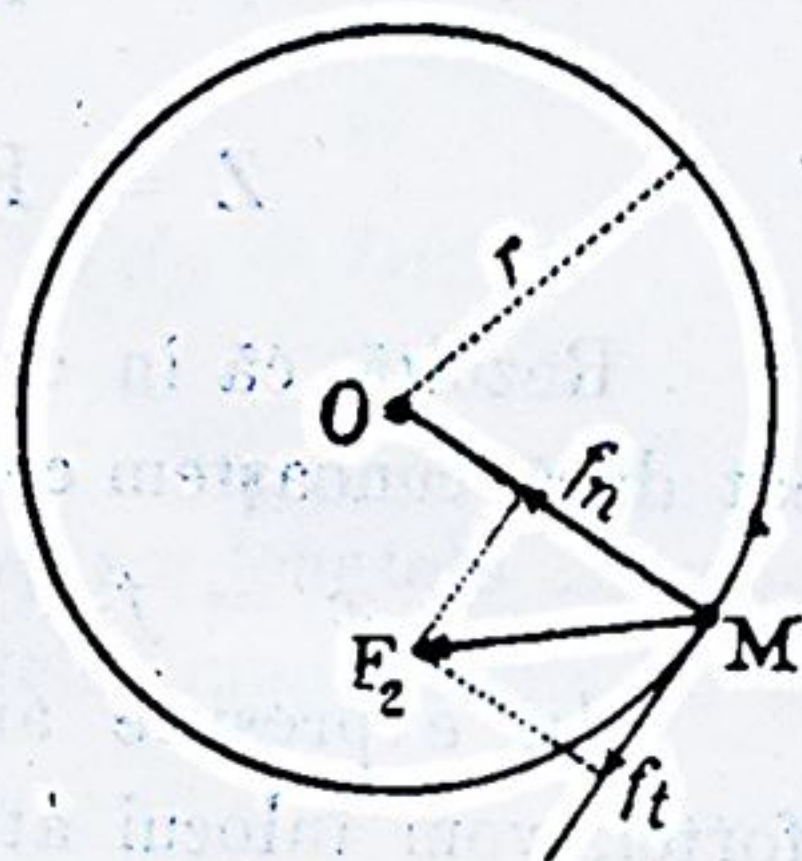


Fig. 12

$$d\varepsilon = \text{Mom. } F \times d\theta.$$

6. **Expresia analitică a travaliului în cordonate dreptunghiulare.** Travaliul elementar fiind

$$d\varepsilon = F ds \cos(F, ds)$$

vedem că el corespunde produsului interior al vectorilor  $F$  și  $ds$ <sup>1)</sup>. Rezultă imediat, că dacă însemnăm prin  $X, Y, Z$  proiecțiile forței și prin  $dx, dy, dz$  proiecțiile diferențialei  $ds$  pe trei axe cordonate dreptunghiulare, avem:

$$d\varepsilon = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Scriind

$$d\varepsilon = \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

travaliul total dela  $t_0$  la  $t$  va avea ca expresie analitică

$$\varepsilon = \int_{t_0}^t \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

În general, componentele  $X, Y, Z$  ale forței sunt funcții de timp, de cordonatele punctului mobil și de proiecțiile vitezei sale, adică

<sup>1)</sup> *Cinematica*, pag. 23.



$$X = F_1 \left( t; x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$Y = F_2 \left( t; \dots; \dots \right)$$

$$Z = F_3 \left( t; \dots; \dots \right)$$

Rezultă, că în cazul general nu putem calcula travaliul decât dacă cunoaştem complet mişcarea punctului, adică dacă se dă

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

În expresiile analitice ale componentelor  $X, Y, Z$  ale forţei, vom înlocui atunci pe  $x, y, z$  şi derivatele lor în funcţie de  $t$  şi calculul travaliului total se va efectua printr'o cuadratură.

**7. Caz particular.** *Forţa nu depinde decât de poziţia mobilului.* În asemenea caz, la fiecare sistem de valori  $x, y, z$  corespunde un sistem de valori  $X, Y, Z$  bine determinate. Deci

$$X = F_1(x, y, z), \quad Y = F_2(x, y, z), \quad Z = F_3(x, y, z)$$

funcţiile  $F_1, F_2, F_3$  fiind funcţii uniforme de coordonate.

a). Grupul forţelor în regiunea de spaţiu unde ecuaţiile precedente au loc, constituie ceea ce se numeşte un *câmp de forţe*.

b). Se numeşte *linie de forţe* a unui câmp, o astfel de linie că în fiecare punct al ei, forţa care corespunde punctului este tangentă liniei. Se ia ca sens pozitiv, sensul încotro e îndreptată forţa.

Ecuatiile diferenţiale ale liniilor de forţe sunt

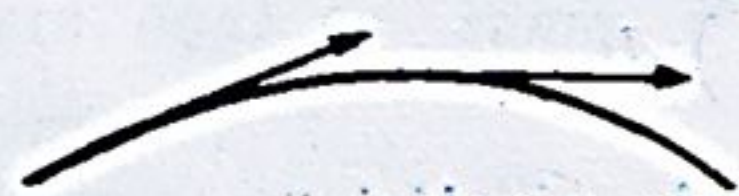


Fig. 13

sau

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}$$

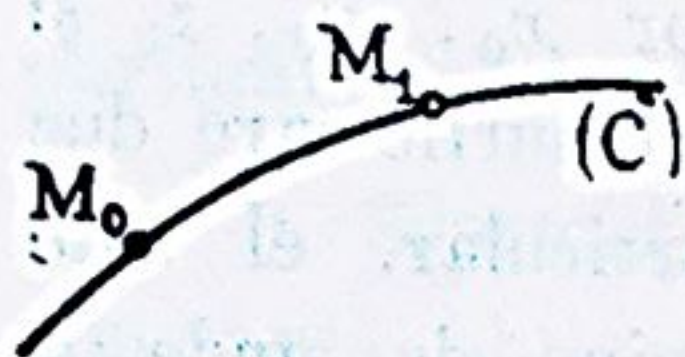
care integrate ne vor da

$$y = f(x, \alpha, \beta), \quad z = \varphi(x, \alpha, \beta)$$

$\alpha$  şi  $\beta$  fiind două constante arbitrare.



c). *Travaliul total* al forței din câmp dela  $M_0$  la  $M_1$  pe o curbă (C) are ca expresiune



$$\mathcal{E} = \int_{M_0}^{M_1} Xdx + Ydy + Zdz$$

Fig. 14

în care  $X, Y, Z$  sunt funcțiuni numai de cordonatele  $x, y, z$ . Ori, putem întotdeauna exprima cordonatele unui punct  $M$  al arcului  $M_0 M_1$  în funcție de un parametru  $q$ ,

$$x = f_1(q), \quad y = f_2(q), \quad z = f_3(q).$$

Deci  $X, Y, Z$  ca și  $x, y, z$  fiind funcții de  $q$ , rezultă

$$\mathcal{E} = \int_{q_0}^{q_1} \psi(q) dq$$

$q_0$  și  $q_1$  fiind valorile parametrului  $q$  care corespund punctelor  $M_0$  și  $M_1$ . În concluziune, *travaliul depinde numai de forma curbei (C)* iar nu și de modul cum o parcurge mobilul, așa că *dacă se dă curba*, calculul travaliului revine la efectuarea unei cuadraturi.

**8. Funcție de forțe.** Să presupunem acum că proecțiile  $X, Y, Z$  ale forței sunt derivatele parțiale ale unei funcțiuni de cordonate  $U(x, y, z)$ , adică

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

În acest caz, forța ca și la  $n^0$  precedent, nu depinde decât de poziția mobilului, însă travaliul ei elementar  $d\mathcal{E}$  fiind diferențiala totală a funcției  $U(x, y, z)$ , de oarece avem

$$d\mathcal{E} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

rezultă că

$$\mathcal{E} = U_1 - U_0$$

$U_0$  și  $U_1$  fiind valorile funcției  $U$  pentru cordonatele  $x_0, y_0, z_0$  și  $x_1, y_1, z_1$  ale punctelor  $M_0$  și  $M_1$ . Funcția  $U$  ia numele



de funcție de forțe. <sup>1)</sup> Vedem astfel, că, dacă există o funcție de forțe, trawaliul total dela  $M_0$  la  $M_1$  nu depinde decât de pozițiile acestor puncte, adică de cordonatele lor  $x_0, y_0, z_0$  și  $x_1, y_1, z_1$  așa că el este același pentru toate drumurile care duc dela  $M_0$  la  $M_1$ . În particular, el este nul, dacă punctul revine de unde a plecat, adică pentru un contur închis.

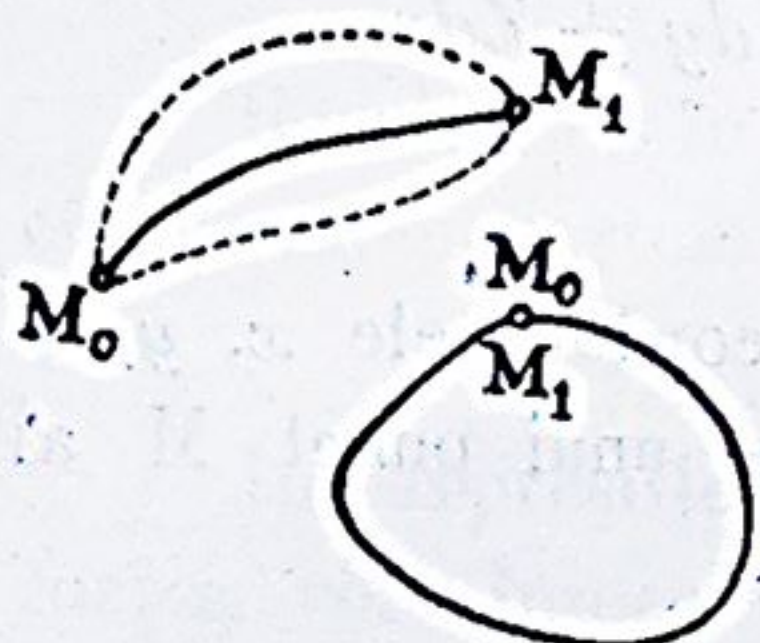


Fig. 15.

Este însă necesar pentru aceasta, ca funcția de forțe  $U$  să fie uniformă. În cazul contrariu, trebuie să se urmărească variația funcției dela punctul inițial la punctul final.

Iată un exemplu. Fie  $U = \arctg \frac{y}{x}$  cu presupunerea

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Sigma,$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Observăm că

$$\frac{Y}{X} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

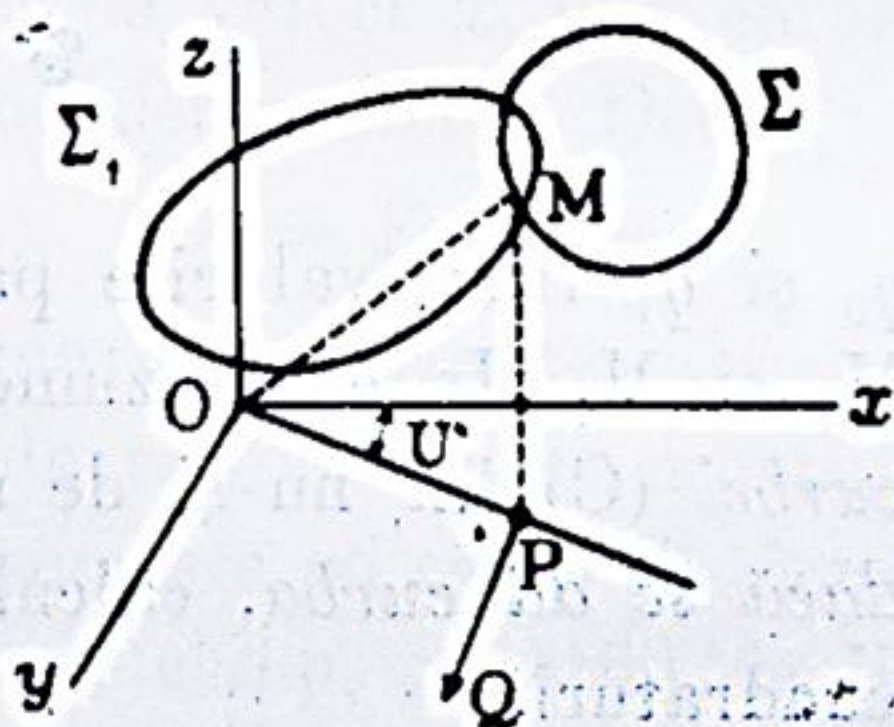


Fig. 16.

deci forța este perpendiculară pe planul  $zOP$ , adică are ca proecție orizontală segmentul  $PQ$  perpendicular pe  $OP$ . Funcția  $U$  este chiar unghiul  $xOP$ , tangenta acestui unghi fiind  $\frac{y}{x}$ .

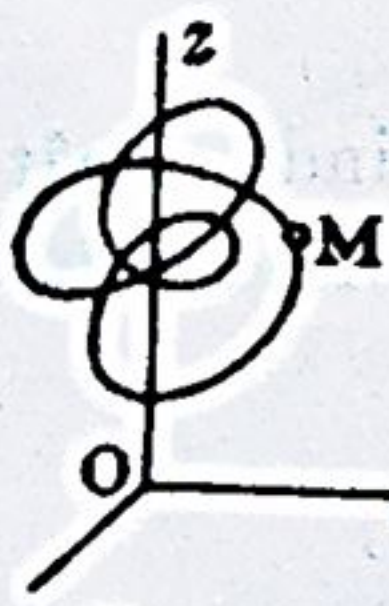


Fig. 17

Pentru conturul închis  $\Sigma$ , trawaliul total este egal cu zero căci unghiul  $U$  revine la valoarea dela care a plecat.

Pentru conturul  $\Sigma_1$  care înconjură axul  $Oz$ , trawaliul este însă egal cu  $2\pi$ , căci unghiul  $U$  inițial revine în  $M$  mărit cu  $2\pi$ , adică

$$\mathcal{C} = (U_0 + 2\pi) - U_0 = 2\pi.$$

<sup>1)</sup> Invers, dacă trawaliul elementar  $d\mathcal{C}$  este diferențiala totală a unei funcții  $U(x, y, z)$  atunci componentele  $X, Y, Z$  sunt derivatele parțiale ale acestei funcții, care este astfel funcția de forțe.



Dacă conturul înconjură de  $n$  ori axul  $Oz$ , trawaliul total va fi egal cu  $2n\pi$ .

Câmpurile magnetice create de curenți electrice prezintă particularități de acestea.

9. **Suprafețe de nivel.** Dacă egalăm funcția de forțe cu o constantă, obținem ceea ce se numește o *suprafață de nivel*. Astfel

$$U(x, y, z) = C.$$

Prin fiecare punct al câmpului de forțe trece câte o suprafață de nivel. Astfel prin punctul de coordonate  $x_0, y_0, z_0$  trece suprafața de nivel

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0)$$

valoarea constantei  $C$  fiind atunci egală cu  $U(x_0, y_0, z_0)$ .

a). *Forța este perpendiculară în  $M$  suprafeței de nivel ce trece prin acest punct.*

Fie  $U(x, y, z) = C$  suprafața de nivel care trece printr'un punct  $M$ . Cosinusurile directoare ale forței aplicate în  $M$ , sunt proporționale cu  $X, Y, Z$  adică cu  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ . Ori, aceste derivate parțiale sunt proporționale cu cosinusurile directoare ale normalei în  $M$  la suprafața de nivel care trece prin acest punct. Deci forța  $F$  este normală suprafeței.

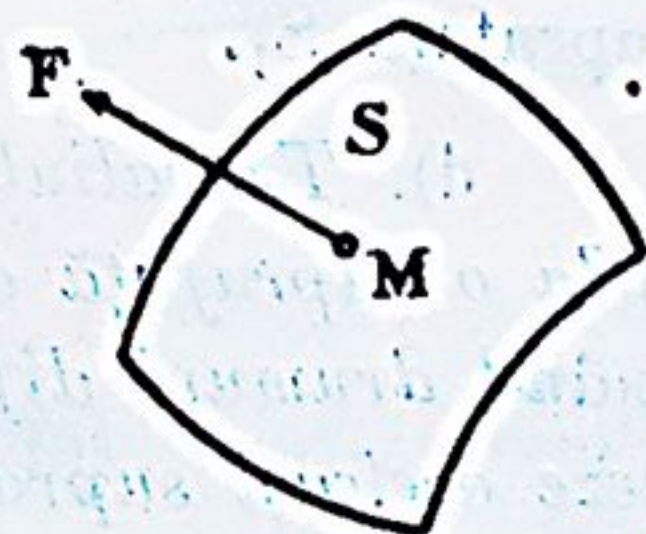


Fig. 18

b). *Forța este îndreptată în sensul încotro crește funcția de forțe.* Fie  $S$  și  $S_1$  două suprafețe de nivel infinit vecine, suprafața  $S$  trecând prin punctul  $M$  și corespunzând ecuației

$$U(x, y, z) = C$$

iar suprafața  $S_1$  corespunzând ecuației

$$U(x, y, z) = C + dC$$

în care să presupunem că  $dC$  este pozitiv, pentru ca funcția  $U$  să crească atunci când se trece dela  $S$  la  $S_1$ .

Pe normala în  $M$  la suprafața  $S$  să considerăm punctul  $M_1$  unde această normală întâlnește pe  $S_1$ . Trawaliul forței  $F$

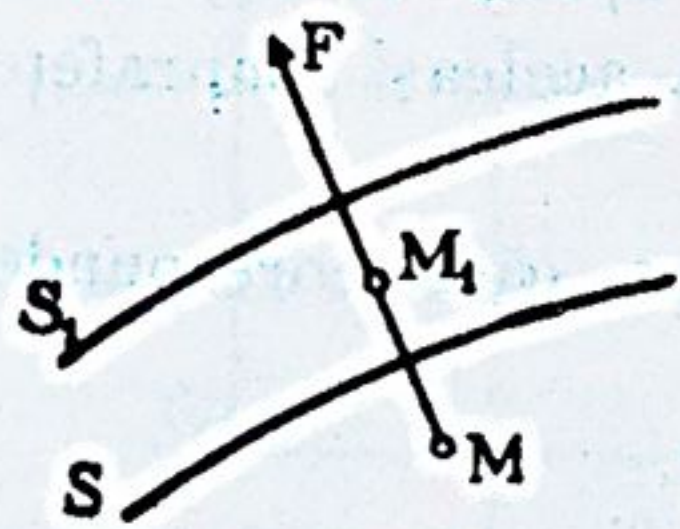


Fig. 19



pentru deplasarea elementară  $MM_1$  este  $\pm F \cdot MM_1$  după cum sensul forței este  $MM_1$  sau  $M_1M$ . Însă acest lucru este egal cu  $dC$  care reprezintă creșterea elementară a funcției  $U$  când trecem de la  $S$  la  $S_1$ . Creșterea  $dC$  fiind prin ipoteză pozitivă, vom avea deci  $+F \cdot MM_1 = dC$  ceea ce înseamnă că forța are sensul  $MM_1$ .

c). In orice punct  $M$  al unei suprafețe de nivel, forța este invers proporțională distanței pe normală dela  $M$  la suprafața de nivel infinit vecină.

Din egalitatea  $F \cdot MM_1 = dC$  deducem

$$F = \frac{dC}{MM_1}.$$

Ori,  $dC$  este același pentru toate punctele suprafeței  $S_1$ . Deci, oricare ar fi punctul  $M$  de pe suprafața  $S$ , forța care trece prin acest punct este invers proporțională distanței dela  $M$  la suprafața  $S_1$ .

d). Trăvialiul total este același pentru mobilele care pleacă dela o suprafață de nivel  $S_0$  și ajung la o altă  $S_1$ , deși urmând drumuri diferite, dar cu condiția ca mobilele să traverseze aceleași suprafețe și în aceeași ordine. În adevăr, trăvialiul elementar fiind egal cu creșterea  $dC$  a funcției de forțe, este

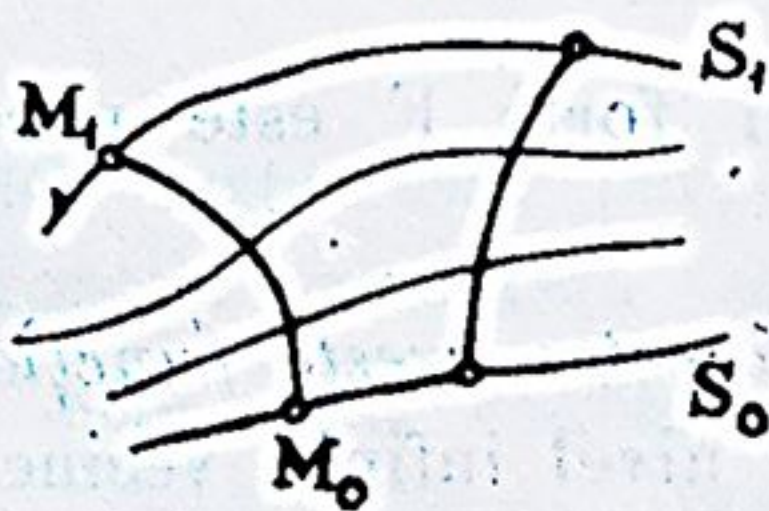


Fig. 20

același pentru orice parcurs elementar de la o suprafață de nivel la o suprafață infinit vecină. Trăvialiul total este prin urmare și el independent de drumurile ce parcurg mobilele care pleacă dela  $S_0$  și ajung la  $S_1$ , dacă mobilele traversează aceleași suprafețe

și în aceeași ordine.

În esența lui, acest fapt ne era cunoscut, căci corespunde celor două formule știute

$$d\mathcal{E} = dC \quad \text{și} \quad \mathcal{E} = C_1 - C_0.$$

Precizarea de față are unicul scop de a face să se înțeleagă cum trebuie luate parcursurile mobilelor pentru ca trăvialiul să rămână același.



Dacă revenim la exemplul deja considerat

$$U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

vedem că suprafețele de nivel sunt suprafețele

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$$

adică semiplanurile  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} C$  care trec toate prin axul Oz. Când punctul M descrie conturul închis  $\Sigma_1$  el nu traversează aceleași suprafețe ca în cazul când descrie conturul  $\Sigma$  și înțelegem astfel mai bine de ce traverșiurile nu pot fi egale unul cu altul.

e). *Liniile de forțe sunt traectoriile ortogonale ale suprafețelor de nivel.* Aceasta se înțelege imediat deoarece tangentele liniilor de forțe coincid cu direcțiile însăși ale forțelor și acestea sunt normale suprafețelor de nivel.

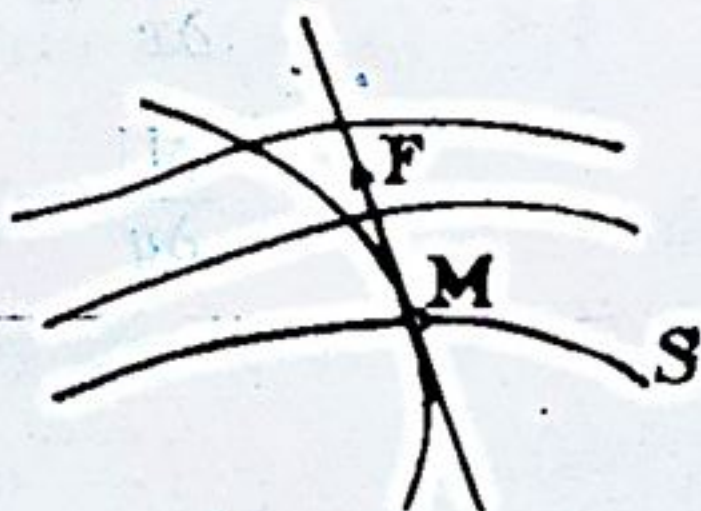


Fig. 21

#### 10. Exemple de forțe care admit o funcție de forțe.

a). *Forță constantă.* Astfel este cazul greutății. Dacă luăm axul Oz vertical și îndreptat în sus, avem

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-mg.$$

deci funcția de forțe este

$$U = -mgz + \text{const.}$$

b). *Forță perpendiculară la un plan fix și funcție de distanța dela mobil la plan.* Luând planul fix drept plan  $xOy$ , avem

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=\varphi(z).$$

Se vede imediat că funcția de forțe este

$$U = \int \varphi(z) dz = f(z) + \text{const.}$$

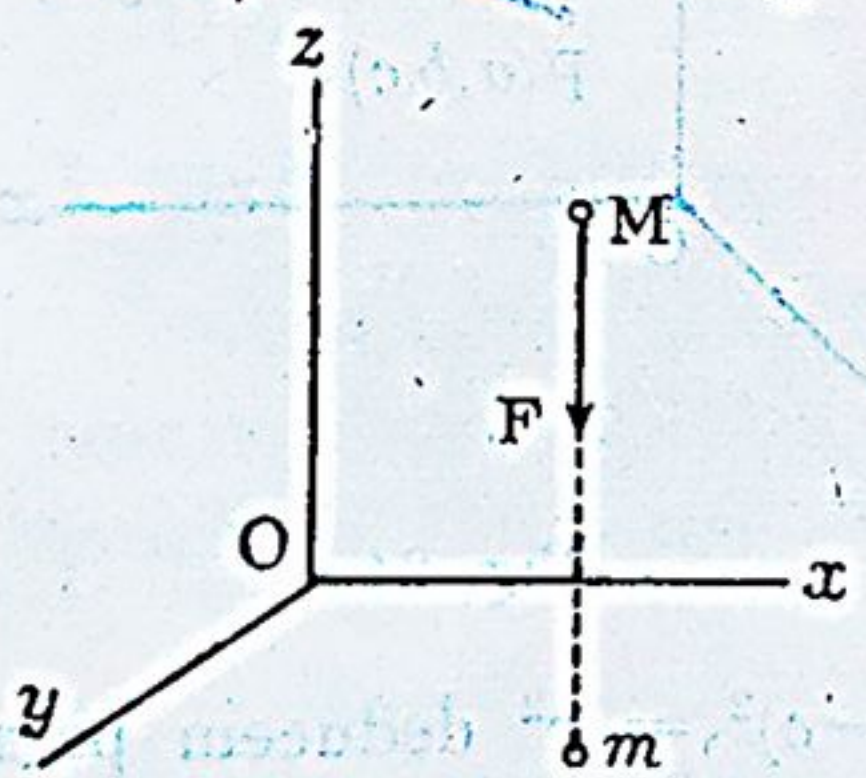


Fig. 22

Suprafețele de nivel sunt  $z = C$ , adică planuri paralele cu  $xOy$ . Liniile de forțe sunt drepte paralele cu Oz.

c). *Forță perpendiculară pe o dreaptă fixă și funcție de distanța mobilului la dreaptă.* Luând dreapta fixă drept ax Oz, însemnând



prin  $r$  distanța mobilului la dreaptă și prin  $\varphi(r)$  valoarea forței, avem

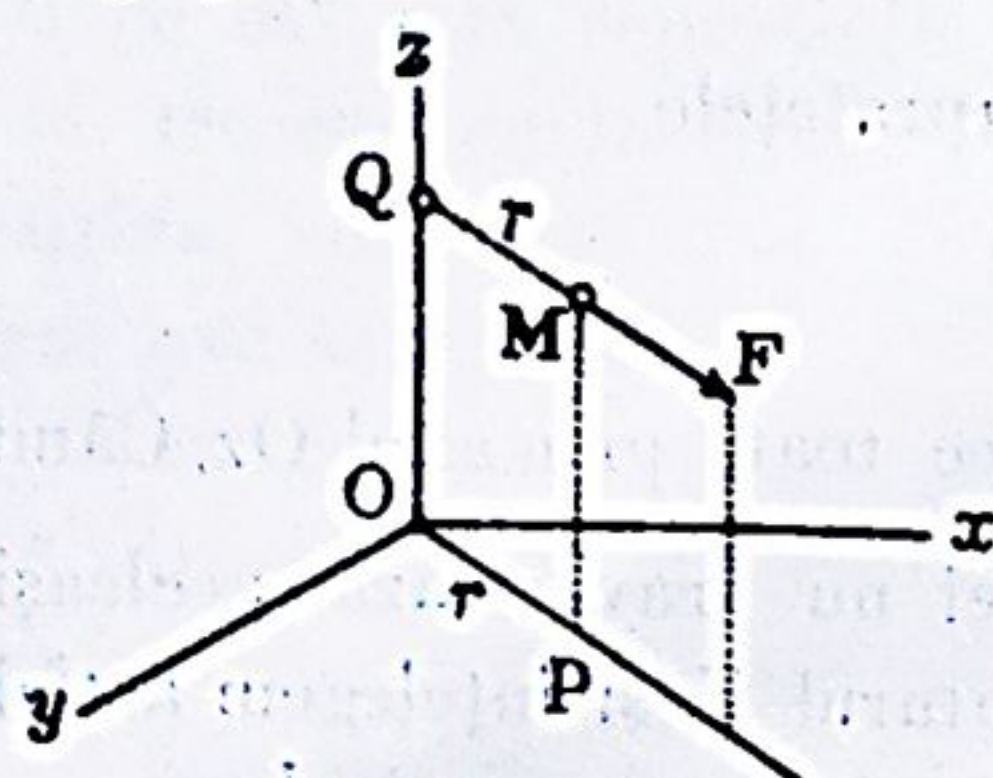


Fig. 23

$$X = \frac{x}{r} \varphi(r), \quad Y = \frac{y}{r} \varphi(r), \quad Z = 0.$$

Funcția de forțe este

$$U = \int \varphi(r) dr = f(r) + \text{const.}$$

căci relația  $x^2 + y^2 = r^2$  ne dă

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

și prin urmare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \varphi(r) = X$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} \varphi(r) = Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 = Z.$$

Suprafețele de nivel,  $f(r) = C$ , sunt cilindrii de revoluție  $r = \text{const.}$  iar liniile de forțe sunt perpendicularele MQ duse axului Oz.

d). *Forță centrală, funcție de distanța mobilului la centrul fix.* Fie P centrul fix, de coordonate  $a, b, c$  și M punctul mobil în care lucrează o forță F îndreptată pe direcția MP.

Insemnând prin  $r$  distanța dela P la M și prin  $\varphi(r)$  valoarea forței F, avem

$$X = \frac{x-a}{r} \varphi(r), \quad Y = \frac{y-b}{r} \varphi(r), \quad Z = \frac{z-c}{r} \varphi(r).$$

Funcția de forțe este ca și la  $n^0$  precedent

$$U = \int \varphi(r) dr = f(r) + \text{const.}$$

căci din relația  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$  deducem prin derivare

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z-c}{r}$$

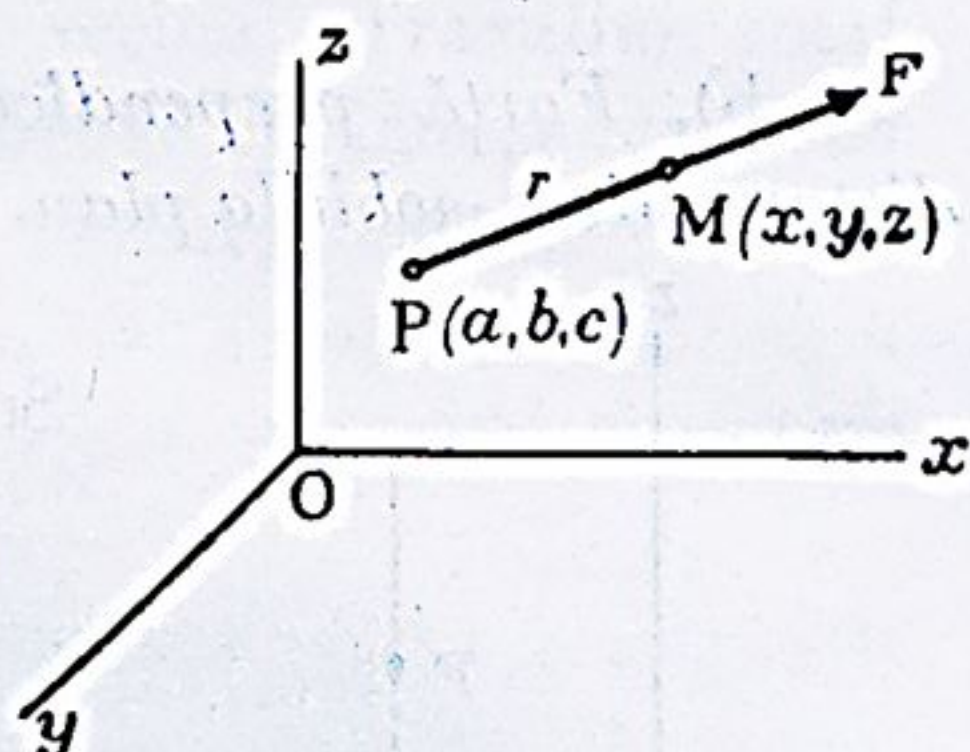


Fig. 24



asa încât

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r} \varphi(r) = X$$

și în mod analog

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y-b}{r} \varphi(r) = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z-c}{r} \varphi(r) = Z.$$

Travaliul elementar  $d\mathcal{E}$  al forței  $F$  fiind egal cu  $dU$  are ca expresie  $\varphi(r) dr$ . Avem în adevăr

$$d\mathcal{E} = X dx + Y dy + Z dz$$

adică

$$d\mathcal{E} = \frac{\varphi(r)}{r} [(x-a) dx + (y-b) dy + (z-c) dz]$$

și, cum relația  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$  ne dă

$$(x-a) dx + (y-b) dy + (z-c) dz = r dr$$

rezultă în adevăr că

$$d\mathcal{E} = \varphi(r) dr.$$

Suprafețele de nivel,  $r = \text{const.}$  sunt sfere descrise din  $P$  ca centru. Liniile de forțe sunt razele duse din  $P$ .

Dacă, în particular, punctul  $M$  este atras de centrul  $P$  cu o forță invers proporțională patratului distanței  $r$ , avem  $F = \frac{k}{r^2}$ ,  $k$  fiind o constantă pozitivă. Funcția de forțe  $U$  este în acest caz

$$U = \int -\frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} + h$$

$h$  fiind o constantă.

Travaliul forței, când mobilul sosește dela o poziție  $M_0$  depărtată indefinit, la poziția  $M_1$ , este

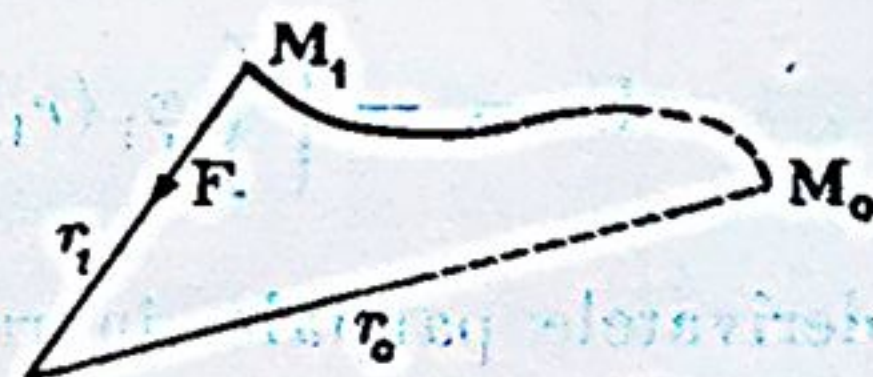


Fig. 25

$$\mathcal{E} = U_1 - U_0 = \left( \frac{k}{r_1} + h \right) - \left( \frac{k}{r_0} + h \right) = \frac{k}{r_1}$$

de oarece  $\frac{k}{r_0}$  este nul.



**Generalizare.** Să presupunem că în punctul  $M$  lucrează mai multe forțe  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , îndreptate pe dreptele care unesc acest punct cu centrele fixe  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , intensitățile forțelor fiind funcții  $\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \varphi_3(r_3), \dots$ , de distanțele  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , ale punctului mobil  $M$  la centrele fixe.

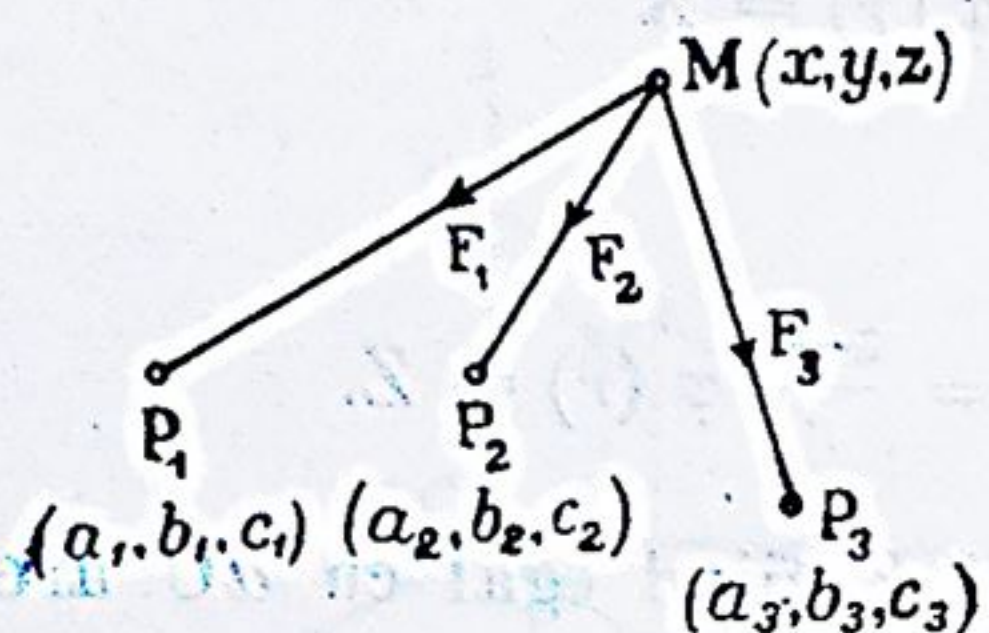


Fig. 26

Dacă forțele sunt atractive, așa după cum arată figura, avem

$$X_1 = -\frac{x-a_1}{r_1} \varphi_1(r_1), \quad Y_1 = -\frac{y-b_1}{r_1} \varphi_1(r_1), \quad Z_1 = -\frac{z-c_1}{r_1} \varphi_1(r_1).$$

$$X_2 = -\frac{x-a_2}{r_2} \varphi_2(r_2), \quad Y_2 = -\frac{y-b_2}{r_2} \varphi_2(r_2), \quad Z_2 = -\frac{z-c_2}{r_2} \varphi_2(r_2)$$

...

și, în consecință, componentele  $X, Y, Z$  ale rezultantei acestor forțe au ca expresii:

$$X = -\left[ \frac{x-a_1}{r_1} \varphi_1(r_1) + \frac{x-a_2}{r_2} \varphi_2(r_2) + \dots \right]$$

$$Y = -\left[ \frac{y-b_1}{r_1} \varphi_1(r_1) + \frac{y-b_2}{r_2} \varphi_2(r_2) + \dots \right]$$

$$Z = -\left[ \frac{z-c_1}{r_1} \varphi_1(r_1) + \frac{z-c_2}{r_2} \varphi_2(r_2) + \dots \right]$$

Funcția de forțe este în acest caz

$$U = -\left[ \int \varphi_1(r_1) dr_1 + \int \varphi_2(r_2) dr_2 + \dots \right]$$

derivatele parțiale în raport de  $x, y, z$  ale acestei funcții reproducând, după cum se vede imediat, expresiile  $X, Y, Z$  de aci mai sus ale componentelor rezultantei forțelor care lucrează în punctul  $M$ .

Travaliul elementar al uneia dintre forțe, spre exemplu al forței  $\varphi_1(r_1)$  este  $-\varphi_1(r_1) dr_1$ . Aceasta se poate vedea și



în mod geometric, considerând o deplasare elementară  $MM'$  a mobilului și observând că **travaliul** elementar al forței  $F_1$  pentru deplasarea  $MM'$ , care este egal cu forța  $F_1$  înmulțită cu proiecția elementului  $MM'$  pe direcția forței, are ca expresie

$$-F_1 \cdot MM'' \text{ sau } -F_1 (P_1 M' \cos s - P_1 M)$$

adică, în valoare principală,

$$-F_1 [(r_1 + dr_1) - r_1] \text{ deci } -\varphi_1(r_1) dr_1.$$

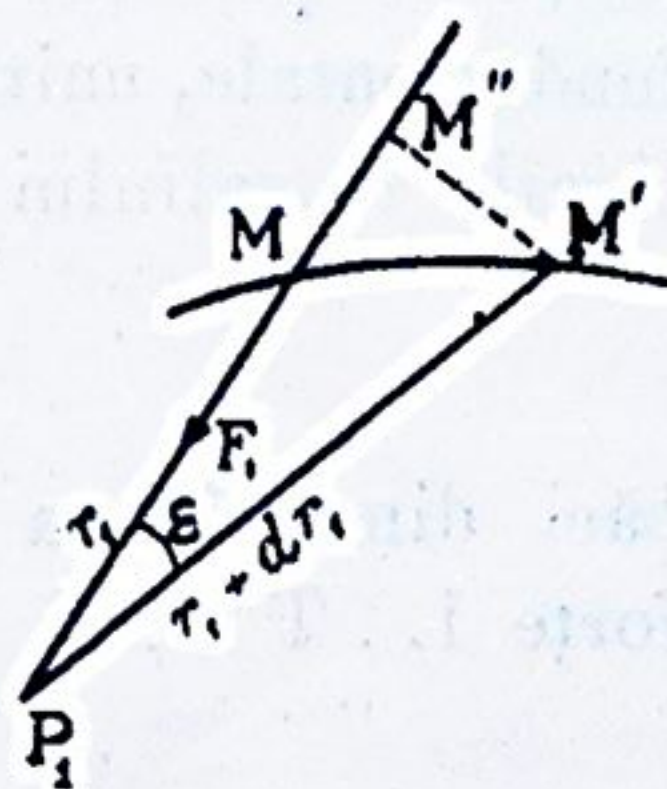


Fig. 27

11. **Potențial.** Se numește astfel, funcția de forțe luată cu semnul schimbat. Insemnând potențialul prin  $V$ , avem în consecință  $V = -U(x, y, z)$  și prin urmare

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Potențialul este utilizat în teoriile electricității și magnetismului. Suprafețele de nivel iau atunci numele de *suprafețe echipotențiale*.

12. **Unitate de lucru și dimensiunile travaliului.** a). Tra-

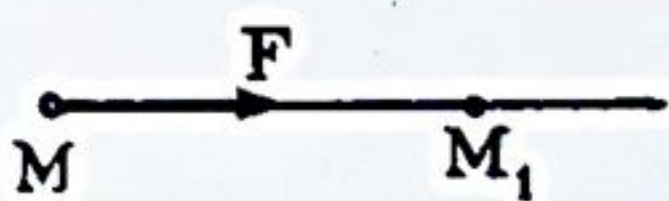


Fig. 28

valiul unei forțe constante  $F$  în deplasarea  $MM_1$  de pe direcția sa este

$$\mathcal{E} = MM_1 \cdot F.$$

Dacă luăm  $F=1$  și  $MM_1=1$ , avem  $\mathcal{E}=1$ .

Unitatea de lucru va fi deci **travaliul** unității de forță pentru o deplasare în sensul forței egală cu unitatea de lungime.

În sistemul C. G. S. unitatea de lucru se numește *erg*. În sistemul industrial M. K. S., unitatea de forță fiind kilogramul, iar unitatea de lungime metrul, unitatea de lucru este *kilogrametrul*.

b). **Travaliul** fiind o sumă de termeni de forma

$$F \cdot MM' \cos (F, MM')$$

și cum cosinusul nu are dimensiuni, el fiind un număr abstract, rezultă că dimensiunile travaliului depind de produsul  $F \cdot MM'$



adică de produsul unei forțe cu o lungime. Dacă luăm ca unități fundamentale, unitățile de lungime, de timp și de masă, dimensiunile travaliului vor fi

$$L^2 \cdot T^{-2} \cdot M$$

căci dimensiunea unei lungimi este  $L$ , iar dimensiunea unei forțe  $L \cdot T^{-2} \cdot M$ .



## II. MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

### I. ECUAȚIILE GENERALE ALE MIȘCĂREI.

Dacă însemnăm prin  $m$  masa punctului și prin  $X, Y, Z$  proiecțiile rezultantei forțelor care lucrează asupra punctului, adică

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

avem în fiecare moment

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

sistemul de axe cordonate putând fi dreptunghiular sau oblic.

Aceste 3 ecuații, sunt ecuațiile generale ale mișcării. Ele servesc pentru rezolvirea celor 2 principale probleme de Dinamică:

I. Fiind date forțele care lucrează asupra unui punct, să se determine mișcarea punctului;

II. O mișcare fiind observată, să se determine forța care o produce.

**Problema I.** Cum în general componentele  $X, Y, Z$  sunt după cum am mai spus funcțiuni de timp, de cordonate și de componentele vitezei, sistemul de ecuații (1) se prezintă sub forma



$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_1 \left( t; x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\
 (2) \quad m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_2 \left( t; x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\
 m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_3 \left( t; x, y, z; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).
 \end{aligned}$$

Acest sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul al doilea urmează a fi integrat, pentru a se obține expresiunile coordonatelor  $x, y, z$ , în funcție de timp.

Putem aduce rezolvirea sistemului (2) la rezolvirea unui sistem de 6 ecuații diferențiale de ordinul întâi scriind

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x', & \frac{dy}{dt} &= y', & \frac{dz}{dt} &= z' \\
 m \frac{dx'}{dt} &= F_1 (t; x, y, z; x', y', z') \\
 m \frac{dy'}{dt} &= F_2 (t; x, y, z; x', y', z') \\
 m \frac{dz'}{dt} &= F_3 (t; x, y, z; x', y', z').
 \end{aligned}$$

Soluția generală a acestui sistem conține 6 constante arbitrare și se prezintă sub forma

$$\begin{aligned}
 x &= f_1 (t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\
 y &= f_2 (t; c_1, c_2, \dots, c_6) \\
 (3) \quad z &= f_3 (t; c_1, c_2, \dots, c_6) \\
 x' &= f_1' (t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\
 y' &= f_2' (t; c_1, c_2, \dots, c_6) \\
 z' &= f_3' (t; c_1, c_2, \dots, c_6).
 \end{aligned}$$

Cantitățile  $c_1, c_2, \dots, c_6$  figurează din cauză că scriind ecuațiile (2) n'am precizat care anume sunt coordonatele  $x_0, y_0, z_0$  ale punctului și componentele  $x'_0, y'_0, z'_0$  ale vitezei sale la originea timpului. Dacă ni se dau aceste elemente, atunci problema se termină în felul următor:



În sistemul de ecuații (3) înlocuim pe  $x, y, z$  și  $x', y', z'$  prin  $x_0, y_0, z_0$  și  $x'_0, y'_0, z'_0$  iar pe  $t$  prin zero. Rezolvind atunci în raport de  $c_1, c_2, \dots, c_6$  vom determina valorile acestor constante pe care nu ne mai rămâne decât să le introducem în sistemul de ecuații (3) pentru a obține soluția definitivă a problemei.

Cele 6 constante trebuind să fie distincte, sistemul de ecuații care le dă, nu poate să fie nici incompatibil, nici nedeterminat. Dacă unul din aceste două cazuri se prezintă, aceasta va însemna că nu s'a obținut soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale.

a). *Integralele unei probleme de Dinamică.* Integrațiunea ecuațiilor mișcării unui punct este o problemă grea, pentru care nu se poate da nici o regulă generală. Se procedează adesea ori la integrațiune, căutând ceea ce se numesc *integrale ale sistemului de ecuații diferențiale*, adică funcțiuni de timp, de coordonate și de componentele vitezei care să rămână constante pe tot timpul mișcării:

$$\varphi(t; x, y, z; x', y', z') = 0.$$

Numărul de integrale distincte este de cel mult 6:

$$\varphi_1(t; x, y, z; x', y', z') = c_1$$

$$\varphi_2(t; x, y, z; x', y', z') = c_2$$

$$\varphi_6(t; x, y, z; x', y', z') = c_6$$

Rezolvirea lor în raport de  $x, y, z; x', y', z'$  ne dă soluția generală reprezentată prin sistemul de ecuații (3).

În cazul când nu putem rezolvi complet problema, cele câteva integrale găsite ne arată fiecare în parte câte o proprietate caracteristică a mișcării și ne vom mulțumi cu atât.

b). *Mișcarea într'un plan.* Când forța care lucrează asupra punctului nu iese dintr'un plan, care să conțină și viteza inițială, mișcarea este plană și are ca ecuații:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Soluția generală, conține patru constante arbitrare.



c). *Mișcarea pe o dreaptă.* Dacă forța are neconținut aceeași direcție, care să fie și direcția vitezei inițiale, mișcarea este rectilină și avem atunci o singură ecuație diferențială:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

a cărei soluțiune generală conține două constante arbitrare.

**Problema II.** Să presupunem acum că se cunoaște mișcarea punctului și se caută forța care o produce. Cordonatele  $x, y, z$  sunt atunci funcțiuni cunoscute de timp. Derivându-le de 2 ori în raport de timp și înmulțind derivatele aflate cu masa  $m$ , vom avea

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dacă observarea mișcării, făcută cu condițiuni inițiale variabile, ne-a putut permite să exprimăm pe  $x, y, z$  în funcție de 6 constante arbitrare:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y &= f_2(t; c_1, c_2, \dots, c_6) \\ z &= f_3(t; c_1, c_2, \dots, c_6) \end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} x' &= f'_1(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y' &= f'_2(t; c_1, c_2, \dots, c_6) \\ z' &= f'_3(t; c_1, c_2, \dots, c_6) \end{aligned}$$

atunci se poate obține și legea după care variază forța pe timpul mișcării. Vom avea în adevăr în asemenea caz

$$X = m \cdot f''_1(t; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

$$Y = m \cdot f''_2(t; c_1, c_2, \dots, c_6)$$

$$Z = m \cdot f''_3(t; c_1, c_2, \dots, c_6)$$

în care vom înlocui constantele prin valorile trase din sistemul precedent, deci valori funcțiuni de  $t, x, y, z, x', y', z'$ . Operând astfel vom ajunge la rezultatul

$$X = F_1(t; x, y, z; x', y', z')$$

$$Y = F_2(t; x, y, z; x', y', z')$$

$$Z = F_3(t; x, y, z; x', y', z')$$

care va reprezenta legea forței pe timpul mișcării.



Dacă mișcarea este plană, va trebui să cunoaștem pe  $x$  și pe  $y$  în funcție de  $t$  și de 4 constante arbitrare, iar dacă mișcarea este rectilină trebuie să ni se dea  $x$  în funcție de  $t$  și de 2 constante arbitrare.

*Exemplu. Mișcare rectilină reprezentată prin ecuația*

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

$\alpha$  și  $\beta$  fiind constante determinate iar  $A$  și  $B$  constante arbitrare.

Deducem :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha Ae^{\alpha t} + \beta Be^{\beta t} = x'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 Ae^{\alpha t} + \beta^2 Be^{\beta t}.$$

Eliminarea constantelor arbitrare  $A$  și  $B$  între aceste ecuații ne dă

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ \frac{dx}{dt} & \alpha & \beta \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0$$

din care deducem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} - \alpha \beta x$$

și prin urmare

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \left[ (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} - \alpha \beta x \right]$$

care reprezintă legea forței pe timpul mișcării.

### Ecuatiile intrinsece ale mișcării.

Știm că accelerația este coprinsă în planul osculator al traectoriei și are ca proiecții pe tangentă și pe normala principală

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{R}$$



R fiind raza de curbură în punctul M. Dacă  $F$  este rezultanta forțelor care lucrează asupra punctului, avem  $F = mv$  și prin urmare proiecțiile ei pe tangentă și pe normală vor fi

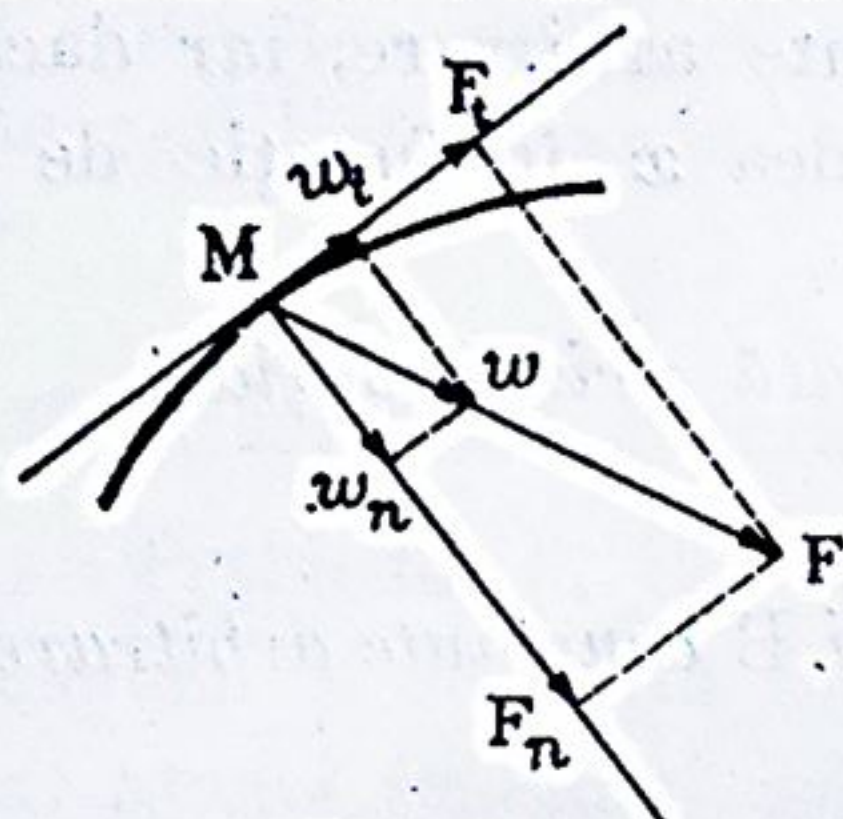


Fig. 29

$$F_t = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{R}.$$

Aceste formule arată că variația de viteză este datorită numai componentei tangențiale  $F_t$  așa că dacă  $F_t$  ar fi nul, adică dacă forța ar fi neconținut normală traectoriei, viteza ar rămâne constantă și prin urmare mișcarea ar fi uniformă. De asemenea curbura  $\frac{1}{R}$  depinde numai de  $F_n$  așa că dacă această componentă ar fi nulă, curbura ar fi și ea nulă și mișcarea ar fi rectilină. Componentei  $F_n$  i se mai zice și *forță centripetă*.

Cele două ecuații de mai sus, se numesc *ecuațiile intrinsece* ale mișcării. Ele sunt cu deosebire utile atunci când se cunoaște forma geometrică a traectoriei.

## II. CANTITATEA DE MIȘCARE.

Să punem pe cea dintâi dintre cele două ecuații intrinsece sub forma  $m \cdot dv = F_t \cdot dt$  și să integrăm dela  $t_0$  la  $t$ . Obținem:

$$(\alpha) \quad mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F_t \cdot dt.$$

Productul  $mv$  se numește *cantitate de mișcare* iar productul  $F_t \cdot dt$  *impulsiune elementară a forței*  $F_t$ . Egalitatea ( $\alpha$ ) exprimă cu aceste denumiri, că *variația cantității de mișcare într'un interval de timp este egală cu impulsunea totală a componentei tangențiale a rezultantei forțelor, în acel interval de timp*.

Cantitatea de mișcare se reprezintă printr'un vector de mărime  $mv$  purtat pe direcția și în sensul vitezei. Ea are ca dimensiuni  $L \cdot T^{-1} \cdot M$ .



Proiecțiile cantității de mișcare pe trei axe cordonate sunt

$$m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt}$$

iar momentele ei, în raport de 3 axe dreptunghiulare, au ca expresiuni

$$m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right), \quad m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right), \quad m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

1. **Teorema cantității de mișcare proiectată pe un ax.** Să luăm un ax oarecare drept ax  $Ox$ . Avem în proiecțiune pe acest ax:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$  care se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = X.$$

Așa dar:

*Derivata în raport de timp a proiecției cantității de mișcare pe un ax fix, este egală cu proiecția rezultantei forțelor pe același ax.*

Dacă luăm trei axe cordonate, avem în același timp

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) &= X \\ (1) \quad \frac{d}{dt} \left( m \frac{dy}{dt} \right) &= Y \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dz}{dt} \right) = Z$$

$X, Y, Z$  fiind proiecțiile rezultantei forțelor care lucrează asupra punctului.

Fie  $OA$  vectorul reprezentativ al cantității de mișcare și  $OB$  vectorul reprezentativ al rezultantei forțelor. Ecuatiile (1) exprimă că *derivata geometrică a vectorului  $OA$ , și deci viteza punctului  $A$  este egală cu vectorul  $OB$ .*

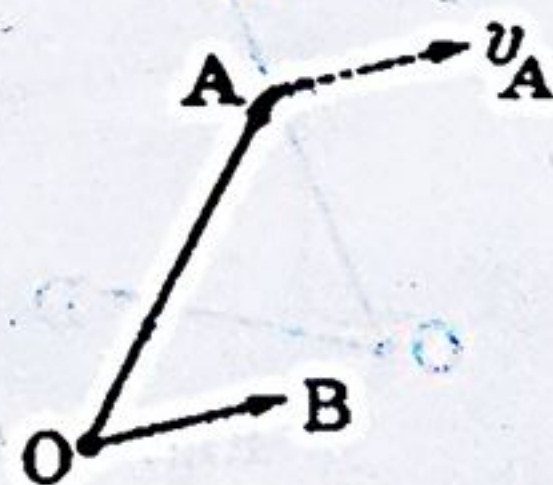


Fig. 30

2. **Teorema momentului cantității de mișcare.** Să luăm ca mai sus un ax oarecare drept ax  $Ox$  și să formăm cu acest ax un sistem dreptunghiular  $Oxyz$ .



Dacă înmulțim egalitatea  $m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$  cu  $y$  și scădem din ea egalitatea  $m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$  înmulțită cu  $z$ , obținem combinațiunea

$$m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = y Z - z Y$$

care se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = y Z - z Y.$$

Această egalitate exprimă, că:

*Derivata în raport de timp a momentului cantității de mișcare în raport de un ax fix, este egală cu momentul rezultantei forțelor luat în raport de același ax.*

În raport de 3 axe cordonate dreptunghiulare, avem în același timp

$$\frac{d}{dt} m \left[ \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = y Z - z Y$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left[ m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right] = z X - x Z$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = x Y - y X.$$

Fie OC momentul cantității de mișcare în raport cu origina axelor și OD momentul rezultantei forțelor în raport de același punct. Ecuațiile (2) exprimă că derivata geometrică a vectorului OC și deci viteza punctului C, este egală cu vectorul OD.

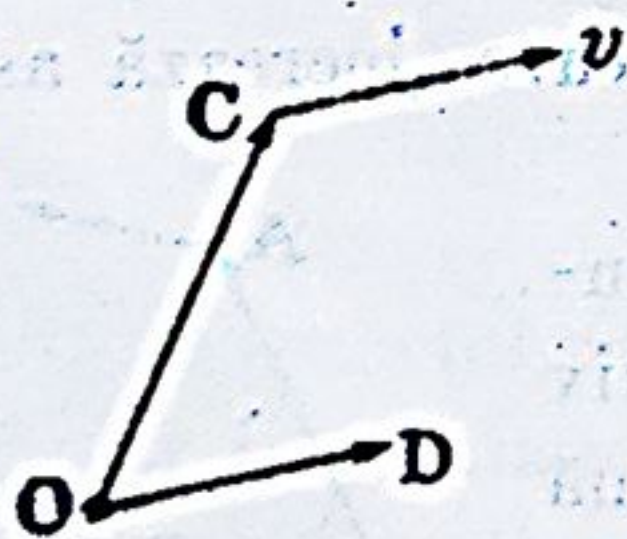


Fig. 31

**3. Aplicațiuni.** Cele 2 teoreme de mai sus ne dau integrale de ale mișcării în cazul când rezultanta forțelor este necon-

tenit perpendiculară pe un ax sau pe un plan fix, sau când momentul ei în raport de un ax sau de un punct este neconținut nul.

a). *Rezultantă perpendiculară pe un ax.* Luând axul drept ax Ox, avem



$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad \text{deci } m \frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

care este o integrală. Deducem  $x = a + bt$ ,  $a$  și  $b$  fiind două constante arbitrare.

b). *Rezultantă perpendiculară pe un plan.* Luând planul drept plan  $xOy$  și ca ax  $Oz$  o dreaptă perpendiculară pe plan, avem:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( m \frac{dy}{dt} \right) = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Primele două ecuații ne dau două integrale de ale mișcării din care deducem  $x = a + bt$ ,  $y = h + kt$  și prin eliminarea lui  $t$ :  $Ax + By + C = 0$ . Așa dar traectoria este plană. Planul conține direcția forței și a vitezei inițiale. Dacă luăm în acest plan un ax  $Oz$  paralel cu cel dintâi și un ax  $Ox$  perpendicular, ecuațiile mișcării se reduc la

$$x = a + \xi t, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

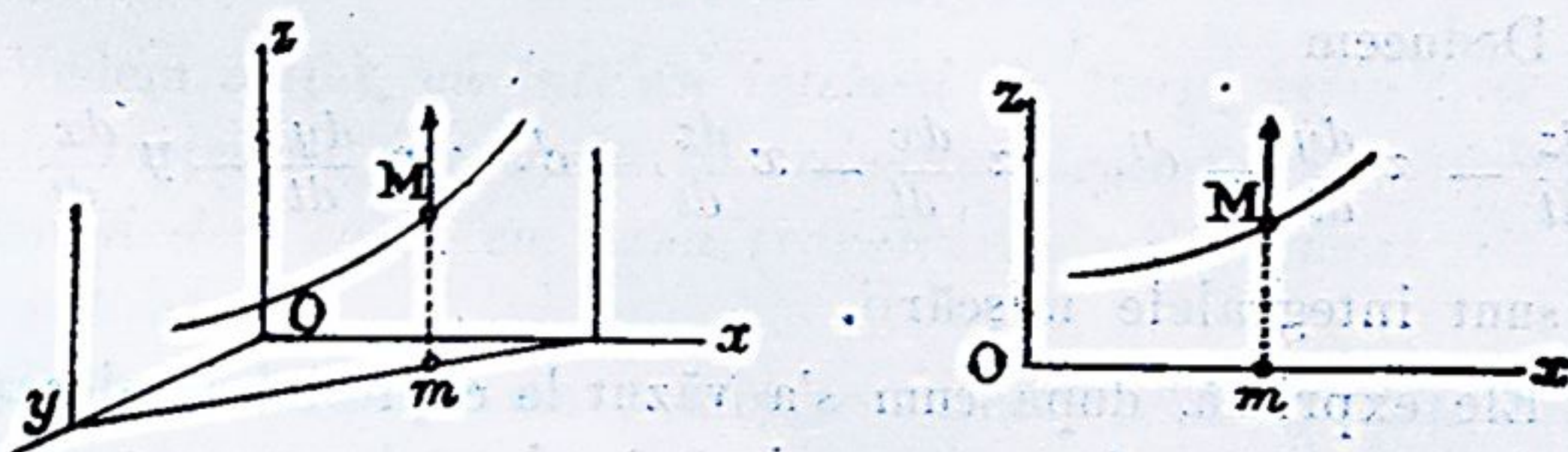


Fig. 32

c). *Rezultantă întâlnind un ax.* Luând axul drept ax  $Oz$  momentul rezultantei în raport cu acest ax fiind nul, avem

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = 0$$

deci

$$m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{const.}$$

sau mai simplu

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

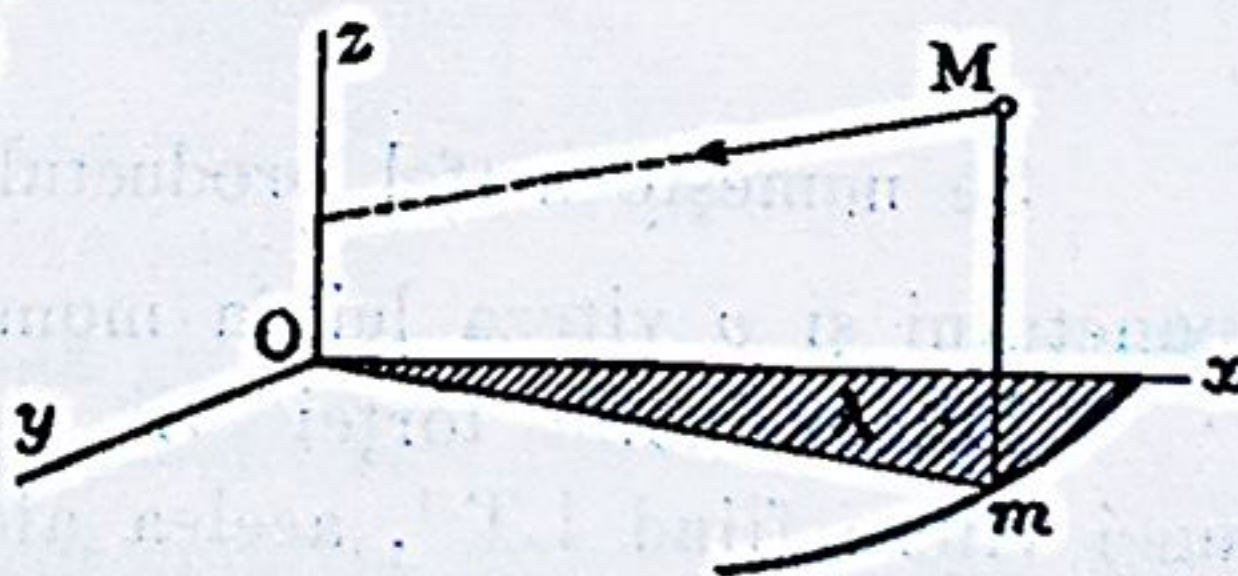


Fig. 33.

care este o integrală a mișcării. Ea exprimă, după cum știm



dela capitolul accelerațiunilor centrale, <sup>1)</sup> că aria  $\lambda$  crește proporțional cu timpul, adică  $\lambda = \frac{1}{2} ct + c_1$  sau numai  $\lambda_1 = \frac{1}{2} ct$  dacă aria începe odată cu timpul.

d). *Rezultantă trecând printr'un punct fix.* Luând punctul fix ca origină a unui sistem de axe cordonate dreptunghiulare, avem în același timp

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = 0$$

căci momentele rezultantei în raport de cele trei axe sunt nule

Deducem

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c'', \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c', \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

care sunt integralele mișcării.

Ele exprimă, după cum s'a văzut la capitolul accelerațiilor centrale, că traectoria este coprinsă într'un plan care trece prin origină și că ariile  $\lambda$ ,  $\lambda'$  și  $\lambda''$  variază proporțional cu timpul  $t$ , ori care ar fi planurile cordonate.

### III. FORȚA VIE

Se numește astfel productul  $\frac{1}{2} mv^2$ , în care  $m$  este masa punctului și  $v$  viteza lui în momentul  $t$ .

Dimensiunile forței vie sunt  $L^2 T^{-2} M$  căci dimensiunile unei viteze fiind  $LT^{-1}$ , acelea ale patratului vitezei sunt  $L^2 T^{-2}$ .

<sup>1)</sup> Cinematlea, pag. 79.



Forța vie are deci aceleași dimensiuni ca și travaliul, adică reprezintă o mărime de aceeași natură <sup>1)</sup>.

1. **Teoremă.** *Variația forței vie într'un interval de timp oarecare, este egală cu suma travaliului forțelor care lucrează asupra punctului în același interval de timp.*

Fie:  $m$  masa punctului,  $v$  viteza într'un moment oarecare,  $F$  rezultanta forțelor care lucrează asupra punctului și  $\alpha$  unghiul cuprins între rezultanta forțelor și viteză.

$$\text{Avem } m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha.$$

$$\text{deci } m dv = F dt \cos \alpha.$$

Inmulțind primul membru cu  $v$  și

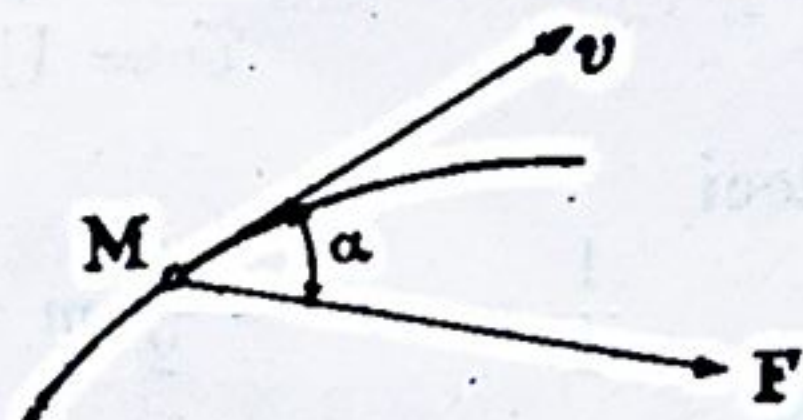


Fig. 34

pe cel de al doilea cu  $\frac{ds}{dt}$  care este egal cu  $v$ , obținem

$$m v dv = F ds \cos \alpha \quad \text{adică } d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = F ds \cos \alpha$$

care se scrie

$$dT = d\mathcal{E}.$$

Vedem astfel, că într'un interval de timp infinit de mic, variația forței vie este egală cu travaliul elementar al rezultantei forțelor și deci egală cu suma travaliurilor elementare ale forțelor aplicate.

Să considerăm acum o mișcare finită dela  $t_0$  la  $t$ . Fie  $v_0$  și  $v$  vitezele corespunzătoare și  $s_0$  și  $s$  arcurile parcurse pe traectorie.

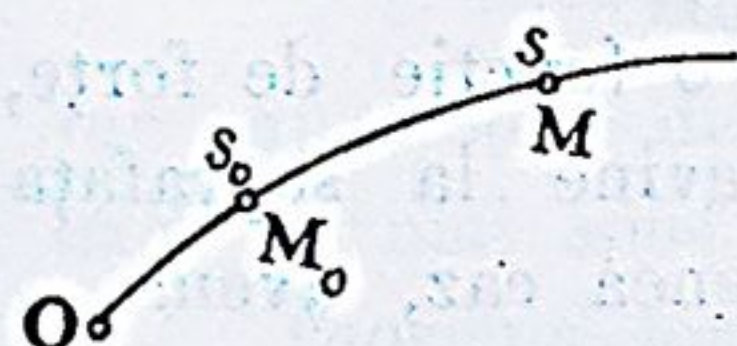


Fig. 35

Integrațiunea ecuației precedente ne dă

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{s_0}^s F ds \cos \alpha$$

<sup>1)</sup> Leibnitz a dat numele de forță vie produsului  $mv^2$ . Acest produs nu reprezintă însă o forță, căci dimensiunile lui sunt diferite de acelea ale unei forțe. Mai târziu, Coriolis a denumit forță vie produsul  $\frac{1}{2} m v^2$ , căci sub această formă intervine de obicei în chestiunile de Mecanică produsul  $mv^2$ . De atunci, autorii au zis forță vie fie lui  $mv^2$ , fie lui  $\frac{1}{2} m v^2$  după simplele lor preferințe.



care se scrie mai simplu

$$T - T_0 = \mathcal{E} \quad \text{sau încă } \Delta T = \mathcal{E}.$$

Teorema este deci demonstrată.

**2. Integrala forțelor vii.** Teorema forțelor vii este de o importanță capitală în cazul când există o funcție de forțe. Fie această  $U(x, y, z)$ . Știm că avem în acest caz

$$\mathcal{E} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

deci

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

sau

$$\frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, z) = \frac{1}{2} m v_0^2 - U(x_0, y_0, z_0).$$

Vedem astfel că funcția  $\frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, z)$  rămâne constantă pe tot timpul mișcării și constituie în consecință o integrală a problemei.

Dacă  $V$  este potențialul avem

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = \text{const.}$$

Așa dar, când rezultanta forțelor care lucrează asupra unui punct admite un potențial, suma forței vii și a potențialului rămâne constantă pe tot timpul mișcării.

**3. Conservarea forței vii.** Când există o funcție de forțe, traviul este în general nul dacă punctul revine la suprafața de nivel de la care a plecat. Deci, în asemenea caz, avem

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 \quad \text{adică } v^2 = v_0^2$$

ceea ce arată că, în valoare absolută, mărimea vitezei rămâne aceeași ori de câte ori mobilul traversează aceeași suprafață de nivel.

În aceasta constă principiul zis al conservării forței vii. Este însă necesar pentru ca acest fapt să aibe întotdeauna loc, ca suprafețele de nivel să nu se întretaie unele cu altele.



#### 4. Notă asupra integralei forțelor vii. Egalitatea

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) \text{ ne dă}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Cum primul membru este esențialmente pozitiv, rezultă că punctul mobil nu poate eși, în mișcarea sa, din regiunea de spațiu definită prin inegalitatea

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Când această regiune nu coprinde întreg spațiul, ea este limitată de suprafața

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0$$

care depinde de poziția inițială a punctului și de mărimea vitezei sale inițiale, însă este independentă de direcția acestei viteze.

*Aplicațiune.* Fie un punct material supus numai acțiunii greutății. Luând axul Oz vertical, avem

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Traectoria este, după cum se știe (pag. 45) conținută în planul determinat de viteza inițială și de greutatea punctului.

Funcția de forțe este

$$U = -mgz + \text{const.}$$

iar suprafețele de nivel sunt planurile orizontale  $z = c$ , după cum s'a mai spus.

Teorema forțelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgz + mgz_0$$

de unde deducem, ca integrală a mișcării,

$$v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0 = \text{const.}$$

Funcția de forțe fiind o funcție uniformă de  $z$ , mărimea vitezei  $v$  redevine aceeași, în valoare absolută, când mobilul revine la același plan orizontal. Pe de altă parte, cum  $v_0^2 - 2g(z - z_0) > 0$  și prin urmare  $z < z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$  rezultă, că

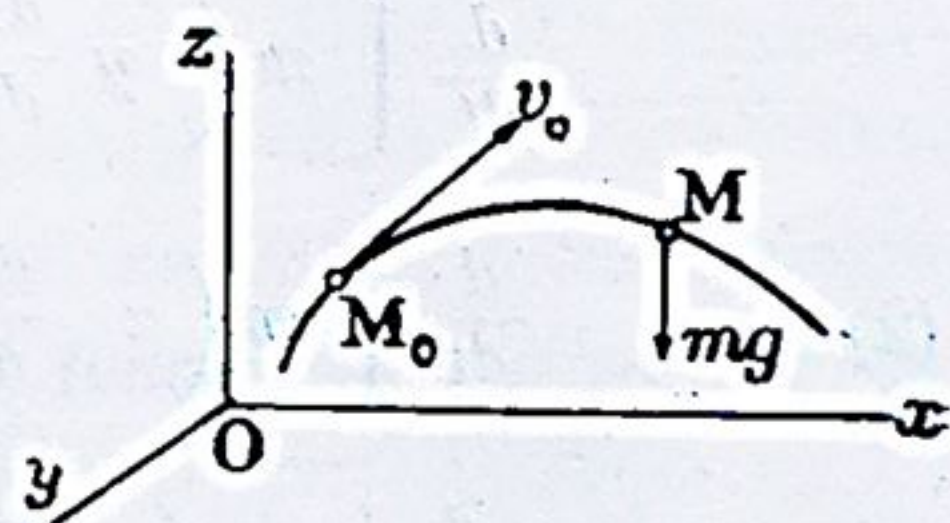


Fig. 36



oricare ar fi direcția vitezei inițiale, punctul se va găsi întotdeauna dedesubtul planului orizontal de cotă  $z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$ .

Dacă  $z_0 = 0$ , valoarea  $\frac{v_0^2}{2g}$  reprezintă înălțimea la care se ridică punctul material când este asvârlit vertical în sus, de pe planul  $xOy$ , cu viteza  $v_0$ .

#### IV. REZUMAT.

În rezumat avem 7 ecuațiuni, care pot în anumite cazuri să ne procure integrale de ale mișcării. Aceste ecuațiuni sunt următoarele:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = X, \quad \frac{d}{dt} \left( m \frac{dy}{dt} \right) = Y, \quad \frac{d}{dt} \left( m \frac{dz}{dt} \right) = Z$$

care corespund teoremei cantității de mișcare proiectată pe trei axe, apoi

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = yZ - zY$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left[ m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right] = zX - xZ$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = xY - yX$$

care corespund teoremei momentelor cantităților de mișcare în raport cu 3 axe dreptunghiulare, și înșfârșit

$$(3) \quad d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = Xdx + Ydy + Zdz$$

sau  $dT = d\mathcal{E}$  care corespunde teoremei forțelor vii.

#### V. ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

Să considerăm un punct în mișcare. Se numesc poziții de echilibru acele poziții în care forțele care lucrează asupra punctului își fac echilibru, adică au o rezultantă nulă. În astfel



de poziții, punctul va fi realmente în echilibru dacă-l vom presupune lipsit de viteză și aceasta trebuie subînțeles. *De după A*

Dacă  $X, Y, Z$  sunt proiecțiile rezultantei forțelor, pozițiile de echilibru sunt prin urmare definite prin sistemul de ecuații

$$(1) \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Să presupunem că există un câmp de forțe. În asemenea caz, componentele  $X, Y, Z$  sunt funcțiuni numai de coordonatele  $x, y, z$  ale poziției punctului. Rezolvind în raport de  $x, y, z$  sistemul de ecuațiuni (1) obținem una sau mai multe poziții care vor fi pozițiile de echilibru.

**1. Definiția stabilității de echilibru.** O poziție de echilibru  $A$  este zisă stabilă, dacă așezând punctul într-o poziție infinit vecină de  $A$  și abandonându-l forțelor, după ce i s'a imprimat mai întâi o viteză inițială foarte mică, punctul ia o mișcare infinit apropiată de poziția  $A$ . În cazul contrariu, poziția de echilibru este zisă nestabilă.

**2. Teoremă.** Când există o funcție de forțe, orice poziție care corespunde unui maximum al acestei funcții, este o poziție de echilibru stabil.

Prin ipoteză

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$U$  fiind funcția de forțe. Pozițiile de echilibru verifică sistemul de ecuații

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

ele corespund deci unui maximum sau unui minimum al funcției de forțe  $U(x, y, z)$ .

Fie  $A$  o poziție corespunzând unui maximum  $\alpha$  al funcției  $U$ . Într-o poziție  $A_0$  infinit vecină de  $A$ , valoarea funcției  $U$



este  $a - \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  fiind infinit de mic și pozitiv. În poziția  $A_0$  să imprimăm punctului o viteză foarte mică  $v_0$ , abandonându-l apoi acțiunii forțelor.

Punctul se va pune în mișcare. Fie după un timp oarecare,  $a - \varepsilon$  valoarea lui  $U$  și  $v$  viteza punctului. Potrivit teoremei forțelor vii, avem

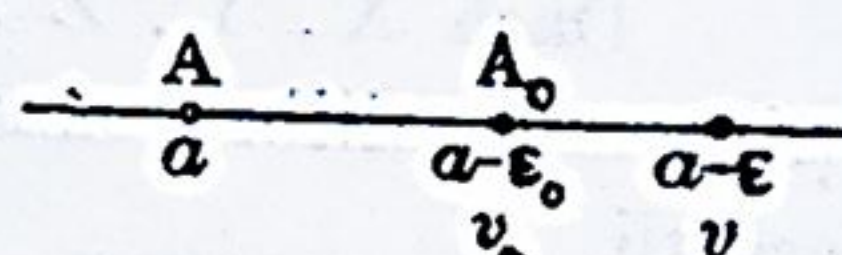


Fig. 37

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = (a - \varepsilon) - (a - \varepsilon_0)$$

adică

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \varepsilon_0 - \varepsilon.$$

Însă  $\frac{1}{2} m v^2$  este pozitiv. Deci  $\varepsilon$  este mai mic decât  $\frac{1}{2} m v_0^2 + \varepsilon_0$  și rămâne astfel infinit de mic. Valoarea  $a - \varepsilon$  a funcției  $U$  fiind în consecință infinit apropiată de valoarea  $a$ , rezultă că poziția punctului va rămâne infinit vecină de poziția de echilibru  $A$  și echilibrul va fi stabil.

Potențialul fiind prin definițiune egal cu  $-U$ , un maximum al funcției de forțe corespunde la un minimum al potențialului. Teorema de față mai poate fi deci enunțată în felul următor:

*Când forțele aplicate unui punct material liber admit un potențial, orice pozițiune a punctului care corespunde unui minimum al potențialului este o pozițiune de echilibru stabil.*

*Exemplu.* Un punct  $M$  este atras de un punct fix  $O$  cu o

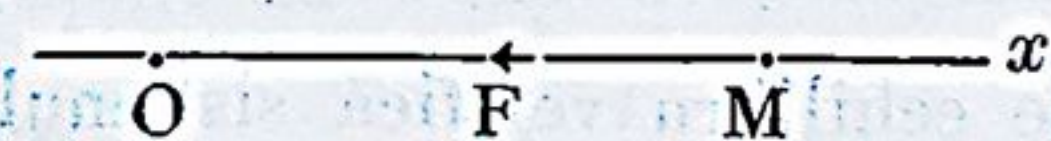


Fig. 38

forță  $F$  proporțională cu distanța  $OM$  și este animat în momentul inițial de o viteză care trece prin  $O$ . Mișcarea este evident rectilină

și dacă luăm punctul  $O$  ca origină, avem

$$F = - kx.$$

Funcția de forțe este

$$U = - \frac{1}{2} k x^2 + \text{const.}$$



Ea este maximă pentru  $x = 0$ , deci poziția  $O$  este o poziție de echilibru stabil.

Dacă forța  $F$  ar fi repulsivă, am avea  $F = kx$ , funcția de forțe ar fi  $U = \frac{1}{2} kx^2 + c$  și valoarea  $x = 0$  n'ar mai corespunde unei poziții de echilibru stabil,  $U$  fiind minim pentru  $x = 0$ .

### III. MISCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAȚĂ SAU PE O CURBĂ.

#### 1. MISCAREA PE O SUPRAFAȚĂ.

Fie un punct  $M$  supus unei rezistențe de forțe  $F$ . Dacă punctul este obligat de a rămâne pe o suprafață  $S$ , el va descrie o curbă  $(C)$  trasă pe suprafață, care nu este necesar punctului în mișcare să liasă și acțiunea forței  $F$ . Această suprafață exercită o acțiune asupra punctului, care modifică accelerația mișcării sale libere. Acțiunea suprafeței este denumită echivalentă unei forțe  $Z$  aplicată în  $M$ , care compune cu forța  $F$  o rezistență corespunzătoare în planul osculației al curbei din punctul  $M$  și egală cu cea ce fiind accelerația punctului în mișcare să pe curbă  $(C)$ . Mișcarea punctului pe suprafață  $S$  este denumită mișcare pe o suprafață liberă, deoarece este echivalentă mișcării punctului în câmpul forței  $F$  și forței  $Z$  direct aplicate.



Când suprafața este perfect netedă,  $Z$  este o forță normală asupra curbei, la cazul curburii forța  $Z$  are o componentă tangențială curbă  $(C)$  în sensul mișcării punctului, care este egală cu cea ce se numește frecare la rol de fricțiune și se presupune că nu există frecare. În virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, acțiunea  $F$  asupra punctului este echivalentă o reacțiune  $R$  a punctului asupra suprafeței egală și directă opusă lui  $Z$ . Această reacțiune este xiaz presiune a punctului.



### III. MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAȚĂ SAU PE O CURBĂ.

#### I. MIȘCAREA PE O SUPRAFAȚĂ.

Fie un punct  $M$  supus unei rezultante de forțe  $F$ . Dacă punctul este obligat de a rămâne pe o suprafață  $S$ , el va descrie o curbă  $(C)$  trasă pe suprafață, care nu este traectoria punctului în mișcarea sa liberă sub acțiunea forței  $F$ . Așa dar suprafața exercită o acțiune asupra punctului, care modifică accelerația mișcării sale libere. Acțiunea suprafeței este deci echivalentă unei forțe  $N$  aplicată în  $M$ , care compusă cu forța

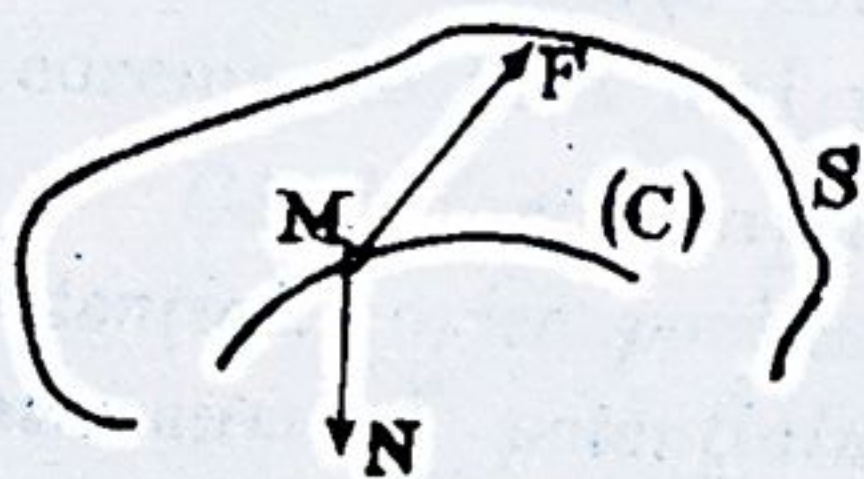


Fig. 39

$F$  dă o rezultantă coprinsă în planul osculator al curbei din punctul  $M$  și egală cu  $mw$ ,  $w$  fiind accelerația punctului în mișcarea sa pe curba  $(C)$ . Mișcarea punctului va putea fi considerată ca o mișcare liberă, descrisă sub acțiunea acestei rezultante, numită forță motrice.

Forței  $F$ , i se zice *forță direct aplicată*.

Când suprafața este perfect netedă,  $N$  este o forță normală suprafeței. În cazul contrariu, forța  $N$  are o componentă tangențială curbei  $(C)$  în sensul contrariu mișcării, care corespunde la ceea ce se numește *frecare*. În cele ce urmează vom presupune că nu există frecare.

În virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, acțiunii  $N$  a suprafeței asupra punctului, îi corespunde o reacțiune  $P$  a punctului asupra suprafeței, egală și direct opusă lui  $N$ . Această reacțiune este zisă *presiune* a punctului.



1. **Ecuatiile diferențiale ale mișcării.** Fie suprafața  $F(x, y, z) = 0$ . Cosinusurile directoare ale normalei la suprafață au ca expresiuni (axe dreptunghiulare)

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\Delta} \quad \text{cu} \quad \Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Se va ști în fiecare caz, după natura problemei, care semn să se ia înaintea radicalului.

Ecuatiile mișcării punctului pe suprafață vor fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{N}{\Delta} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

deci 4 ecuații pentru determinarea necunoscutelor  $x, y, z$  și  $N$  în funcție de  $t$ .

Dacă eliminăm pe  $N$ , obținem

$$(1) \quad \frac{m \frac{d^2x}{dt^2} - X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{m \frac{d^2y}{dt^2} - Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{m \frac{d^2z}{dt^2} - Z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

adică 3 ecuații, împreună cu  $F(x, y, z) = 0$ . Cele 2 ecuații diferențiale introduc 4 constante.

2. Se profită adesea de ecuația suprafeței pentru a se exprima  $x, y, z$  în funcție de doi parametri arbitrari:

$$x = \varphi_1(\alpha, \beta), \quad y = \varphi_2(\alpha, \beta), \quad z = \varphi_3(\alpha, \beta).$$

Se formează atunci

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{în funcție de} \quad \alpha, \beta, \quad \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

care se introduc în ecuațiile (1). Integrațiunea ne va da pe  $\alpha$  și  $\beta$  în funcție de  $t$  și de 4 constante arbitrare, acestea corespunzând valorilor  $\alpha_0, \beta_0, \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0, \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$  din momentul inițial.



3. **Aplicațiunea teoremei forțelor vii.** Este esențial de remarcat că în aplicațiunea acestei teoreme nu se va ține socoteală de acțiunea  $N$ , căci ea fiind normală curbei  $(C)$ , traviul ei este neconținut nul. Vom avea deci

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^t (X dx + Y dy + Z dz)$$

unde  $X, Y, Z$  vor reprezenta numai componentele rezultantei  $F$  a forțelor direct aplicate.

Dacă forțele direct aplicate admit o funcție de forțe  $U(x, y, z)$ , atunci se obține o integrală a mișcării

$$\frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, z) = \frac{1}{2} m v_0^2 - U(x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

care dă valoarea lui  $v^2$  în fiecare punct al traectoriei.

4. **Presiunea pe suprafață.** Să considerăm sistemul de trei axe dreptunghiulare format de tangenta  $MT$  la traectorie, de normala  $MN$  a suprafeței și de dreapta  $MS$  perpendiculară pe planul  $TMN$ .

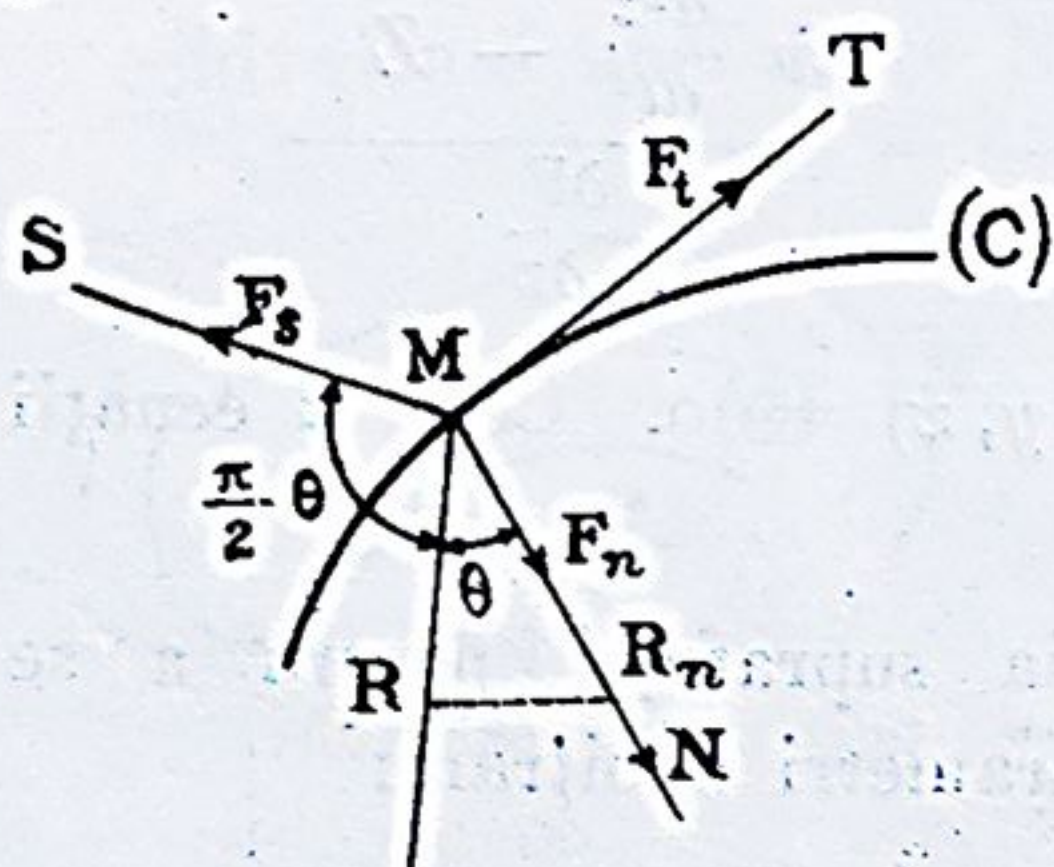


Fig. 40

Fie  $F_t, F_n, F_s$ , componentele forței  $F$  pe cele trei axe și  $N$  acțiunea suprafeței asupra punctului mobil, îndreptată după cum s'a spus pe  $MN$ .

Normala principală a curbei este situată în planul  $NMS$ . Fie  $\theta$  unghiul pe care îl face ea cu  $MN$ . Accelerația totală  $w$  a mobilului având ca proiecții:

$\frac{dv}{dt}$  pe  $MT$ ,  $\frac{v^2}{R} \cos \theta$  pe  $MN$  și  $\frac{v^2}{R} \sin \theta$  pe  $MS$ , rezultă, înmulțind cu  $m$  și egalând cu proiecțiile respective ale rezultantei celor două forțe  $F$  și  $N$ ,

$$(2) \quad m \frac{dv}{dt} = F_t, \quad m \frac{v^2}{R} \cos \theta = N + F_n, \quad m \frac{v^2}{R} \sin \theta = F_s.$$

Ecuatia a doua ne dă pe  $N$ . Presiunea  $P$ , egală și direct



opusă lui  $N$ , va avea prin urmare ca valoare

$$P = -N = F_n - m \frac{v^2}{R} \cos \theta.$$

Forța  $-m \frac{v^2}{R}$ , îndreptată pe normala principală a curbei și spre exterior, este zisă *forța centrifugă*. *Presiunea pe suprafață este deci egală cu suma proiecțiilor pe normala la suprafață a forței centrifuge și a forței direct aplicate.*

$F_n$  este *presiunea statică*. Prezența forței centrifuge este ceea ce deosebește presiunea statică de *presiunea dinamică*.

Observând că  $R = R_n \cos \theta$  (teorema *Meusnier*)  $R_n$  fiind raza de curbură a secțiunii normale a suprafeței (plan TMN) ecuația a doua se mai poate scrie

$$m \frac{v^2}{R_n} = N + F_n.$$

Dacă există o funcție de forță  $U$ , avem  $v^2 = \frac{2}{m} (U + h)$ ,  $h$  fiind o constantă, așa că dacă se cunoaște  $R_n$  și  $F_n$  se poate calcula  $N$  și deci  $P$ .

**5. Caz particular.** Dacă punctul se mișcă numai în virtutea unei viteze inițiale, adică dacă presupunem  $F = 0$ , atunci  $F_t$ ,  $F_s$  și  $F_n$  sunt nuli și cele 3 ecuații (2) ne dau

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad \sin \theta = 0, \quad m \frac{v^2}{R} = N \quad \text{iar } R = R_n$$

deci: 1<sup>o</sup>) mișcarea este uniformă; 2<sup>o</sup>) normala principală a curbei este normală suprafeței, deci planul osculator al curbei este normal suprafeței și curba este o linie geodezică; 3<sup>o</sup>) presiunea devine egală cu forța centrifugă.

*Notă.* Dacă punctul nu este legat suprafeței și se mișcă pe una din fețele ei, este necesar, pentru ca punctul să rămână pe suprafață ca forța  $N$  să fie îndreptată spre regiunea unde punctul poate părăsi suprafața. Când  $N$  devine nul, punctul părăsește suprafața și mișcarea devine liberă.

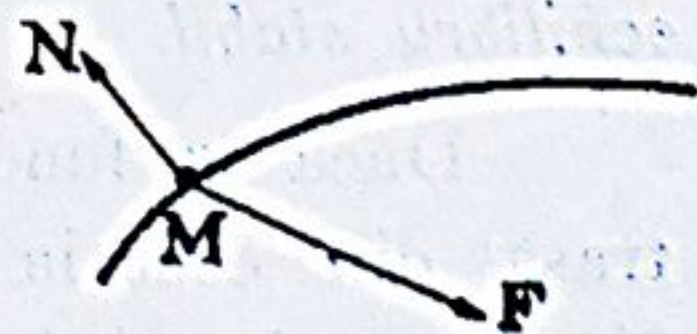


Fig. 41



## II. ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAȚĂ.

a). Condiția de echilibru este ca forța  $F$  să fie normală

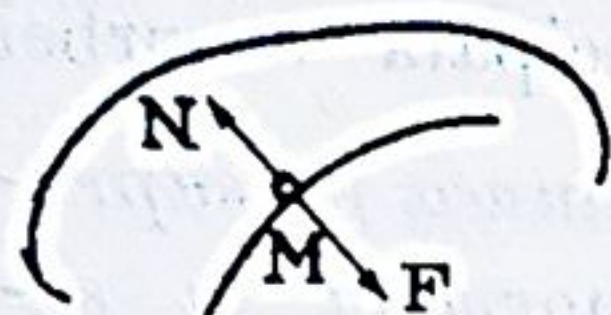


Fig. 42

suprafeței, căci atunci rezultanta totală, adică rezultanta forțelor  $F$  și  $N$  este nulă, dacă presupunem punctul lipsit de viteză. În consecință, însemnând prin  $X, Y, Z$  componentele forței  $F$  condiția de echilibru se exprimă

prin ecuațiile,

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{cu } F(x, y, z) = 0.$$

Dacă  $X, Y, Z$  sunt funcțiuni numai de  $x, y, z$ , acest sistem de trei ecuații ne dă valorile  $x, y, z$  ale pozițiilor de echilibru. În cazul când rezistența suprafeței este unilaterală, trebuie să mai exprimăm că forța  $F$  este îndreptată spre regiunea unde punctul nu poate pătrunde, sau că această forță e nulă.

b). Dacă forțele direct aplicate admit o funcție de forțe  $U(x, y, z)$  condițiile de echilibru devin

$$1) \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{cu } F(x, y, z) = 0.$$

Cele două dintâi ecuații exprimă că în orice poziție de echilibru, normala la suprafață este normală și suprafeței de nivel sau, cu alte cuvinte, că suprafața de nivel este tangentă suprafeței  $F(x, y, z) = 0$ . Ducând suprafețele de nivel tangente suprafeței date, punctele de contact vor fi chiar pozițiile de echilibru.

**Teoremă.** Ori ce punct al suprafeței  $F(x, y, z) = 0$  unde funcția de forțe  $U(x, y, z)$  este maximă, constituie o poziție de echilibru stabil.

Dacă în funcția  $U(x, y, z)$  înlocuim pe  $z$  prin valoarea trasă din ecuația  $F(x, y, z) = 0$ ,  $U$  devine o funcție de  $x$  și  $y$ . Maximul și minimul lui  $U$  sunt date, după cum se știe din Algebră, de cele două ecuații



$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

între care se elimină  $dz$  și se egalează apoi cu zero coeficienții lui  $dx$  și  $dy$ . Ori, asemenea operație ne conduce la sistemul de ecuații (1). Așa dar punctele suprafeței  $F(x, y, z) = 0$  unde funcția  $U(x, y, z)$  este maximă sau minimă, corespund pozițiilor de echilibru.

Rămâne să demonstrăm că punctele unde funcția  $U(x, y, z)$  este maximă corespund echilibrului stabil. Demonstrația, bazată pe aplicațiunea teoremei forțelor vii, este la fel cu aceea pe care am dat-o pentru punctul material liber căci, și în cazul de față, travaliul nu depinde decât de forțele direct aplicate și prin urmare numai de variația funcției  $U$ .

*Exemplu.* Un punct material obligat de a rămâne pe o suprafață, este supus numai acțiunii gravitației.

Luând axul  $Oz$  vertical și îndreptat spre zenit, avem  $U = -mgz + c$ , deci pozițiile de echilibru se obțin ducând planuri tangente orizontale suprafeței date, aceste planuri orizontale fiind suprafețe de nivel. În punctele de contact unde  $z$  este minim, funcția  $U$  este maximă și echilibrul este stabil.

### III. MIȘCAREA UNUI PUNCT PE O CURBĂ.

1. **Ecuațiile mișcării.** În caz când nu există frecare, acțiunea  $N$  a curbei asupra punctului este o forță normală, adică conținută în planul perpendicular tangentei  $MT$  în punctul  $M$ . Rezultanta forțelor direct aplicate  $F$  și acțiunea  $N$  trebuie să ne dea prin compunere o forță situată în planul osculator și având ca valoare  $mw$ ,  $w$  fiind accelerația mobilului. Mișcarea punctului poate fi considerată ca liberă sub acțiunea forțelor  $F$  și  $N$ , rezultanta lor fiind forța motrice.

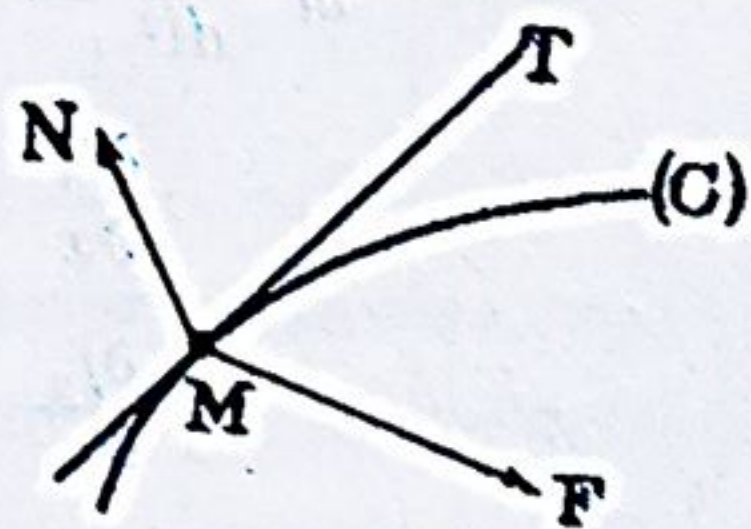


Fig. 43

Insemnând prin  $X, Y, Z$  proiecțiile forței  $F$  și prin  $a, b, c$  cosinusurile directoare ale acțiunii  $N$ , ecuațiile mișcării în raport



cu un sistem de axe dreptunghiulare vor fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + a N$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + b N$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + c N$$

cu  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  și  $a dx + b dy + c dz = 0$  care exprimă că forța  $N$  este perpendiculară tangentei  $MT$ .

La acest sistem de ecuații se adaugă ecuațiile curbei, fie sub forma

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

fie exprimând pe  $x, y, z$  în funcție de un parametru variabil

$$x = \varphi_1(\alpha), \quad y = \varphi_2(\alpha), \quad z = \varphi_3(\alpha).$$

**Cazul I.** Cele 7 ecuații ne dau valorile  $x, y, z; a, b, c$  și  $N$  în funcție de  $t$ . Pentru a elimina pe  $a, b, c$  și  $N$ , vom scrie

$$a N dx + b N dy + c N dz = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz = 0.$$

Inlocuind pe  $a N, b N, c N$  prin  $m \frac{d^2x}{dt^2} - X, m \frac{d^2y}{dt^2} - Y, m \frac{d^2z}{dt^2} - Z$  și eliminând pe  $dx, dy, dz$ , obținem

$$\begin{vmatrix} m \frac{d^2x}{dt^2} - X & m \frac{d^2y}{dt^2} - Y & m \frac{d^2z}{dt^2} - Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

ecuație care împreună cu  $f_1(x, y, z) = 0$  și  $f_2(x, y, z) = 0$  ne dă valorile coordonatelor  $x, y, z$  în funcție de  $t$  și de 2 constante arbitrare. Una din constante corespunde poziției inițiale, care fiind pe curbă pretinde pentru precizarea ei o singură condiție,



iar cealaltă constantă arbitrară corespunde vitezei inițiale, care fiind tangentă curbei se găsește precizată tot printr'o singură condiție.

*Cazul II.* Sistemul celor 8 ecuații ne dă pe  $x, y, z; a, b, c; N$  și  $\alpha$  în funcția de  $t$ .

Ecuția

$$adx + bdy + cdz = 0$$

se scrie

$$a \varphi_1'(\alpha) + b \varphi_2'(\alpha) + c \varphi_3'(\alpha) = 0.$$

Dacă pentru forțele direct aplicate există o funcție de forțe  $U$ , atunci, însemnând prin  $h$  o constantă arbitrară, avem, potrivit teoremei forțelor vii și ținând socoteală că în aplicația acestei teoreme forța  $N$  nu intervine, ea fiind perpendiculară direcției mișcării,

$$v^2 = \frac{2}{m} (U + h) \quad \text{deci } v^2 = \psi(\alpha)$$

adică

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \psi(\alpha)$$

și prin urmare

$$\left[ (\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + (\varphi_3')^2 \right] \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \psi(\alpha)$$

din care deducem pentru  $\frac{d\alpha}{dt}$  o valoare de forma  $\frac{d\alpha}{dt} = F(\alpha)$ , de unde

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{F(\alpha)}$$

Această ecuație ne dă pe  $t$  în funcție de  $\alpha$  și invers, pe  $\alpha$  în funcție de  $t$ . Ecuațiile curbei ne dau atunci pe  $x, y, z$  în funcție de  $t$ .

Procedeul se aplică și în cazul când forța depinde numai de poziția mobilului, adică atunci când

$$X = F_1(x, y, z), \quad Y = F_2(x, y, z), \quad Z = F_3(x, y, z).$$



Avem, în adevăr,

$$X = \theta_1(\alpha), \quad Y = \theta_2(\alpha), \quad Z = \theta_3(\alpha)$$

și traviuliul total

$$\mathcal{E} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} X dx + Y dx + Z dz$$

este tot o funcție de  $\alpha$ , așa că egalitatea

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{E} \quad \text{ne dă} \quad v^2 = \psi(\alpha).$$

Obținerea lui  $v^2$  depinde, după cum se vede, de o cuadratură, ceea ce nu se întâmplă dacă există o funcție de forțe.

**2. Presiune pe curbă.** Presiunea punctului pe curbă este o forță egală și direct opusă acțiunii  $N$  a curbei asupra punctului.

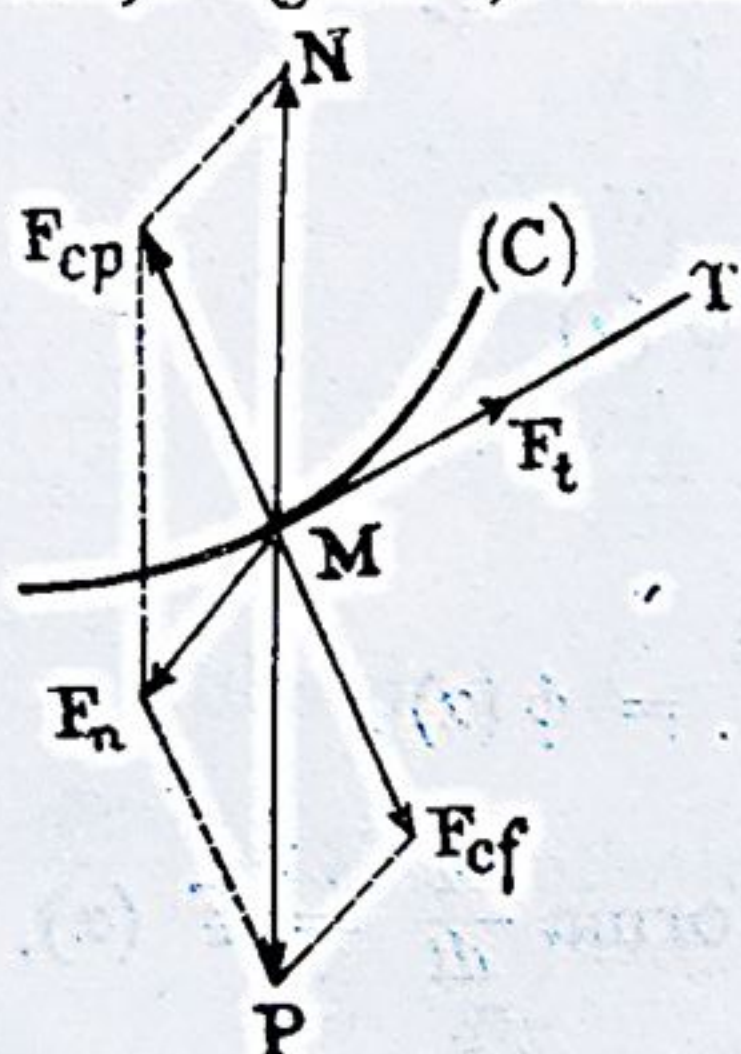


Fig. 44

Pentru a-i afla valoarea procedăm astfel: Descompunem forța direct aplicată  $F$  în componenta ei tangențială  $F_t = m \frac{dv}{dt}$  și în componenta ei din planul normal,  $F_n$ . Compunerea forței  $F_n$  cu forța  $N$  ne dă forța centripetă  $F_{cp} = m \frac{v^2}{R}$ . Vedem atunci că presiunea  $P$  este rezultanta forței centrifuge  $F_{cf} = -F_{cp}$  și a forței  $F_n$ . Așa dar: *Presiunea punctului asupra curbei este rezultanta forței centrifuge și a componentei din planul normal a forței direct aplicate.*

Dacă există o funcție de forțe, se cunoaște  $v^2$  și se poate calcula prin urmare imediat presiunea.

*Exemplu.* Punctul  $M$  descrie un cerc într'un plan vertical sub acțiunea greutății  $F$ ; el pornește din  $M_0$  cu viteză nulă.

Fie  $N$  acțiunea normală a curbei asupra punctului. Forța motrice este rezultanta  $R$  a celor două forțe  $F$  și  $N$ . Sub



efectul ei, punctul M descrie în mișcare liberă cercul dat.

Avem

$$U = mgz + \text{const.}$$

deci  $\frac{1}{2} mv^2 = mgz$  de unde

$$v^2 = 2gz.$$

Pe de altă parte, luând ca sens pozitiv direcția OM vedem că

$$F_n = mg \sin \theta, \text{ deci}$$

$$P = mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} = mg \sin \theta + m \frac{2gz}{l}.$$

Cum însă  $z = l \sin \theta$ , putem scrie

$$P = mg \sin \theta + 2mg \sin \theta \text{ adică, în definitiv: } P = 3mg \sin \theta.$$

Această formulă arată că în punctul C, unde presiunea statică este  $mg$ , presiunea dinamică este egală cu  $3mg$ . Rezultanta forțelor N și  $mg$ , în acest punct, este deci îndreptată dela C spre O și egală cu  $2mg$ .

Însfârșit, în punctul  $M_0$  viteza fiind nulă, forța centrifugă este și ea nulă și presiunea se reduce la componenta normală a greutateii. Aceasta fiind însă și ea nulă, conchidem că în punctul  $M_0$  nu există nici-o presiune.

#### IV. ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O CURBĂ.

Pozițiile de echilibru sunt acelea unde forța F este normală curbei, căci atunci rezultanta forțelor F și N este nulă, dacă presupunem punctul lipsit de viteză.

Condiția de echilibru este prin urmare

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

X, Y, Z fiind proiecțiile dreptunghiulare ale forței F.

a). Dacă curba este dată prin ecuațiile  $f_1(x, y, z) = 0$ ,  $f_2(x, y, z) = 0$ , diferențialele  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  satisfac celor două ecuații

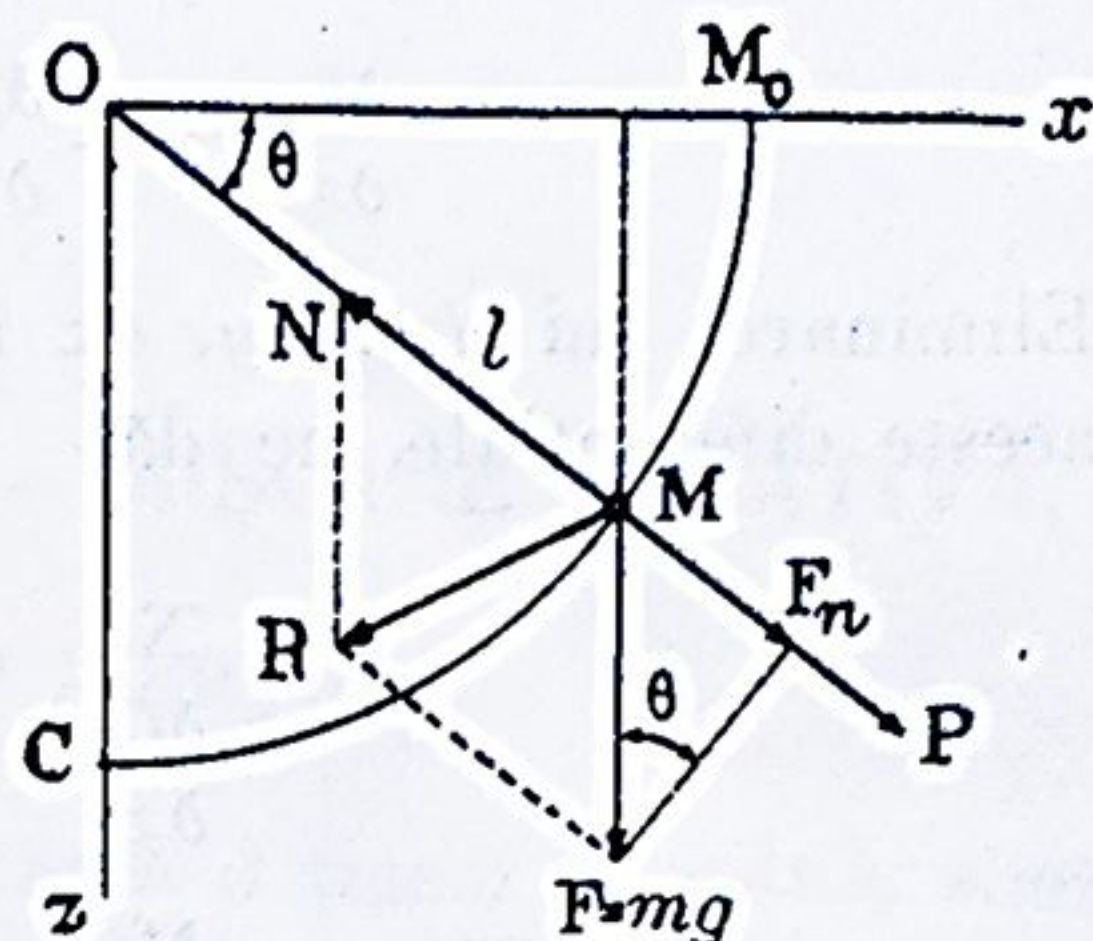


Fig. 45



$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz = 0.$$

Eliminarea lui  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  între cele trei ecuații care conțin aceste diferențiale, ne dă

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sunt funcțiuni date de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , această ecuație împreună cu cele 2 ale curbei, determină pozițiile de echilibru.

b). Dacă curba este dată prin ecuații de forma

$$x = \varphi_1(\alpha), \quad y = \varphi_2(\alpha), \quad z = \varphi_3(\alpha)$$

ecuația de echilibru se scrie

$$X \varphi_1'(\alpha) + Y \varphi_2'(\alpha) + Z \varphi_3'(\alpha) = 0$$

ecuație, care în caz când  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sunt funcții de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , este de forma  $\phi(\alpha) = 0$ . Rădăcinile acestei ecuații corespund pozițiilor de echilibru.

*Notă.* Când există o funcție de forțe pentru forțele direct aplicate, avem în cazul echilibrului pe o curbă aceleași teoreme ca în cazul echilibrului pe o suprafață.



## IV. FORȚĂ DE INERTIE. — MIȘCARE RELATIVĂ.

### I. FORȚĂ DE INERTIE.

Când învârtim o piatră pe care o ținem în mână, simțim foarte bine că piatra apasă asupra mâinii și această apăsare, potrivit principiului acțiunii și reacțiunii, este în tot momentul egală și direct opusă forței care prin mijlocirea mâinii îi dă pietrii mișcarea ei de rotație. Astfel, piatra se găsește supusă în fie ce moment unui anumit efort  $F$ , iar mâna la un efort  $F'$  egal și direct opus lui  $F$ . Acest efort  $F'$  se numește *forță de inerție*.

Cuvântul de forță de inerție a fost bine ales, căci reacțiunea care a primit acest nume este cu adevărat forța pe care un corp o exercită asupra noastră în virtutea inerției sale, când căutăm a-l scoate din starea de repaus sau când încercăm a-i modifica mărimea, direcția, ori sensul vitezei de care se găsește animat (pag. 10).

Fie, pentru a preciza mai bine această noțiune, A un punct material și B un alt punct care acționând asupra lui A îi dă acestuia o anumită mișcare. Dacă  $m$  este masa punctului A și  $w$  accelerația mișcării sale, forța care acționează punctul este  $F = mw$ . Forța de inerție a punctului A va fi o forță  $F'$ , egală tot cu  $mw$ , însă direct opusă forței  $F$  și aplicată în punctul B.

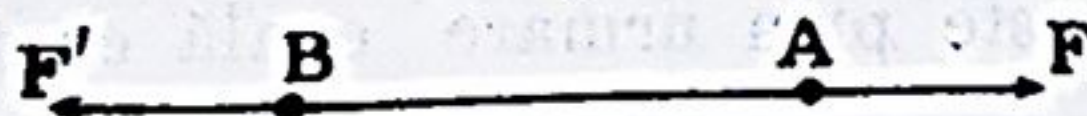


Fig. 46

Dacă  $x, y, z$  sunt cordonatele punctului A în raport de 3 axe dreptunghiulare, proiecțiile pe aceste axe ale forței sale de inerție vor fi



$$- m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2z}{dt^2}$$

iar proiecțiile acestei forțe pe tangentă și pe normala principală a traectoriei punctului, vor fi respectiv egale cu

$$- m \frac{dv}{dt} \quad \text{și} \quad - m \frac{v^2}{R}$$

cea dintâi fiind *forța de inerție tangențială*, iar cea de a doua *forța de inerție centrifugă*.

## II. MIȘCARE RELATIVĂ.

După cum știm de la teoria mișcărilor relative din Cînetica, avem

$$(w_a) = (w_r) + (w_e) + (w_c).$$

Inmulțind cu masa  $m$ , obținem

$$(mw_a) = (mw_r) + (mw_e) + (mw_c)$$

sau

$$(F_a) = (F_r) + (F_e) + (F_c).$$

Această egalitate exprimă că forța care dă punctului mișcarea sa reală, este rezultanta forței care îi dă mișcarea relativă<sup>1)</sup>, a forței care îi dă mișcarea de antrenare<sup>2)</sup> și a forței care îi dă mișcarea complimentară.

Deducem

$$(1) \quad (F_r) = (F_a) + (-F_e) + (-F_c).$$

Forța  $-F_e$  este egală și direct opusă forței  $F_e$  pe care o imprimă sistemul de axe mobile punctului  $M$  în mișcarea sa de antrenare. Ea este prin urmare egală cu forța de inerție a

<sup>1)</sup> Adică mișcarea așa cum este ea văzută de un observator antrenat cu axele mobile și care raportează mișcarea punctului la acele axe considerându-le ca fixe.

<sup>2)</sup> Adică mișcarea ce dobândește punctul când îl presupunem invariabil legat axelor mobile.



lui M din această mișcare și a primit numele de *forță de inerție de antrenare*. Cealaltă —  $F_c$ , egală și direct opusă forței  $F_c$ , a fost denumită de *Coriolis: forță centrifugă compusă*, deși nu se vede destul de bine pentru ce a fost denumită astfel; totuși numele a rămas.

Formula (1) corespunde teoremei următoare:

*Mișcarea relativă a unui punct poate fi tratată ca o mișcare absolută față de axele mobile de referență, dacă se adaugă forței  $F_a$  care lucrează realmente asupra punctului, forța de inerție de antrenare —  $F_e$  și forța centrifugă compusă —  $F_c$  (Coriolis).*

Cum pentru observatorul din sistemul fix, singura forță care lucrează asupra punctului este forța  $F_a$ , celorlalte două —  $F_e$  și —  $F_c$  li se zice *forțe aparente*. Pentru observatorul însă antrenat cu axele mobile, aceste forțe par efective, ca componente alături de  $F_a$  ale forței  $F$ , care produce mișcarea relativă.

Forța centrifugă compusă se anulează bine înțeles în aceleași cazuri când se anulează accelerația complimentară  $w_c = 2 \cdot \omega \cdot v_r \sin \alpha$ . Aceste cazuri sunt următoarele trei<sup>1)</sup>:

1)  $\omega = 0$ ; mișcarea de antrenare a sistemului mobil este o translație;

2)  $v_r = 0$ ; punctul mobil este în repaus relativ;

3)  $\alpha = 0$ ; axul instantaneu de rotație, al mișcării de antrenare, este paralel cu viteza relativă a punctului mobil. Exemplu: un punct căzând spre pământ și obligat de a rămâne pe suprafața unei uși care se învâртеște în jurul unei verticale din planul ei (linia balamalelor).

**1. Ecuațiile mișcării relative.** Dacă  $Oxyz$  este un sistem de axe mobil și însemnăm, în raport cu acest sistem, prin  $X, Y, Z$  componentele forței din mișcarea relativă a punctului,

$X_a, Y_a, Z_a$	"	"	"	absolută	"
$X_e, Y_e, Z_e$	"	"	"	de antrenare	"
$X_c, Y_c, Z_c$	"	"	"	complimentară	"

avem

<sup>1)</sup> Cinematica, pag. 178.



$$X_r = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y_r = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z_r = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

și în consecință, potrivit egalității (1):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X_a - X_e - X_c$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y_a - Y_e - Y_c$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z_a - Z_e - Z_c.$$

Aceste 3 ecuații sunt ecuațiile mișcării relative. Valoarea fiecărei forțe se determină căutând pe aceea a accelerației din mișcarea ce-i corespunde și înmulțind-o cu masa  $m$ .

**2. Echilibru relativ.** Viteza relativă fiind neconținut nulă, avem  $F_r = 0$  și  $F_c = 0$ , prin urmare

$$(F_a) + (-F_e) = 0$$

adică

$$X_a - X_e = 0, \quad Y_a - Y_e = 0, \quad Z_a - Z_e = 0.$$

**Exemplu.** Să presupunem că un punct  $M$  este în echilibru relativ față de planul  $OMZ$  care se învârtă în jurul axului  $OZ$ , cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . Forța  $F_e$  este  $m\omega^2 r$  și avem  $F_a = F_e$ . Punctul se găsește în echilibru relativ sub acțiunea forței  $F_a$  și a forței de inerție de antrenare  $-F_e$ .

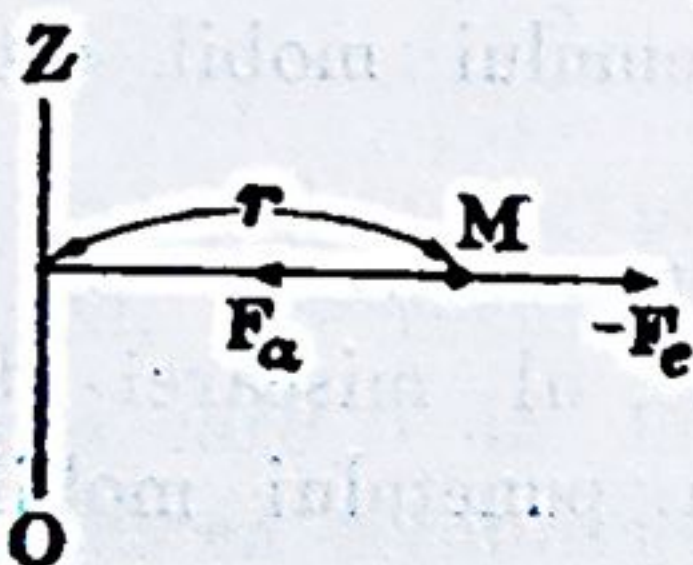


Fig. 47

**Notă.** Când se aplică mișcării relative teorema forțelor vii, să se observe că *forța centrifugă compusă nu intervine*, căci traviul acestei forțe este nul, ea fiind perpendiculară vitezei relative și deci direcției mișcării.



## V. EXEMPLE DE MIȘCĂRI. PUNCT LIBER.

### I. MIȘCARE RECTILINĂ.

Ecuatie generală:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X = F(t, x, \left(\frac{dx}{dt}\right)).$$

1. **Forță constantă.** *Mișcarea verticală a unui punct greu în vid.* Vom presupune că în momentul inițial, adică pentru  $t = 0$ , avem  $x_0 = 0$  și  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$ , mișcarea fiind ascendentă.

Axul fiind îndreptat în sus, ecuația mișcării

va fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \quad \text{căci } X = -mg.$$

Obținem succesiv, prin integrațiuni,

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = -gt, \quad \text{sau } \frac{dx}{dt} = v_0 - gt$$

apoi:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Fig 48.

deci mișcarea este uniform variată.

Punctul se sue până când viteza lui devine nulă:

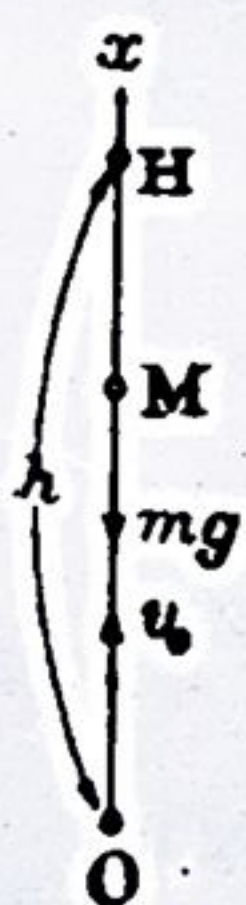
$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt = 0, \quad \text{de unde } t = \frac{v_0}{g}$$

valoare pentru care

$$x = h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Invers:

Pentru ca punctul să atingă înălțimea  $h$  trebuie să luăm  $\frac{v_0^2}{2g} = h$ , adică să asvârlim punctul cu o viteză  $v_0$  egală cu  $\sqrt{2gh}$ .





Din H punctul va coborî pe aceeași verticală. Funcția de forțe fiind  $U = -mgx + \text{const.}$ , aplicația teoremei forțelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -mgx$$

adică

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

egalitate care arată că la aceeași valoare a lui  $x$ , corespunde aceeași valoare absolută pentru  $v$ , fie că punctul se ridică fie că se coboară.

Așa dar mișcarea de coborîre este reproducerea mișcării de suire.

Egalitatea  $v^2 = v_0^2 - 2gx$  rezultă de altfel și din eliminarea lui  $t$  între cele două ecuații de mai sus:

$$v = v_0 - gt \quad \text{și} \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

În cazul *mișcării descendente*, fără viteză inițială, luând pe  $Ox$  îndreptat în jos, ecuația mișcării va fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

de unde, prin integrațiuni,

$$v = gt \quad \text{și} \quad x = \frac{1}{2} gt^2 \quad \text{sau} \quad x = \frac{v^2}{2g}.$$

## 2. Forță funcție de timp: $X = F(t)$ .

Avem succesiv

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(t);$$

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt = \psi(t);$$

$$x - x_0 = \int_0^t \psi(t) dt \quad \text{adică} \quad x = x_0 + \int_0^t \psi(t) dt.$$

## 3. Forță funcție de poziția mobilului: $X = F(x)$ .



Ecuatia mișcării fiind

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad \text{sau} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt = F(x) dx$$

adică

$$d \cdot \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = F(x) dx ;$$

deducem

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

care este integrala forțelor vii, funcția de forțe fiind

$$U = \int F(x) dx + \text{const.}$$

Astfel

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx$$

deci

$$v = \frac{dx}{dt} = \phi(x)$$

și prin urmare

$$dt = \frac{dx}{\phi(x)} ; \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\phi(x)} = \varphi(x) ; \quad x = f(t).$$

*Exemplu. Atracție proporțională cu distanța mobilului la un centru fix.*

Fie O centrul fix. Se dă  $X = -kx$ ,  $k$  fiind pozitiv. Condiții inițiale:  $t = 0$ ,  $x = x_0$  (punct  $M_0$ ),  $v = v_0$ .

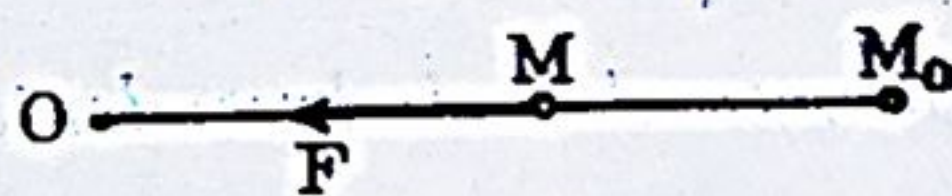


Fig. 49

Ecuatia mișcării este

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

punând

$$\frac{k}{m} = \omega^2.$$



Regăsim o ecuație care ne este cunoscută din Cinematică dela studiul mișcării vibratoare simple. Știm că integrarea ei ne dă  $x = a \cos(\omega t + \alpha)$ ;  $a$  și  $\alpha$  fiind constante arbitrare. Putem scrie  $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . Exprimând că pentru  $t = 0$  avem  $x = x_0$  și  $v = v_0$ , obținem:

$$x_0 = A \quad \text{și} \quad v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = B\omega \quad \text{de unde} \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Deci soluția generală, cu condițiile inițiale în evidență, este

$$(1) \quad x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Aplicațiunea teoremei forțelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = U - U_0$$

unde

$$U = - \int kx \, dx = -k \frac{x^2}{2} = \text{const.}$$

deci

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -k \frac{x^2}{2} + k \frac{x_0^2}{2}$$

sau

$$v^2 + \frac{k}{m} x^2 = v_0^2 + \frac{k}{m} x_0^2.$$

În definitiv, mișcarea este vibratoare simplă, durata unei oscilațiuni complete (dus și întors) fiind

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Această durată este deci independentă de condițiile inițiale ale mișcării.

Pe de altă parte, dacă  $v_0 = 0$  avem potrivit ecuației generale (1)

$$x = x_0 \cos \omega t$$

și, plecând dela  $t=0$ , vedem că cea mai mică valoare a lui  $t$  pentru care  $x$  devine nul este  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ , adică  $t = \frac{T}{4}$ , valoare



independentă de poziția inițială. Așa dar, oricare ar fi poziția inițială  $M_0$ , dacă punctul pleacă din această poziție fără viteză inițială, el va pune totdeauna același timp ca să ajungă în  $O$ . Se zice pentru aceasta că mișcarea este *tautocronă*.

#### 4. Forță funcție de viteză: $X = F(v)$ .

Avem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(v) \quad \text{sau} \quad m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

deci

$$dt = m \frac{dv}{F(v)}, \quad t = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}$$

adică

$$t = \psi(v) \quad \text{de unde} \quad v = \varphi(t)$$

și prin urmare

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t) \quad \text{și} \quad x = x_0 + \int_0^t \varphi(t) dt.$$

Dacă voim direct pe  $x$  în funcție de  $v$  procedăm astfel:

$$dx = v dt = v \cdot m \frac{dv}{F(v)}$$

deci

$$x = x_0 + m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)} = f(v).$$

**Exemplu.** Căderea verticală a unui punct greu într'un mediu rezistent.

Presupunem rezistența proporțională cu patratul vitezei, punând

$$R = mg \frac{v^2}{k^2}.$$

Condiții inițiale:  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Avem,

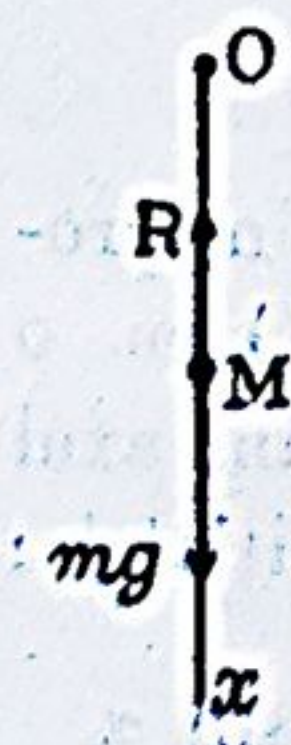
succesiv,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - mg \frac{v^2}{k^2};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2} (k^2 - v^2)$$

$$(1) \quad dt = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2}; \quad t = \frac{k}{2g} \text{Log} \left( \frac{k+v}{k-v} \right) \text{ c\acron{u}i } v_0 = 0.$$

Fig. 50





Deducem:

$$\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2g}{k}t}, \quad v = k \frac{e^{\frac{2g}{k}t} - 1}{e^{\frac{2g}{k}t} + 1}$$

sau

$$(2) \quad v = \frac{dx}{dt} = k \frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}$$

Mai integrând odată, se obține

$$(3) \quad x = \frac{k^2}{g} \operatorname{Log} \left( \frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2} \right).$$

Formulele (2) și (3) dau pe  $v$  și pe  $x$  în funcție de  $t$ . Putem găsi direct o relație între  $v$  și  $x$ :

$$dx = v dt = v \cdot \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2} = - \frac{k^2}{2g} \cdot \frac{(-2v) dv}{k^2 - v^2}$$

și, prin integrațiune,

$$(4) \quad x = - \frac{k^2}{2g} \left[ \operatorname{Log}(k^2 - v^2) - \operatorname{Log} k^2 \right] = \frac{k^2}{2g} \operatorname{Log} \frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

Formulele (2), (3) și (4) dau soluția completă a problemei. Formula (2) arată că viteza  $v$  tinde către  $k$  când  $t$  crește neconținut. Deci mișcarea tinde a deveni uniformă.

Constanta  $k$  reprezintă de altfel viteza pentru care  $R$  devine egal cu  $mg$ .

## II. MIȘCAREA ÎN PLAN.

1. **Forță constantă.** *Mișcarea proiectilelor în vid.* Un proiectil, asimilat unui punct material, este asvârlit din  $O$  cu o viteză  $v_0$  înclinată de unghiul  $\alpha$  pe orizontala  $Ox$ . Să luăm axul  $Oy$  vertical și îndreptat în sus. Avem drept condiții inițiale:

$$t=0; \quad x_0=0, \quad y_0=0; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \alpha.$$



Cum singura forță aplicată este greutatea  $mg$ , ecuațiile mișcării vor fi:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ ,  $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$ .

*Traectoria.*  
Din ecuațiile mișcării, simplificate cu factorul  $m$ , deducem succesiv prin integrațiune:

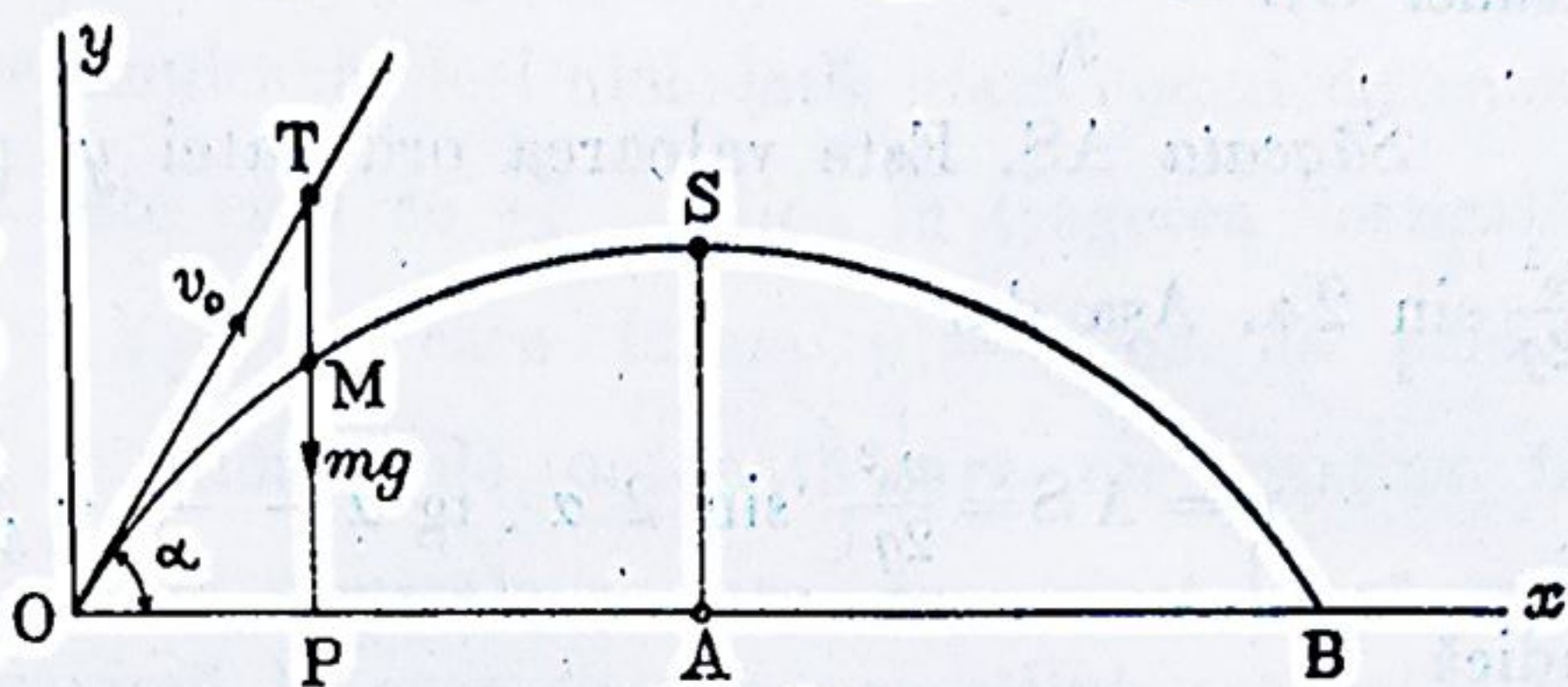


Fig. 51

$$\frac{dx}{dt} - v_0 \cos \alpha = 0, \quad \frac{dy}{dt} - v_0 \sin \alpha = -gt$$

apoi

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Ecuațiile acestea două se puteau scrie și imediat, observând că fără intervenția gravitației, proiectilul ar fi parcurs indefinit tangenta MT cu o mișcare uniformă de viteză  $v_0$ ; efectul gravitației este prin urmare acela de a coborî neîncetat proiectilul de o cantitate egală cu deviațiunea  $\frac{1}{2} g (\Delta t)^2$  în timpul  $\Delta t$ , și prin urmare de cantitatea  $\frac{1}{2} gt^2$  în timpul  $t$ . Deci

$$x = OT \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha \quad \text{și} \quad y = TP - TM = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Eliminarea lui  $t$  între  $x$  și  $y$  ne dă

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

ecuație care reprezintă o parabolă cu axul vertical.

*Bătaia OB.* Se obține făcând  $y = 0$  în ecuația traectoriei; deci,

$$x' = 0 \quad \text{și} \quad x'' = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

adică

$$x'' = OB = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$



Bătaia este maximă pentru  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ , adică  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;  
atunci  $OB = \frac{v_0^2}{g}$ .

Săgeata AS. Este valoarea ordonatei  $y$  pentru  $x = \frac{OB}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$ . Aşa dar

$$y = AS = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

adică

$$AS = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Săgeata este maximă pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  când  $AS = \frac{v_0^2}{2g}$  adică egal cu jumătatea bătaii maxime.

*Valoarea vitezei într'un punct al traectoriei.* Avem

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2$$

sau

$$v^2 = v_0^2 - 2g(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)$$

deci

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Această ecuație se putea obține încă și mai direct prin aplicațiunea teoremei forțelor vii, care ne dă în adevăr imediat

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgy$$

adică

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Viteza are, după cum se vede, aceiași valoare în punctele traectoriei care au aceiași ordonată  $y$ . Ea are prin urmare în punctul de cădere B aceiași valoare ca în origina O. Cu începere din O, viteza descrește necontenit până în vârful S al traectoriei când  $y$  are cea mai mare valoare. De altfel, viteza în punctul S fiind orizontală, este dată imediat de ecuația



$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

care exprimă că proiecția orizontală a oricărei dintre viteze este constantă și egală cu  $v_0 \cos \alpha$ .

Viteza nu se anulează deci niciodată, afară numai de cazul particular când  $\alpha$  este egal cu  $\frac{\pi}{2}$ , adică în tragerea verticală. Ecuația  $v^2 = v_0^2 - 2gy$  în care facem  $v = 0$  ne dă pentru acest caz  $y = \frac{v_0^2}{2g}$ , valoare de ordonată care nu aparține în adevăr decât traiectoriei verticale și care reprezintă, după cum știm, înălțimea maximă la care se suie proiectilul aruncat vertical în sus.

*Atingerea unui punct.* Se cere unghiul  $\alpha$  sub care trebuie asvârlit proiectilul, cu o viteză dată  $v_0$ , pentru ca traiectoria sa să treacă printr'un punct  $M'$  de coordonate  $x', y'$ .

Valoarea lui  $\alpha$  rezultă bineînțeles din ecuația

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x'^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

sau

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x'^2}{v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Deducem:

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx'} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2v_0^2 y'}{gx'^2} + 1 = 0.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie să avem

$$\left(\frac{v_0^2}{gx'}\right)^2 - \left(\frac{2v_0^2 y'}{gx'^2} + 1\right) > 0$$

de unde

$$y' < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx'^2}{2v_0^2}.$$

Să considerăm curba

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Aceasta este înfășurătoarea curbei (1) când variem pe  $\alpha$ .<sup>1</sup>)

<sup>1</sup> Înfășurătoarea unei curbe  $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$  este  $B^2 - AC = 0$ .



Ea este o parabolă, cu vârful în  $O$  la distanța  $OC = \frac{v_0^2}{2g}$ ,

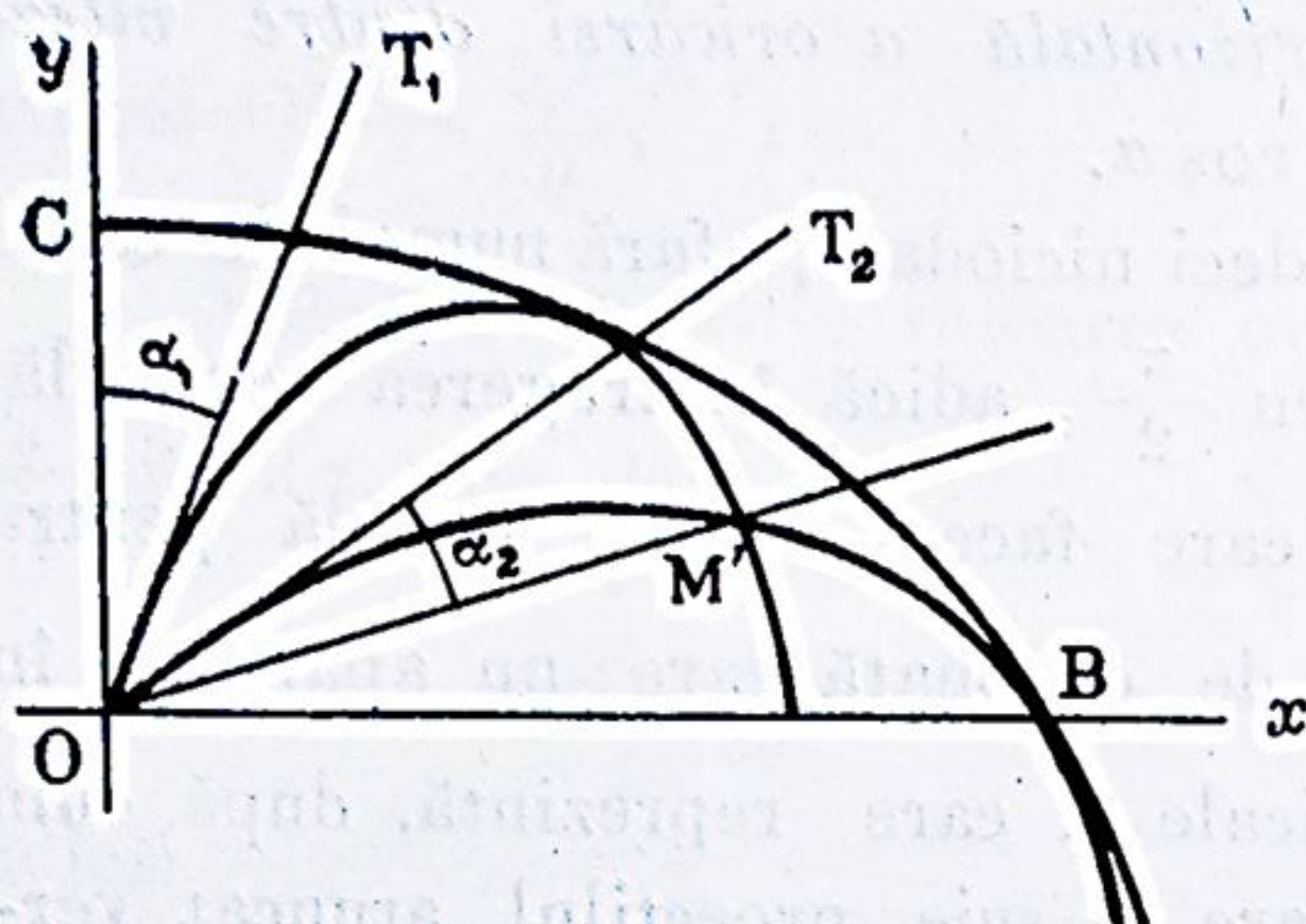


Fig. 52

focarul fiind în  $O$ , iar parametrul egal cu  $OB = \frac{v_0^2}{g}$ .

Trebue ca  $M'$  să fie situat dedesubtul acestei curbe. Atunci sunt două traectorii care trec prin  $M'$ , corespunzând celor 2 valori  $\alpha$  date de ecuația (1). Dacă punctul este situat pe curba înfășurătoare, cele 2 valori  $\alpha$  se

confundă, fiind egale cu rădăcina dublă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx'}.$$

Parabola  $CB$  este zisă *parabolă de siguranță*. Se poate ușor demonstra geometriceste că cele două unghiuri  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  de pe figură sunt egale unul cu altul.

**2. Curba balistică.** Se numește astfel traectoria pe care o descrie în aer un proiectil, asimilat unui punct material de aceeași greutate ca proiectilul.

În mișcarea sa, punctul material întâmpină din partea aerului o rezistență  $R$  direct opusă vitezei sale și funcție de această viteză, pe care să o reprezentăm prin  $mcF(v)$ ,  $c$  fiind o constantă. Punctul fiind astfel supus acțiunii forțelor  $mg$  și  $mcF(v)$ , ecuațiile mișcării sale sunt

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mcF(v) \cos \tau$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mcF(v) \sin \tau - mg.$$

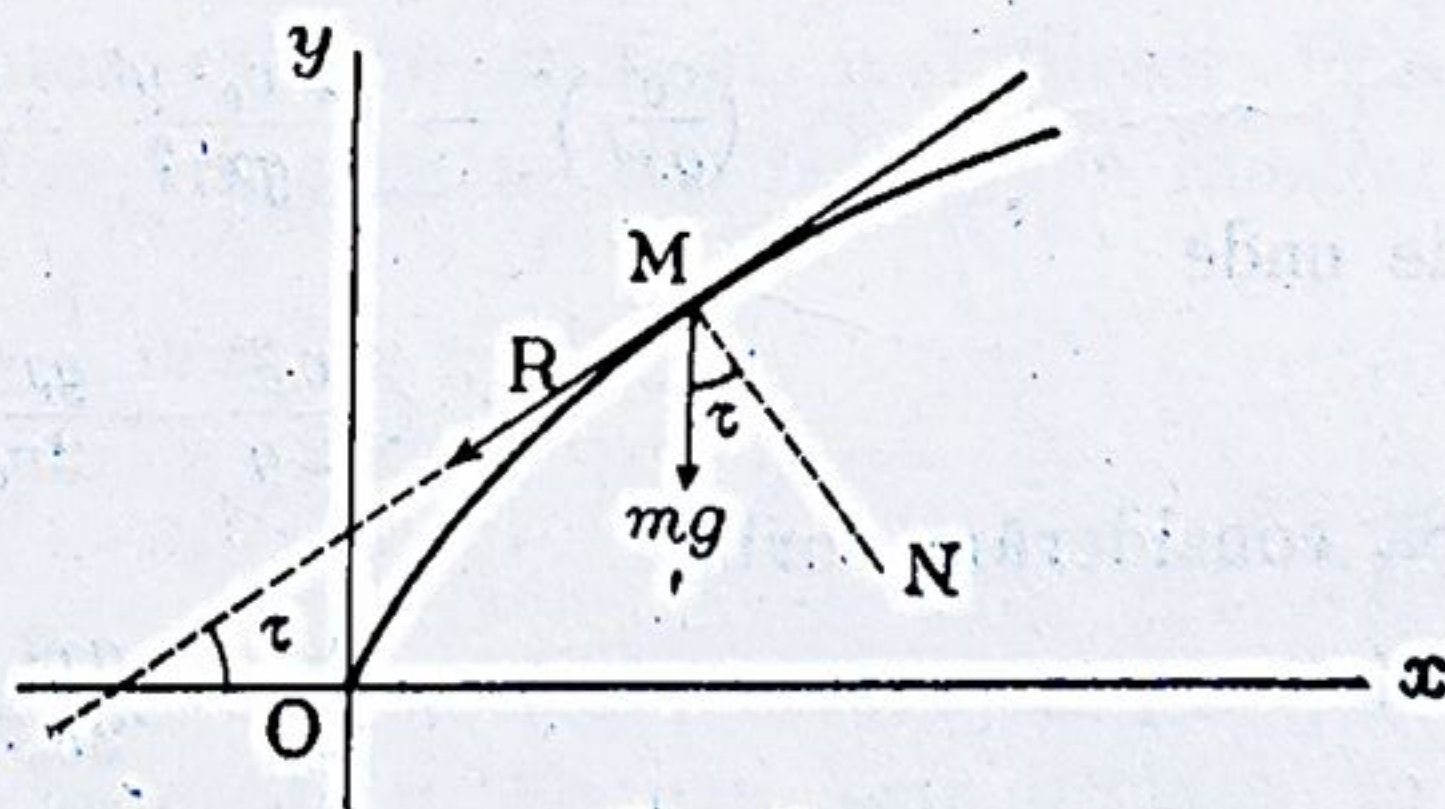


Fig. 53

Acest sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea



poate fi înlocuit prin următorul sistem de 4 ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \cos \tau, & \frac{dy}{dt} &= v \sin \tau \\ \frac{d(v \cos \tau)}{dt} &= -c F(v) \cos \tau \\ \frac{d(v \sin \tau)}{dt} &= -c F(v) \sin \tau - g\end{aligned}$$

care determină pe  $x$ ,  $y$ ,  $v$  și  $\tau$  în funcție de  $t$ , cu condițiile inițiale

$$x = 0, \quad y = 0; \quad v = v_0, \quad \tau = \tau_0.$$

Putem înlocui ecuația a patra prin următoarea, ce se găsește dacă înmulțim ecuația a patra cu  $\cos \tau$  și o scădem din ecuația a treia înmulțită cu  $\sin \tau$ :

$$(a) \quad v \frac{d\tau}{dt} = -g \cos \tau.$$

Această din urmă ecuație se poate dealtfel deduce direct din proiecția mișcării punctului material pe normala MN. Avem în adevăr, însemnând prin  $\rho$  raza de curbură în M,

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \tau$$

însă

$$\rho = - \frac{ds^1)}{d\tau} = - \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = -v \frac{dt}{d\tau}$$

și înlocuirea lui  $\rho$  prin  $-v \frac{dt}{d\tau}$  în egalitatea precedentă simplificată cu  $m$ , ne dă pe (a).

Să observăm în sfârșit, că împărțind ecuația a treia prin ecuația (a) obținem

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau.$$

Această din urmă ecuație nu conține decât variabilele  $v$  și  $\tau$ . Ea este ecuația diferențială a hodografului<sup>2)</sup> în coordonate

<sup>1)</sup> Se ia semnul minus înaintea membrului al doilea, deoarece  $s$  crește când  $\tau$  descrește, așa că derivata  $\frac{ds}{d\tau}$  este negativă.

<sup>2)</sup> Cinematica, pag. 62.



polare, de oarece  $v$  este raza vectorie a unui punct al hodografului și  $\tau$  unghiul lui  $v$  cu direcția fixă  $Ox$ .

În definitiv, vedem că soluția problemei de față depinde de integrarea următorului sistem de ecuații diferențiale:

$$(1) \quad dx = v \cos \tau \, dt$$

$$(2) \quad dy = v \sin \tau \, dt$$

$$(3) \quad d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) \, d\tau$$

$$(4) \quad v \, d\tau = -g \cos \tau \, dt.$$

Dacă putem integra ecuația (3) adică ecuația diferențială a hodografului, singura care nu conține decât două variabile  $v$  și  $\tau$ , atunci rezolvirea completă a problemei se reduce la simple cuadraturi. În adevăr, trăgând pe  $dt$  din ecuația (4) și înlocuindu-l apoi în (1) și (2) găsim

$$(5) \quad dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

$$(6) \quad dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$$

$$(7) \quad dy = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau \, d\tau$$

asa că dacă am avea integrala ecuației (3) adică ecuația hodografului în coordonate polare

$$v = \phi(\tau)$$

atunci înlocuind pe  $v$  în ecuațiile precedente prin  $\phi(\tau)$  am obține prin niște simple cuadraturi expresiile elementelor  $t$ ,  $x$  și  $y$  în funcție de  $\tau$ .

*Câteva particularități ale curbei balistice.* Presupunem că rezistența aerului  $R$  și deci  $F(v)$  este o funcție continuă, crescătoare, anulându-se și devenind infinită odată cu  $v$ .

1. *Viteza orizontală  $v \cos \tau$  descrește necontenit.* În adevăr cele două ecuații (3) și (6)

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) \, d\tau$$

$$dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$$



ne dau prin diviziune

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dx} = - \frac{c F(v)}{v}.$$

Membrul al doilea fiind totdeauna negativ, rezultă că  $v \cos \tau$  descrește necontenit când  $x$  crește. În vid, s'a văzut că  $v \cos \tau$  păstrează din potrivă o valoare constantă.

2. Fie  $M_1$  și  $M_2$  două puncte ale curbei balistice situate pe aceeași orizontală. Vitezele  $v_1$  și  $v_2$  din cele două puncte, înclinările  $\tau_1$  și  $\tau_2$  ale tangentelor pe orizontală și distanțele  $M_1 A$  și  $M_2 A$  ale punctelor la săgeata traectoriei nu sunt egale între ele ca în vid și avem

$$v_1 > v_2, \quad \tau_1 < \tau_2, \quad M_1 A > M_2 A.$$

a). Să aplicăm în adevăr

teorema forțelor vii între  $M_1$  și  $M_2$ . Cum traverșul greutății  $mg$  este nul, punctele  $M_1$  și  $M_2$  fiind la același nivel, avem, însemnând prin  $s_1$  și  $s_2$  lungimile de arc de la origina  $O$  a curbei balistice până la cele două puncte:

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = - \int_{s_1}^{s_2} R ds$$

Fig. 54

traverșul elementar al rezistenței  $R$  fiind negativ și egal cu  $- R ds$ .

Deci

$$v_2^2 - v_1^2 < 0$$

și prin urmare

$$v_1 > v_2.$$

b). Plecând dela ecuația (7)

$$dy = - \frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau \cdot d\tau$$

sau

$$\operatorname{tg} \tau \cdot d\tau = - \frac{g}{v^2} dy$$



să integrăm dela  $M_1$  la vârf, adică dela  $\tau_1$  la zero. Obținem

$$\text{Log cos } \tau_1 = - \int_{y_1}^{y_s} \frac{g}{v^2} dy$$

și în mod analog, integrând dela  $M_2$  la vârf,

$$\text{Log cos } \tau_2 = - \int_{y_s}^{y_1} \frac{g}{v^2} dy.$$

Ori, după cum am văzut mai sus, pentru 2 puncte situate pe aceeași orizontală, viteza în punctul de pe ramura urcătoare este mai mare decât viteza din punctul de pe ramura coborătoare, deci fiecare element  $\frac{g}{v^2} dy$  al integralei a doua este superior elementului corespunzător al integralei întâia, de unde rezultă, ținând seama de semne, că

$$\text{Log cos } \tau_1 > \text{Log cos } \tau_2 \quad \text{sau} \quad \cos \tau_1 > \cos \tau_2$$

și prin urmare

$$\tau_1 < \tau_2.$$

c). Să integrăm de asemenea între  $M_1$  și S și între  $M_2$  și S expresiunea

$$dx = dy \cotg \tau.$$

Avem, ținând seama că  $y_2 = y_1$ ,

$$M_1 A = \int_{y_1}^{y_s} \cotg \tau d\tau$$

și

$$AM_2 = \int_{y_s}^{y_1} \cotg \tau d\tau = - \int_{y_1}^{y_s} \cotg \tau d\tau.$$

Raționând ca la litera b) ajungem imediat la concluzia că

$$M_1 A > AM_2.$$

3. Viteza poate să treacă printr'un minimum dincolo de vârful traectoriei.

Din ecuația diferențială a hodografului

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau$$

deducem

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left[ \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right].$$



Pentru ca viteza să poată trece printr'un minimum, trebuie să avem

$$\frac{dv}{d\tau} = 0 \quad \text{deci} \quad \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) = 0$$

egalitate care nu poate fi satisfăcută decât pentru  $\tau < 0$ , adică dincolo de vârf.

4. *Traectoria are o asimptotă verticală la distanță finită.* Avem în adevăr

$$x = - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{v^2}{g} d\tau \quad \text{și} \quad y = - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau d\tau.$$

Ori, când  $\tau$  tinde către valoarea  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \tau$  tinde către infinit și prin urmare integrala a doua devine infinită la limită, pe câtă vreme prima integrală rămâne finită. Așa dar, când  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , curba admite o asimptotă verticală la distanță finită.

Toate aceste particularități ale curbei balistice dovedesc, că atât mișcarea pe această curbă cât și forma generală a curbei diferă cu totul de mișcarea în vid.

*Cazul când rezistența aerului este proporțională cu o putere a vitezei.*

Să presupunem că avem

$$R = mc F(v) = mc \frac{v^n}{k^n}$$

$k$  fiind o constantă. În acest caz, ecuația diferențială (3) a hodografului

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau$$

adică

$$\frac{d(v \cos \tau)}{v} = \frac{c}{g} \frac{v^n}{k^n} d\tau$$

devine integrabilă. În adevăr, devizând ambii membri ai ei prin  $v^n \cos^{n+1} \tau$ , obținem

$$\frac{d(v \cos \tau)}{(v \cos \tau)^{n+1}} = \frac{c}{g k^n} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}$$



și integrațiunea acestei ecuații între limitele  $\tau_0$  și  $\tau$ , ținând seama că pentru  $\tau = \tau_0$  avem  $v = v_0$ , ne dă

$$\frac{1}{(v \cos \tau)^n} - \frac{1}{(v_0 \cos \tau_0)^n} = - \frac{cn}{gk^n} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\cos^n + 1}.$$

Avem astfel o relație care ne permite să calculăm pe  $v$  în funcție de  $\tau$ , adică să determinăm ecuația hodografului

$$v = \psi(\tau).$$

După cum am mai spus, problema poate fi atunci complet rezolvită prin cuadraturi, căci ecuațiile (5), (6) și (7) ne dau

$$t = - \frac{1}{g} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{v d\tau}{\cos \tau}$$

$$x = - \frac{1}{g} \int_{\tau_0}^{\tau} v^2 d\tau$$

$$y = - \frac{1}{g} \int_{\tau_0}^{\tau} v^2 \operatorname{tg} \tau d\tau.$$

**3. Atracțiune invers proporțională cu patratul distanței mobilului la un centru fix, direcția vitezei inițiale fiind oarecare.**

Accelerația fiind centrală, știm că traectoria este o curbă

plană și că legea ariilor are loc în planul curbei, adică

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

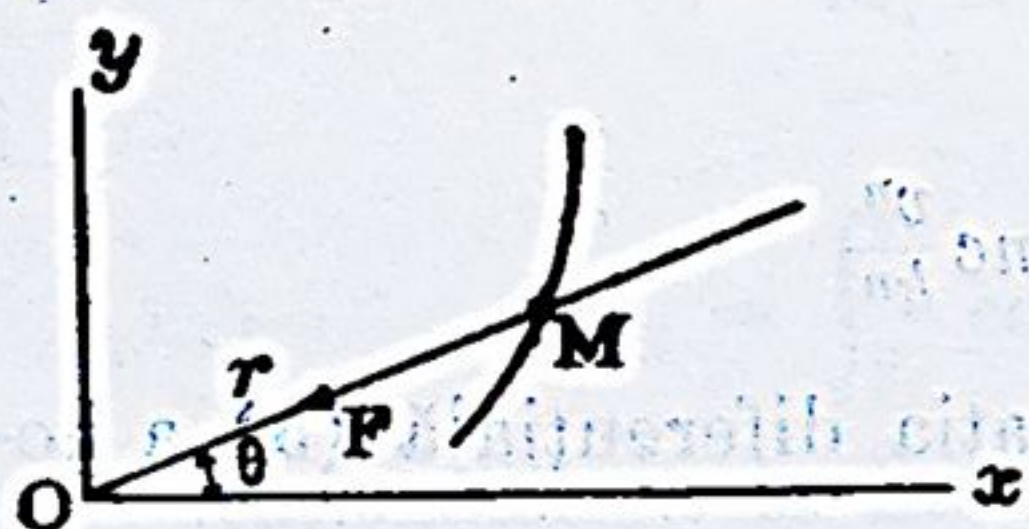


Fig. 55

Prin ipoteză  $F = - \frac{mk}{r^2}$

însemnând prin  $k$  o constantă pozitivă. Cum există o funcție de forțe

$$U = \int - \frac{mk}{r^2} dr = \frac{mk}{r} + \text{const.}$$

avem

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{mk}{r} - \frac{mk}{r_0}$$

adică

$$(1) \quad v^2 = \frac{2k}{r} + h \text{ însemnând prin } h \text{ o constantă.}$$



Ori, după cum s'a văzut în Cinematică la paragraful accelerațiilor centrale,

$$(2) \quad v^2 = c^2 \left[ \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d \theta} \right)^2 \right].$$

Egalând pe (1) cu (2) obținem

$$c^2 \left[ \frac{1}{r^2} + \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d \theta} \right)^2 \right] = 2 \frac{k}{r} + h$$

ecuație diferențială care ne dă pe  $r$  în funcție de  $\theta$ . Integrala ariilor  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$  în care vom înlocui spre ex. pe  $r$  în funcție de  $\theta$  ne va da pe  $\theta$  în funcție de  $t$ .

Este însă mai simplu de a proceda în felul următor:

a). *Determinarea traectoriei.* Aplicarea formulei lui Binet ne dă

$$F = - \frac{mk}{r^2} = - \frac{mc^2}{r^2} \left[ \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \theta^2} \right]$$

deci

$$\frac{k}{c^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \theta^2} \quad (1)$$

Putem scrie:

$$\frac{d^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} \right)}{d \theta^2} = - \left( \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} \right)$$

și comparativ cu ecuația cunoscută  $\frac{d^2 x}{dt^2} = - \omega^2 x$  în care  $\omega$  ar fi egal cu 1, obținem prin integrațiune

$$\frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2} e \cos (\theta - \alpha)$$

$e$  și  $\alpha$  fiind constante arbitrare. Deducem

$$(2) \quad \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} \left[ 1 + e \cos (\theta - \alpha) \right] \quad (3)$$



sau

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + e \cos (\theta - \alpha)}$$

deci traectoria este o secțiune conică având unul din focare în centrul fix.

În formula precedentă putem oricând presupune pe  $e > 0$  căci altfel nimic nu ne împiedică de a mări pe  $\alpha$  cu 180 de grade pentru a schimba semnul cosinusului. Unghiurile  $\theta$  și  $\alpha$  sunt cele arătate de figură;  $e$  este excentricitatea iar  $\frac{c^2}{k}$  parametrul.

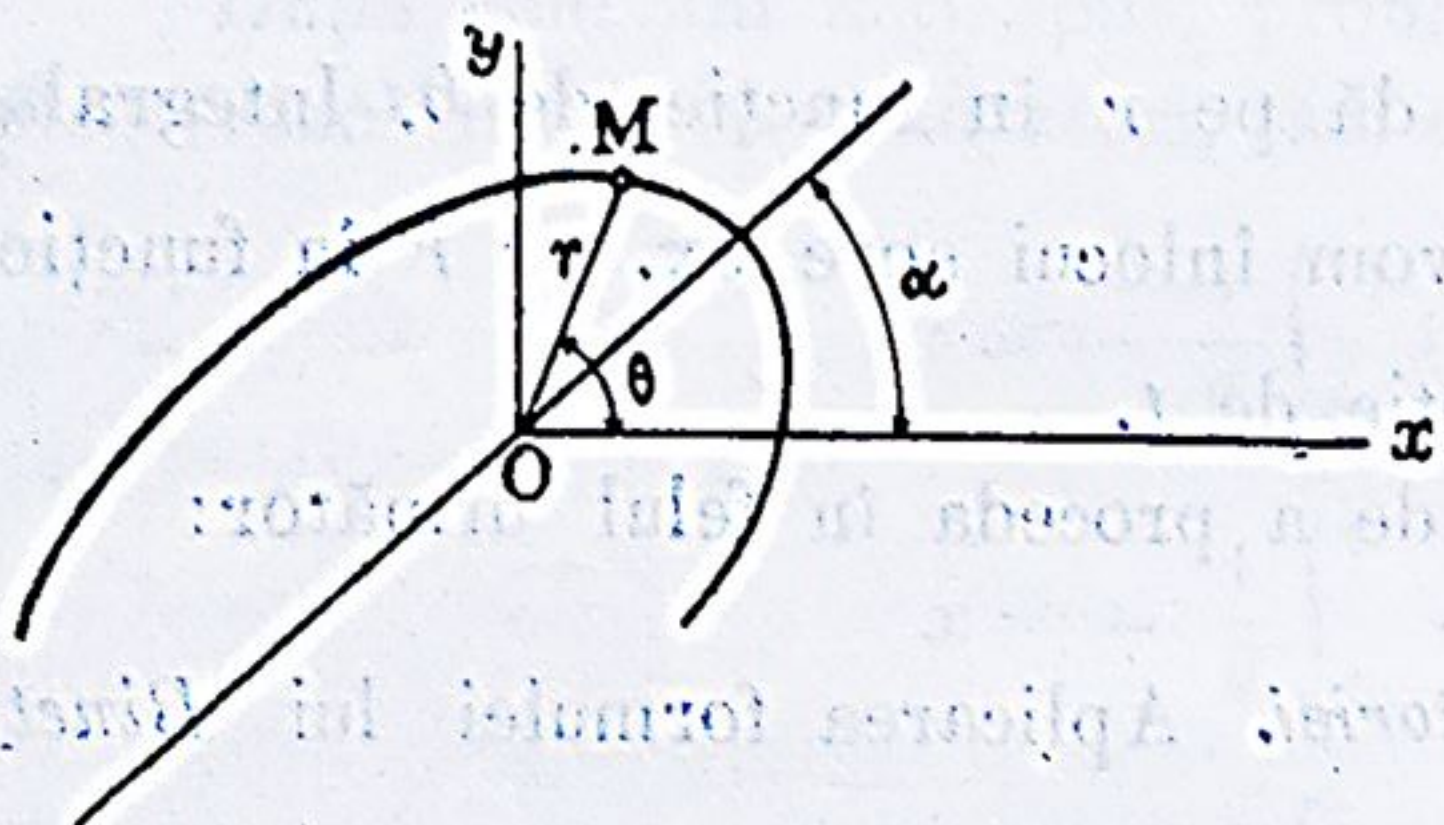


Fig. 56

ghiul vitezei  $v$  cu raza vectorială OM. Ecuația traectoriei conține 3 constante arbitrare  $c$ ,  $e$ , și  $\alpha$  pe care trebuie să le determinăm. Formulele pe care le vom utiliza sunt:

$$(1) \quad \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2} e \cos (\theta - \alpha)$$

din care deducem

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{ke}{c^2} \sin (\theta - \alpha);$$

$$(2) \quad v \cos s = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{c}{r^2} = -c \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{ke}{c} \sin (\theta - \alpha);$$

$$(3) \quad v \sin s = r \frac{d\theta}{dt} = r \frac{c}{r^2} = \frac{c}{r};$$

Introducând valorile inițiale, cele trei formule (1), (2) și (3) ne dau



$$\frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2} e \cos (\theta_0 - \alpha)$$

$$v_0 \cos \varepsilon_0 = \frac{k}{c} e \sin (\theta_0 - \alpha)$$

$$v_0 \sin \varepsilon_0 = \frac{c}{r_0}$$

de unde deducem

$$c = r_0 v_0 \sin \varepsilon_0$$

$$e \sin (\theta_0 - \alpha) = \frac{c}{k} v_0 \cos \varepsilon_0 = \frac{r_0 v_0^2 \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0}{k}$$

$$e \cos (\theta_0 - \alpha) = \frac{c^2}{k} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} \right) = \frac{r_0 v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0}{k} - 1.$$

Prima formulă ne dă valoarea lui  $c$ . Celelalte două determină pe  $\alpha$  și pe  $e$ .

Dacă ridicăm la patrat pe cele două din urmă și le adunăm, găsim

$$1 - e^2 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0}{k^2} \left( \frac{2k}{r_0} - v_0^2 \right)$$

ceea ce arată că traectoria va fi o elipsă ( $1 - e^2 > 0$ ) o parabolă ( $1 - e^2 = 0$ ) sau o hiperbolă ( $1 - e^2 < 0$ ) după cum cantitatea  $\frac{2k}{r_0} - v_0^2$  va fi pozitivă, nulă sau negativă. Cum această cantitate nu depinde de  $\varepsilon_0$ , vedem, ceea ce este foarte important, că *natura secțiunii conice pe care o descrie mobilul nu depinde decât de distanța inițială  $r_0$  și de viteza inițială  $v_0$  iar nu și de direcția  $\varepsilon_0$  a acestei viteze.*

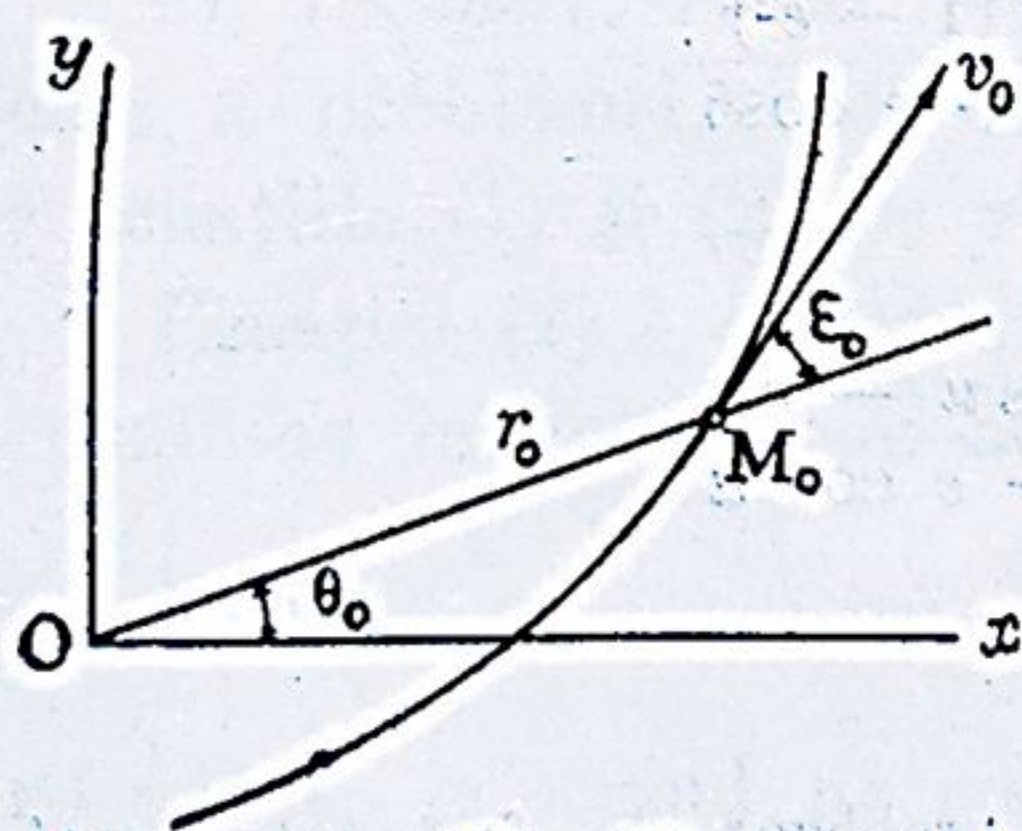


Fig. 57

Pe de altă parte, mărimea axului cel mare  $a$ , fiind procurată de egalitate cunoscută din geometria analitică:

$$\frac{c^2}{k} = a (1 - e^2)$$

care dă

$$\frac{1}{a} = \frac{k(1 - e^2)}{c^2}$$

avem, înlocuind pe  $c^2$  și pe  $1 - e^2$  prin valorile lor precedente



$$\frac{1}{a} = \frac{k}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \epsilon_0} \cdot \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \epsilon_0}{k^2} \left( \frac{2k}{r_0} - v_0^2 \right) = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k}.$$

Vedem astfel că și  $a$  este independent de  $\epsilon_0$ . Conchidem din acest fapt și din cel precedent, că *dacă diverse puncte materiale pornesc din aceeași poziție inițială cu aceeași viteză în diferite direcții, ele descriu toate secțiuni conice de aceeași natură și având același ax mare.*

c). *Expresiunea cordonatelor în funcție de timp.* Ecuația traectoriei combinată cu integrala ariilor  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$  ne permite a exprima pe  $r$  și pe  $\theta$  în funcție de timp. În Astronomie<sup>1)</sup> se procedează altfel. Se exprimă  $r$  și  $\theta$  în funcție de o variabilă auxiliară  $u$  și se determină valoarea lui  $u$  în funcție de timp.

Să efectuăm această operație, presupunând că traectoria ar fi o elipsă. Inlocuind parametrul  $\frac{c^2}{k}$  prin  $a(1 - e^2)$  ecuația conice raportată la axul ei cel mare ca ax polar ( $\alpha = 0$ ) este

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Ori, într-o elipsă  $r$  este întotdeauna cuprins între  $a(1 - e)$  și  $a(1 + e)^2$  așa că putem pune

$$(1) \quad r = a(1 - e \cos u)$$

și egalitatea

$$a(1 - e \cos u) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

ne dă pentru  $\theta$ :

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$$

<sup>1)</sup> Vom vedea în capitolul următor că problema de față interesează mișcarea planetelor.

<sup>2)</sup>  $a - c = a - a \frac{c}{a} = a(1 - e)$  și  $a + c = a(1 + e)$ .



de unde

$$(2)^{\text{bis}} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{1-e \cos u}.$$

Ne trebuie acum  $u$  în funcție de timp. Ne servim în acest scop de integrala ariilor  $r^2 d\theta = c dt$ , calculând mai întâi pe  $d\theta$  în funcție de  $u$ .

Ecuția (2) diferențiată, ne dă ținând socoteală de (2)<sup>bis</sup>

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u} du$$

deci

$$r^2 d\theta = a^2 (1-e \cos u)^2 \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u} du = a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$(1-e \cos u) du$  și, potrivit integralei ariilor,

$$a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e \cos u) du = c dt$$

sau

$$(1-e \cos u) du = n dt$$

punând pentru prescurtare

$$\frac{c}{a^2 \sqrt{1-e^2}} = n.$$

Integrațiunea ecuației diferențiale precedente ne dă în sfârșit:

$$(3) \quad u - e \sin u = nt + \gamma$$

$\gamma$  fiind o constantă arbitrară.

d). *Incheere.* Ecuțiile (1), (2) și (3) ne dau soluția completă a problemei, căci ecuația (3) ne dă pe  $u$  în funcție de  $t$  iar ecuațiile (1) și (2) pe  $r$  și pe  $\theta$  în funcție de  $u$ .

Ecuției (2) i se substituie de obicei o formulă mai comodă, servindu-ne în acest scop de relația trigonometrică

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

care ne dă, înlocuind pe  $\cos \theta$  prin expresia sa (2),

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$



În definitiv dar, soluția problemei este dată de sistemul de ecuații

$$r = a (1 - e \cos u)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$u - e \sin u = nt + \gamma.$$

Putem da constantei  $n = \frac{c}{a^2 \sqrt{1-e^2}}$  o formă foarte simplă, observând că potrivit formulei știute din Cinematică:  $\lambda = \frac{1}{2} ct$ , valoarea lui  $c$  este egală cu îndoitul ariei descrisă de raza vectoare într'un timp, divizată prin acest timp, așa că dacă raza vectoare descrie aria întreagă a elipsei

$$\pi ab = \pi a^2 \left( \frac{b}{a} \right) = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \quad ^1)$$

și însemnăm prin  $T$  durata revoluției punctului pe orbita sa. avem

$$c = \frac{2 \pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

și prin urmare

$$n = \frac{2 \pi}{T}.$$

Cantitatea  $n$  se numește *viteză unghiulară mijlocie* și produsul  $nt$  este zis *mişcare mijlocie* a punctului mobil.

În Astronomie, unghiului  $\theta$  i se zice *anomalie adevărată* iar unghiului  $u$ , *anomalie excentrică*.

### III. MIȘCARE ÎN SPAȚIU.

*Atracțiune proporțională cu distanța mobilului la un centru fix, direcția vitezei inițiale fiind oare care.*

<sup>1)</sup>  $\frac{b^2}{a} = a(1-e^2).$



Luăm centrul fix ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare. Forța de atracție  $F$  trecând prin  $O$ , suntem în cazul accelerațiilor centrale. Oricare ar fi legea pecare ar urma-o forța, știm că mișcarea este plană și că legea ariilor are loc pentru orice plan trecând prin punctul  $O$ . Planul curbei este determinat de vectorul vitezei inițiale și de punctul  $O$ .

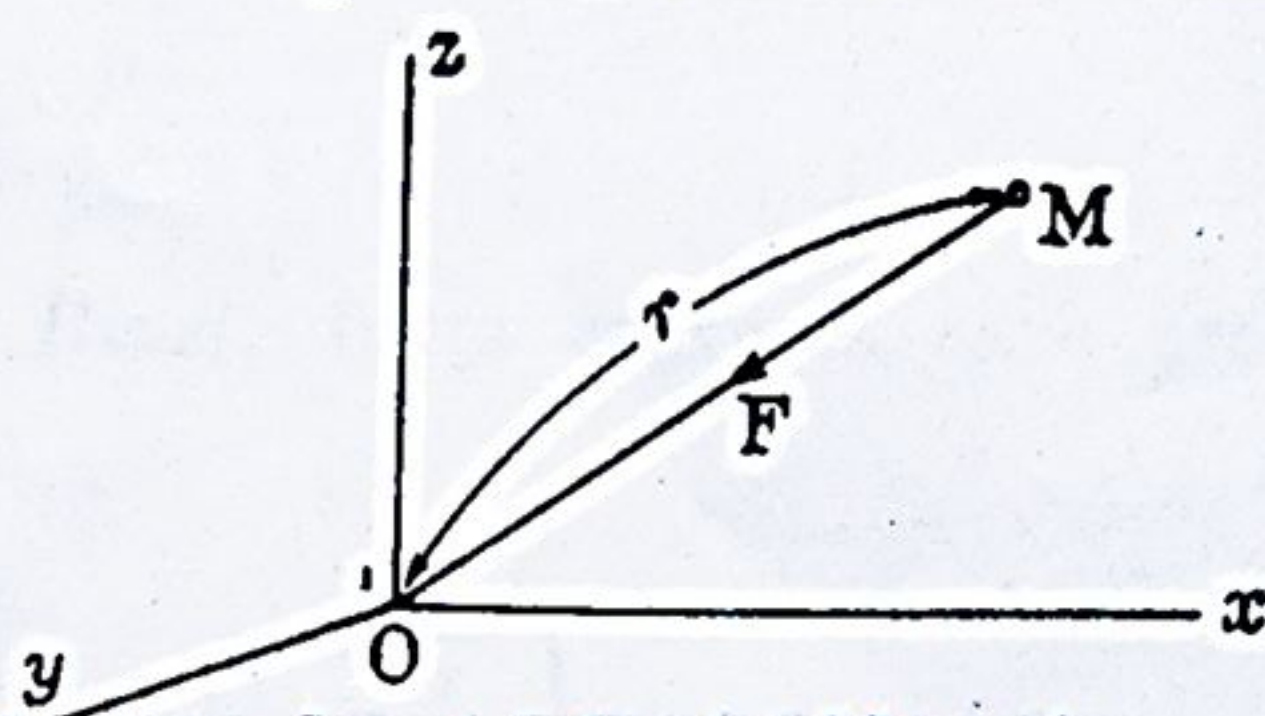


Fig. 58

Să cercetăm în particular cazul când  $F = kr$ .

Cosinusurile directoare ale lui  $F$  fiind  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{z}{r}$ , ecuațiile mișcării se scriu

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= k r \left( -\frac{x}{r} \right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= k r \left( -\frac{y}{r} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= k r \left( -\frac{z}{r} \right) \end{aligned}$$

adică, punând  $\frac{k}{m} = \omega^2$ ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

ecuații pe cari le cunoaștem din Cinematică, dela mișcarea eliptică în spațiu. Integrațiunea ne dă

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta), \quad z = c \cos(\omega t + \gamma)$$

$a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$  fiind 6 constante arbitrare care se determină prin condițiile inițiale  $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0$ .

Așa dar mișcarea este eliptică, iar proiecția ei pe axe dă trei mișcări vibratoare simple. Centrul elipsei este în punctul  $O$ .



## VI. MIȘCAREA PLANETELOR. — GRAVITAȚIA UNIVERSALĂ.

1. **Legile lui Képler.** Legile mișcării planetelor au fost date de *Képler* în anul 1618. Aceste legi deduse din observațiile astronomice ale lui *Tycho-Brahé* sunt în număr de trei și se enunță în felul următor, considerând planetele și soarele ca simple puncte materiale:

1°. *Planetele se mișcă în planuri trecând prin soare și razele vectoare duse din soare descriu arii proporționale cu timpul.*

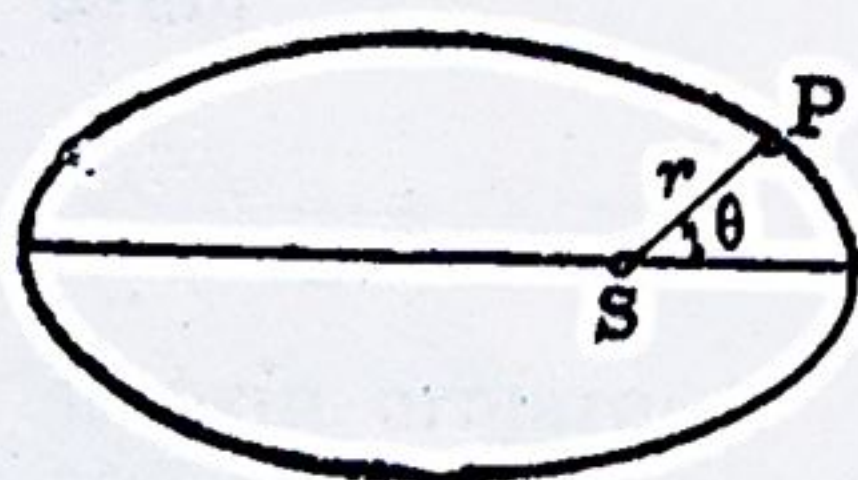


Fig. 59

2°. *Orbitele planetelor sunt elipse, soarele ocupând unul din focare;*

3°. *Patratele duratelor de revoluție ale planetelor în jurul soarelui, sunt proporționale cu cuburile axelor mari ale orbitelor ce descriu.*

Din aceste legi, *Newton* a dedus legea forței care produce mișcarea în felul următor:

*Consecința legii întâia.* Știm, că atunci când un punct se mișcă într'un plan în așa fel că raza vectoare, care unește mobilul cu un centru fix din plan, descrie arii proporționale cu timpurile, accelerația și deci forța care solicită mobilul trece neconținut prin punctul fix.

Din această teoremă și din prima lege a lui *Képler*, rezultă că forța care solicită o planetă trece neconținut prin soare.

*Consecința legii a doua.* După această lege, traectoria planetei este o elipsă, cu soarele într'unul din focare. Insemnând



prin  $p$  parametrul și prin  $e$  excentricitatea elipsei, avem deci ca ecuație a orbitei, în coordonate polare, luând polul în soare.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Ori, potrivit formulei lui *Binet*, forța centrală care produce mișcarea are ca expresiune

$$F = -\frac{m c^2}{r^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right)$$

$c$  fiind constanta ariilor și  $m$  masa planetei.

Inlocuind în această expresiune pe

$$\frac{1}{r} \quad \text{și pe} \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}$$

prin valorile ce rezultă din ecuația elipsei, adică

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} = -\frac{e \cos \theta}{p}$$

se obține

$$F = -\frac{m c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

valoare negativă, care corespunde prin urmare unei forțe attractive. Așa dar, în concluziune: *Forța care solicită o planetă este atractivă și intensitatea ei variază în raport invers cu patratul distanței dela planetă la soare.*

Potrivit expresiunii forței, s'ar părea că coeficientul  $\frac{c^2}{p}$  variază dela o planetă la alta; legea treia a lui Képler va stabili că acest coeficient rămâne același ori care ar fi planeta considerată.

*Consecința legii a treia.* Fie  $a$  și  $b$  lungimile semi axelor elipsei descrisă de planetă; avem  $p = \frac{b^2}{a}$ .

Pe de altă parte știm că constanta ariilor,  $c$ , este egală cu îndoitul ariei descrisă de raza vectoare într'un timp oare



care  $t$ , divizată prin  $t$ . Dacă prin urmare însemnăm prin  $T$  durata unei revoluții complete, avem

$$c = 2 \frac{\pi a b}{T}$$

și ca urmare

$$\frac{c^2}{p} = 4 \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\left(\frac{b^2}{a}\right) \cdot T^2} = 4 \pi^2 \left(\frac{a^3}{T^2}\right).$$

Ori, potrivit legii a treia a lui Képler, raportul  $\frac{a^3}{T^2}$  este o constantă. În consecință, expresiunea lui  $F$  devine

$$F = - \frac{m k}{r^2}$$

însemnând prin  $k$  valoarea constantei  $\frac{c^2}{p}$ . Așa dar: *Forța care solicită ori ce planetă este o atracțiune proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu patratul distanței dela planetă la soare.*

**2. Gravitația universală.** După ce a stabilit legea forței care produce mișcarea planetelor, Newton și-a pus problema următoare.

«Să se afle traectoria ce descrie un punct material solicitat de o forță centrală și atractivă  $F = - \frac{km}{r^2}$  ».

Noi am tratat această problemă la capitolul precedent și am văzut că traectoria poate fi o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă, după cum diferența  $\frac{2k}{r_0} - v_0^2$  este pozitivă, nulă sau negativă.

Cum cometele descriu în jurul soarelui elipse foarte alungite sau parabole, cu focarul în soare, Newton s'a întrebat atunci dacă legea forței care produce mișcarea cometelor nu este identică cu aceea a mișcării planetelor.

Ori, observațiile astronomice au probat că legea ariilor



are loc și în cazul cometelor. Așa dar expresiunea forței motrice este și pentru comete tot

$$F = - \frac{mc^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

iar raportul  $\frac{c^2}{p}$  s'a dovedit pe de o parte a avea aceeași valoare pentru toate cometele, iar pe de altă parte a fi egal cu acela care corespunde mișcării planetelor.

Newton a găsit astfel că legea

$$F = - \frac{k m}{r^2}$$

este o lege generală pentru planete și comete, coeficientul  $k$  depinzând numai de soare și reprezentând atracțiunea soarelui asupra unui punct de masă egală cu 1 așezat la unitatea de distanță.

Mergând mai departe, Newton a cercetat și mișcarea sateliților în jurul planetelor. Considerate ca absolute, aceste mișcări sunt eliptice și verifică și ele destul de sensibil legea ariilor. Așa dar ori-ce planetă atrage sateliții săi proporțional cu masele lor și invers proporțional cu patratul distanței satelitului la planetă. Fie cărei planete îi corespunde un coeficient particular de atracțiune  $\lambda$ , așa că forța de atracție a planetei asupra unui punct de masă  $m_1$ , așezat la distanța  $r_1$  de planetă, este egală cu  $\frac{\lambda m_1}{r_1^2}$ .

Cum planetele atrag sateliții și ori-ce corp de pe suprafața lor, ele atrag desigur și soarele.

Fie  $M$  masa soarelui și  $m$  masa unei planete;  $k$  coeficientul de atracție al soarelui și  $\lambda$  acela al planetei. Soarele și planeta fiind așezate la distanța  $r$ , atracțiunea soarelui asupra planetei este  $\frac{km}{r^2}$  și aceea a planetei asupra soarelui  $\frac{\lambda M}{r^2}$ . Ori, aceste două atracții sunt egale între ele, potrivit principiului acțiunii și reacțiunii; deci avem

$$km = \lambda M \quad \text{sau} \quad \frac{k}{M} = \frac{\lambda}{m}.$$



Asociind soarele altor planete de mase  $m', m'', \dots$  și caracterizate prin coeficienții de atracție  $\lambda', \lambda'', \dots$  vom găsi un șir de raporturi egale

$$\frac{k}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \frac{\lambda''}{m''} = \dots = f$$

însemnând prin  $f$  valoarea comună a raporturilor.

Atracțiunea mutuală dintre soare și o planetă oarecare poate prin urmare să fie pusă sub forma

$$f \frac{M m}{r^2}$$

valoarea coeficientului  $f$  fiind aceeași pentru toate planetele.

Newton a generalizat acest rezultat, enunțând următorul principiu, cunoscut sub numele de *principiul atracțiunei sau gravitațiunei universale*:

*„In sistemul solar compus din soare, din comete, planete și sateliții lor, două puncte materiale oarecare se atrag proporțional cu masele lor și invers proporțional cu patratul distanței dintre ele”.*

Constanta de atracție  $f$ , care reprezintă atracția unității de masă asupra unității de masă la unitatea de distanță, nu este o constantă pur numerică; ea depinde de unitățile de lungime, de timp și de forță (sau de masă). În adevăr, dacă însemnăm prin  $F$  forța de atracțiune mutuală între două, mase  $m$  și  $m'$ , avem

$$F = f \cdot \frac{m m'}{r^2} \text{ și prin urmare } f = \frac{F \cdot r^2}{m m'}$$

Ori, dimensiunile unei mase în sistemul M. K. S. sunt  $\text{FL}^{-1} \text{T}^2$ ; dimensiunile lui  $f$  sunt deci date de către raportul

$$\frac{\text{FL}^2}{\text{F}^2 \text{L}^{-2} \text{T}^4} \text{ adică } \text{F}^{-1} \text{L}^4 \text{T}^{-4}.$$

Determinarea lui  $f$  este o chestiune de Fizică experimentală. În sistemul C. G. S, avem

$$f = \left( \frac{1}{3862} \right)^2.$$



## VII. EXEMPLE DE MIȘCĂRI PE SUPRAFETE ȘI PE CURBE.

### I. PENDULUL SFERIC. (Mișcare pe o suprafață)

1. **Pendul sferic.** Să considerăm un punct material de greutate  $mg$  atașat la extremitatea  $M$  a unui fir inextensibil și fără masă, cealaltă extremitate  $O$  a firului fiind fixă.

Punctul este în echilibru când firul ocupă poziția verticală  $OA$ . Greutatea  $mg$  face atunci echilibru tracțiunii exercitată de fir asupra punctului.

Dacă depărtăm punctul de poziția lui de echilibru și-l abandonăm acțiunii gravitației, după ce mai întâi i-am imprimat o viteză inițială oarecare, punctul se va mișca așa fel că distanța sa la extremitatea fixă a firului rămâne constantă. Avem deci cazul mișcării unui punct pe suprafața unei sfere de centru  $O$  și de rază  $OM$ .

Acțiunea suprafeței asupra punctului este aceea pe care o exercită firul asupra punctului pentru a-l menține pe sferă. Ea este îndreptată pe raza  $OM$ , normală sferei.

2. **Ecuatiile diferențiale ale mișcării.** Sistem  $Oxyz$ , dreptunghiular, axul  $Oz$  vertical și îndreptat în jos;  $N$ , acțiunea firului,  $l$ , lungimea sa. Avem:

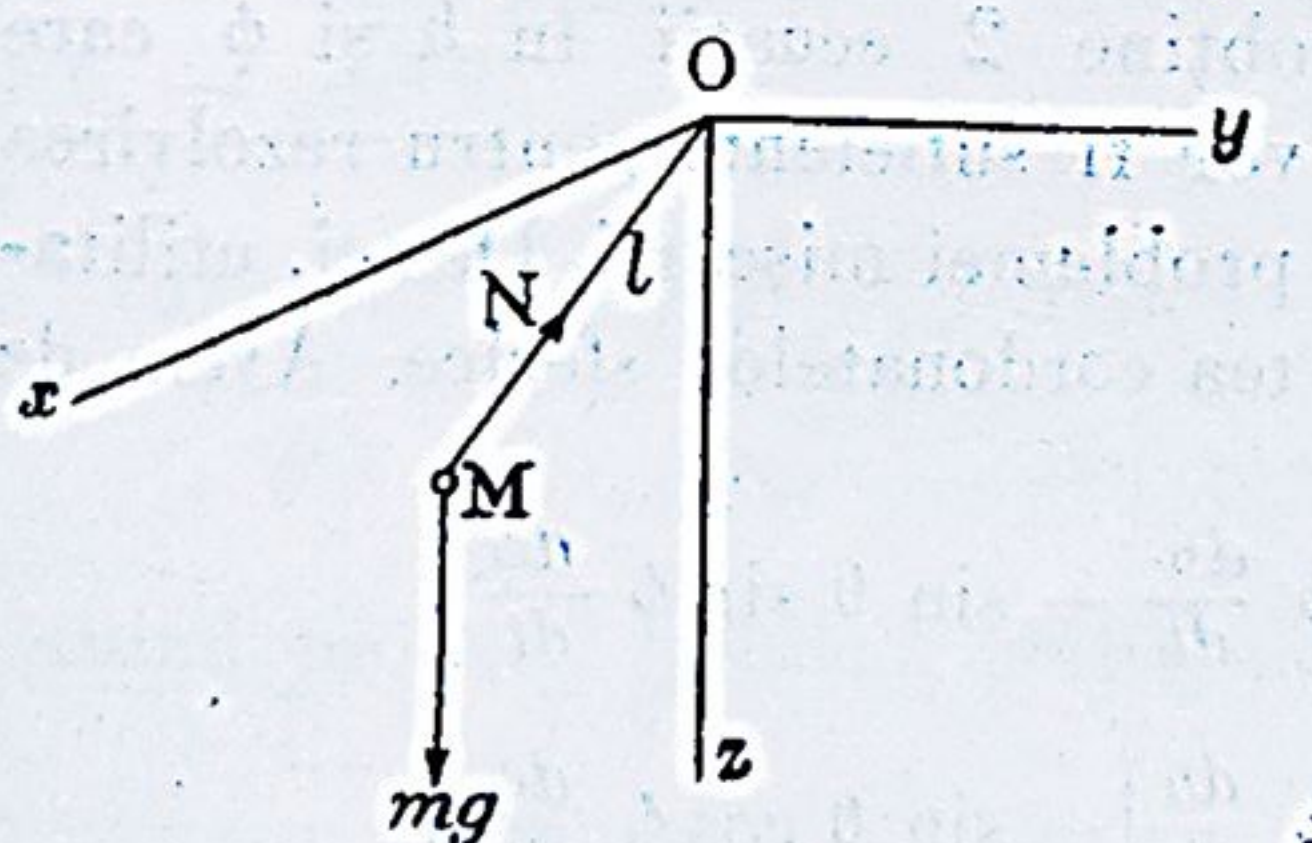


Fig. 61

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -N \frac{x}{l}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -N \frac{y}{l}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -N \frac{z}{l} + mg$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

deci 4 ecuații pentru determinarea necunoscutelor  $x, y, z, N$

în funcție de  $t$ . Aplicațiunea teoremelor generale și întrebun-

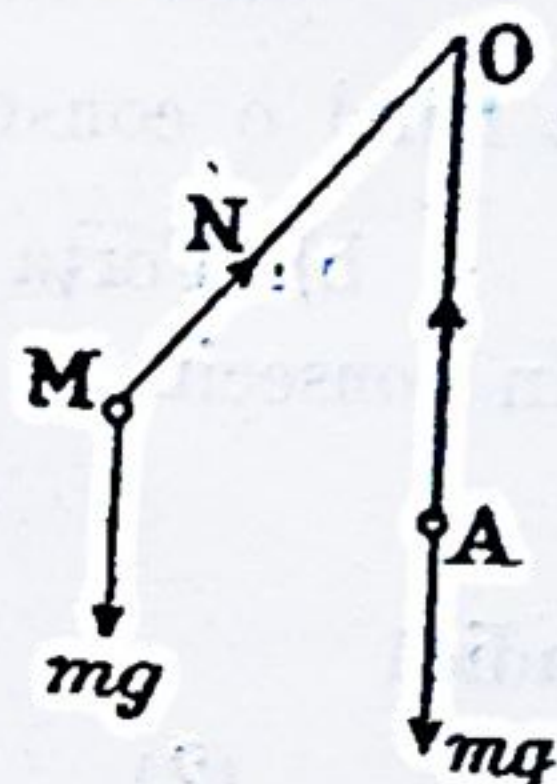


Fig. 60



țarea cordonatelor sferice ne permit de a înlocui acest sistem prin alte ecuații mai simple.

**3. Aplicațiunea teoremelor generale.** a). Rezultanta forțelor  $mg$  și  $N$  întâlnește neconținut axul fix  $Oz$ . Momentul ei în raport cu acest ax fiind nul, teorema ariilor are deci loc pe planul  $xOy$ , adică avem

$$(1) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

$c$  fiind o constantă arbitrară.

b). Forța direct aplicată  $mg$  admite funcția de forțe  $mgz$ . In consecință

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgz - mgz_0$$

adică

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz + c'$$

$c'$  fiind o nouă constantă arbitrară.

**4. Intrebuințarea cordonatelor sferice.** Fie  $OP$  intersecția planului vertical  $MOZ$  cu planul orizontal  $Oxy$ . Avem, pe figură, ( $OH = l \sin \theta$ ) :

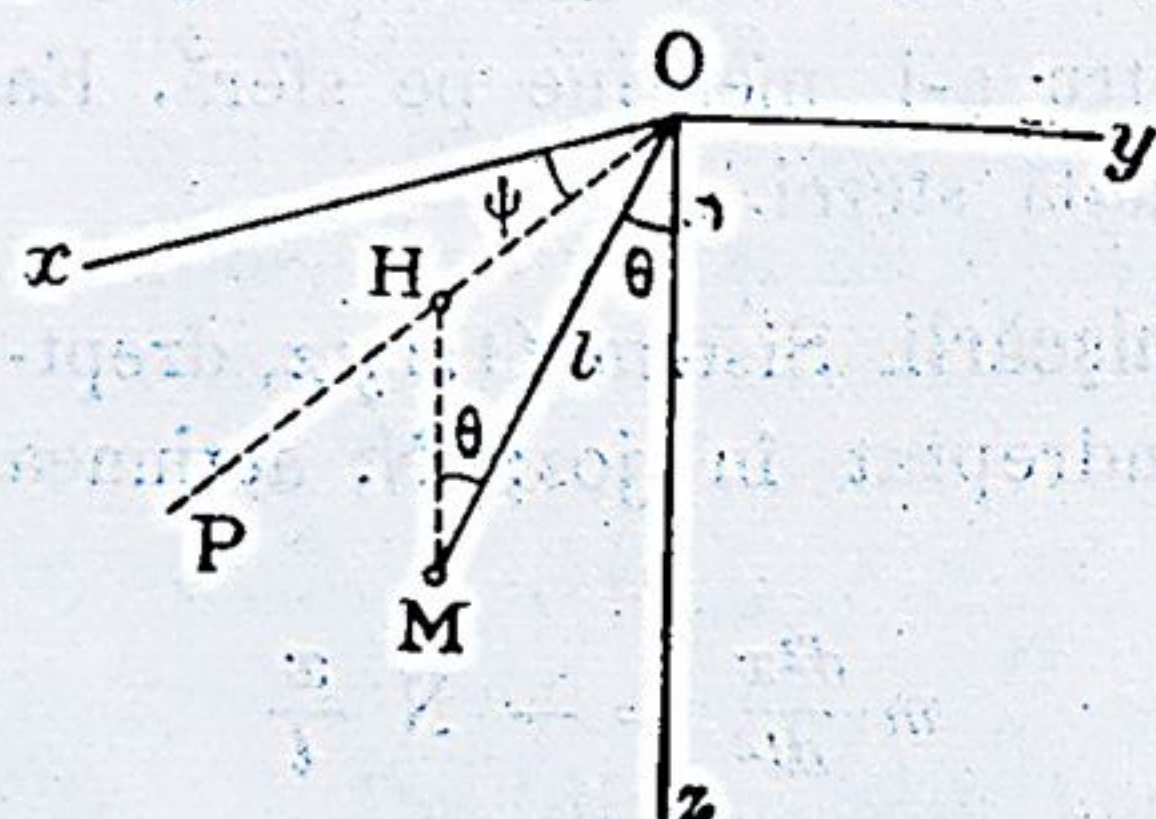


Fig. 62

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y &= l \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z &= l \cos \theta. \end{aligned}$$

Inlocuind pe  $x, y, z$  prin aceste expresii în ecuațiile (1) și (2) vom obține 2 ecuații în  $\theta$  și  $\phi$  care vor fi suficiente pentru rezolvirea problemei mișcării. De aci, utilitatea cordonatelor sferice. Avem de

altfel

$$\frac{dx}{dt} = l \left( \cos \theta \cos \phi \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = l \left( \cos \theta \sin \phi \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -l \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$



Inlocuind pe  $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  prin expresiunile de mai sus, în ecuațiile (1) și (2), se obține sistemul de două ecuații

$$(1)^{\text{bis}} \quad l^2 \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = c^1)$$

$$(2)^{\text{bis}} \quad l^2 \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = 2 gl \cos \theta + c'$$

care se poate scrie, însemnând prin  $\theta_0, \theta'_0, \psi'_0$ , valorile inițiale ale elementelor  $\theta, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ :

$$(1)^{\text{ter}} \quad \sin^2 \theta \cdot \frac{d\psi}{dt} = \sin^2 \theta_0 \cdot \psi'_0$$

$$(2)^{\text{ter}} \quad \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) + \theta'^2_0 + \sin^2 \theta_0 \cdot \psi'^2_0$$

Eliminând pe  $\frac{d\psi}{dt}$  obținem ecuația

$$\sin^2 \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \sin^2 \theta +$$

$$(\theta'^2_0 + \sin^2 \theta_0 \psi'^2_0) \sin^2 \theta - \sin^4 \theta_0 \psi'^2_0$$

care se mai poate scrie, observând că  $\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 = \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta$ ,

$$(3) \quad \sin^2 \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) (1 - \cos^2 \theta) + \theta'^2_0 (1 - \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta_0 \psi'^2_0 (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta).$$

Inlocuind pe  $\cos \theta$  printr-o variabilă  $x$ , observăm că membrul

1) Ecuația aceasta se putea scrie imediat, căci potrivit legii artilor avem  $r^2 \frac{d\psi}{dt} = c$  și  $r = l \sin \theta$ .



al doilea este un polinom de gradul al 3<sup>lea</sup> în  $x$ , ale căruia 3 rădăcini sunt întotdeauna reale. În adevăr, dacă în acest polinom. înlocuim succesiv pe  $x$  prin

$$-\infty, \quad -1, \quad \cos \theta_0, \quad +1$$

găsim rezultate ale căroră semne sunt, respectiv,

$$+, \quad -, \quad +, \quad -$$

Deci, o rădăcină negativă, în valoare absolută mai mare decât unitatea, și două rădăcini cuprinse între  $-1$  și  $+1$ :

$$-k, \quad \cos \theta_1, \quad \cos \theta_2$$

Ca urmare, polinomul se poate pune sub forma

$$-\frac{2g}{l} \cdot (x + k) \cdot (x - \cos \theta_1) \cdot (x - \cos \theta_2)$$

adică

$$(4) \quad \frac{2g}{l} (\cos \theta + k) (\cos \theta - \cos \theta_1) (\cos \theta_2 - \cos \theta)$$

**5. Reducerea problemei la cuadraturi.** Ecuația (3) în care înlocuim membrul al 2<sup>lea</sup> prin expresiunea (4) ne dă

$$dt = \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta + k) (\cos \theta - \cos \theta_1) (\cos \theta_2 - \cos \theta)}}$$

și ecuația (1)<sup>ter</sup> ne dă ca urmare

$$d\phi = \sin^2 \theta_0 \psi'_0 \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta + k) (\cos \theta - \cos \theta_1) (\cos \theta_2 - \cos \theta)}}$$

Integrând, cu începere dela momentul inițial, avem

$$(5) \quad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta + k) (\cos \theta - \cos \theta_1) (\cos \theta_2 - \cos \theta)}}$$

$$(6) \quad \phi - \phi_0 = \sin^2 \theta_0 \psi'_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta + k) (\cos \theta - \cos \theta_1) (\cos \theta_2 - \cos \theta)}}$$



Relațiunea dintre  $\theta$  și  $t$  se exprimă prin mijlocul funcțiilor zise eliptice.

Din egalitatea (5) se vede că pentru ca  $t$  să fie real, unghiul  $\theta$  trebuie să rămână cuprins între cele două unghiuri  $\theta_1$  și  $\theta_2$  căci  $\cos\theta + k$  fiind pozitiv, semnul polinomului de sub radical depinde numai de acela al productului  $(\cos\theta - \cos\theta_1)(\cos\theta_2 - \cos\theta)$ . Așa dar extremitatea pendulului nu iese din zona orizontală limitată de cele două mici cercuri care corespund unghiurilor  $\theta_1$  și  $\theta_2$ .

6. **Cazuri particulare.** 1°. Să presupunem  $\theta_1 = \theta_2$ . În acest caz avem  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$  și  $\theta = \theta_0$ . Polinomul în  $x$  trebuie să admită ca rădăcină dublă pe  $x = \cos\theta_0$ . Exprimând că atât acest polinom cât și prima lui derivată se anulează pentru  $x = \cos\theta_0$ , se obțin condițiile

$$\theta'_0 = 0 \quad \text{și} \quad \psi'^2_0 \cos\theta_0 = \frac{g}{l}.$$

Pendulul descrie un cerc orizontal, cu o viteză unghiulară  $\frac{d\psi}{dt}$  constantă și egală cu viteza unghiulară inițială  $\psi'_0$  (ecuația 1<sup>ter</sup>).

2°. Să presupunem  $\psi'_0 = 0$ . Ecuația (1)<sup>ter</sup> arată că atunci  $\frac{d\psi}{dt}$  este și el nul și prin urmare unghiul  $\psi$  rămâne constant, ceea ce însemnează că mișcarea se efectuează într'un plan vertical. Formula (3) se reduce, după eliminarea lui  $\sin^2\theta$ , la următoarea

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) + \theta'^2_0}}$$

și aceasta ne dă legile pendulului circular, pe care le vom studia mai jos ca exemplu de mișcare a unui punct pe o curbă fixă.



## II. PENDULUL CIRCULAR.

(Mișcare pe o curbă)

1. Dacă depărtând punctul de poziția lui de echilibru A, îl aducem în  $M_0$ , și-l abandonăm apoi acțiunii greutății fără a-i imprima vre-o viteză inițială, el se va mișca în planul vertical  $M_0OA$  pe un arc de cerc, descris din O ca centru.

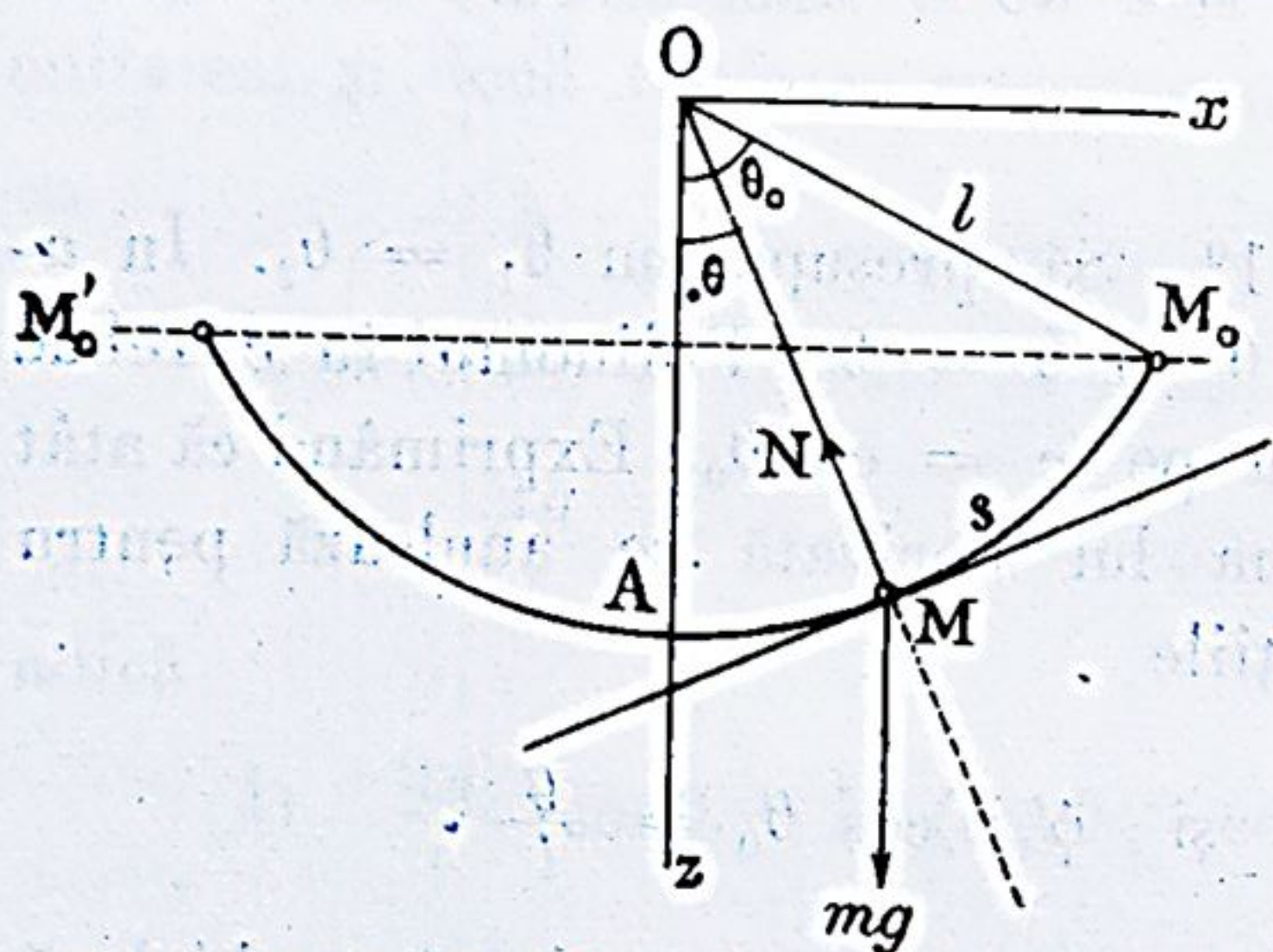


Fig. 63

Putem deci privi punctul material M ca fiind obligat de a se mișca pe un arc de cerc, sub efectul unei forțe egale cu greutatea sa.

Teorema forțelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g (z - z_0)$$

adică

$$(1) \quad v^2 = 2g (z - z_0).$$

Această relațiune arată că viteza, nulă în punctul  $M_0$ , redevine nulă în punctul  $M'_0$ , simetricul lui  $M_0$  în raport cu verticala Oz. Rezultă că punctul va oscila indefinit dela  $M_0$  la  $M'_0$ , apoi de la  $M'_0$  la  $M_0$  și așa mai departe. Toate aceste oscilații fiind identice, va fi suficient să studiem pe una singură dintre ele, sau chiar numai mișcarea dela  $M_0$  la A.

2. **Reducerea problemei la cuadraturi.** În formula (1) să exprimăm variabilele  $v$  și  $z$ , în funcție de unghiul  $\theta$ .

Figura ne dă

$$z = l \cos \theta, \quad z_0 = l \cos \theta_0$$

și însemnând cu  $s$  arcul  $M_0M$ , (dela  $M_0$  la M)

$$s = l (\theta_0 - \theta) \quad \text{deci} \quad v = \frac{ds}{dt} = - l \frac{d\theta}{dt}.$$



Formula (1) devine în consecință

$$l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 gl (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

de unde deducem

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

luând înaintea radicalului semnul minus, de oare ce  $\theta$  se micșorează când crește  $t$  și derivata  $\frac{d\theta}{dt}$  este deci negativă.

Integrând cu începere dela momentul inițial, avem

$$(2) \quad t = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Membrul al doilea este o integrală eliptică.

3. **Cazul micilor oscilații.** Să presupunem pe  $\theta_0$  foarte mic. Atunci și  $\theta$  este foarte mic și avem destul de aproximativ

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2}, & \cos \theta_0 &= 1 - \frac{\theta_0^2}{2} \\ \cos \theta - \cos \theta_0 &= \frac{1}{2} (\theta_0^2 - \theta^2). \end{aligned}$$

Formula de mai sus (2) devine

$$t = - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

și integrând

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos \frac{\theta}{\theta_0}.$$

Deducem

$$\theta = \theta_0 \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Făcând  $\theta = 0$  în formula (3), se obține  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$ ; acesta este timpul pe care-l pune mobilul ca să ajungă din  $M_0$  în A. Deci durată T a oscilației dela  $M_0$  la  $M'_0$  va fi

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Această durată este, după cum se vede, independentă de unghiul inițial  $\theta_0$ , însă numai în ordinea de aproximație ce am admis.

Dacă într-o localitate de pe pământ, măsurăm direct valoarea lui  $T$ , formula precedentă ne permite de a calcula pe  $g$ . Avem în adevăr

$$g = l \left( \frac{\pi}{T} \right)^2.$$

**Notă.** Știm că teorema forțelor vii se deduce din proiecția mișcării pe tangenta la traiectorie. Dacă prin urmare ne servim de ecuația generală

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

pe care ne-o dă această proiecție, vom ajunge după o integrațiune tot la rezultatul pe care ni-l dă aplicațiunea directă a teoremei forțelor vii.

Astfel, în cazul de mai sus, proiecția mișcării pe tangenta din  $M$  la arcul de cerc, ne dă,  $\frac{dv}{dt}$  fiind egal cu  $-l \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ,

$$- m l \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin \theta$$

adică

$$(4) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \theta$$

sau

$$2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} dt = - 2 \frac{g}{l} \sin \theta \cdot d\theta$$

și integrând

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Deci aceeași ecuație la care conduce aplicația directă a teoremei forțelor vii.

Când  $\theta$  este foarte mic, adică în cazul micilor oscilații, putem înlocui pe  $\sin \theta$  prin  $\theta$  și ecuația (4) devine atunci



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.^{1)}$$

Integrațiunea ne dă

$$\theta = a \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha \right)$$

$a$  și  $\alpha$  fiind constante arbitrare. Condițiile  $\theta = \theta_0$  și  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  pentru  $t = 0$ , introduse în expresia lui  $\theta$  și a derivatei sale

$$\frac{d\theta}{dt} = -a \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha \right)$$

ne dau

$$\begin{cases} \theta_0 = a \cos \alpha \\ -a \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{l}} = 0 \end{cases}$$

adică  $\alpha = 0$  și  $a = \theta_0$ . Regăsim astfel soluțiunea

$$\theta = \theta_0 \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

**4. Cazul oscilațiilor oarecare.** Să calculăm acum durata oscilațiunii, în cazul când  $\theta_0$  ar fi oarecare.

Avem potrivit formulei (2)

$$T = -2 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

sau

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Putem evita funcțiunile eliptice în felul următor:  
Potrivit relațiilor trigonometrice

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - \cos \theta_0 = 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

<sup>1)</sup> Observând identitatea acestei ecuații cu ecuația diferențială a mișcării vibratoare simple, putem spune imediat că durata  $T$  a unei oscilații ( $M_0$  la  $M'_0$ ) este egală cu  $\sqrt{\frac{\pi}{g/l}}$  adică  $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .



avem

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Să schimbăm acum de variabilă, punând

$$(5) \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi$$

ceea ce este permis, deoarece de la 0 la  $\theta_0$ ,  $\sin \frac{\theta}{2}$  rămâne tot timpul mai mic decât  $\sin \frac{\theta_0}{2}$ ; unghiul  $\varphi$  va varia dela 0 la  $\frac{\pi}{2}$  când  $\theta$  variază dela 0 la  $\theta_0$ .

Deducem

$$(6) \quad \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} (1 - \sin^2 \varphi)} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi \cdot \sqrt{2}.$$

Pe de altă parte, diferențiând relația (5) obținem

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot d\theta = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi \cdot d\varphi$$

și în consecință

$$(7) \quad d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Ținând seama de egalitățile (6) și (7) expresiunea lui T devine

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi} \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

adică

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Integrala poate fi exprimată sub formă de serie, după puterile lui  $\sin \frac{\theta_0}{2}$ . Avem, în adevăr, potrivit formulei binomului,



$$(8) \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \sin^4 \varphi + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \sin^{2n} \varphi + \dots$$

Cum această serie este uniform convergentă, dacă punem pentru prescurtare

$$u_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$$

avem, înmulțind egalitatea (8) cu  $d\varphi$  și integrând,

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ u_0 + \frac{1}{2} u_2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} u_4 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} u_{2n} \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} + \dots \right].$$

Se cunoaște însă din Analiză formula de recurență

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$$

din care rezultă

$$u_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4}$$

$$u_4 = \frac{3}{4} u_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_0$$

Înmulțirea tuturor acestor egalități între ele ne procură formula generală

$$u_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} u_0$$

Însă

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$



deci, în definitiv,

$$u_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aplicațiunea acestei formule ne dă

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} + \dots \right].$$

Când unghiul  $\theta_0$  este foarte mic, se poate reduce paranteza la primul ei termen, ceea ce ne dă valoarea

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pe care o cunoaștem. Obținem însă o valoare și mai apropiată, dacă luăm din paranteză primii doi termeni, ceea ce ne dă, înlocuind pe  $\sin^2 \frac{\theta_0}{2}$  prin  $\left( \frac{\theta_0}{2} \right)^2$ :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

**5. Mișcarea pendulului într'un mediu rezistent.** Să presupunem rezistența  $R$  a mediului proporțională cu viteza și să reprezentăm intensitatea ei prin  $2mhv$ . Această forță este îndreptată pe tangenta la traectorie și în sensul invers al mișcării.

Forța tangențială  $F_t$  având ca expresie

$$F_t = mg \sin \theta - 2mhv$$

aplicația formulei

$$m \frac{dv}{dt} = F_t$$

ținând seama că  $v = -l \frac{d\theta}{dt}$  ne dă

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

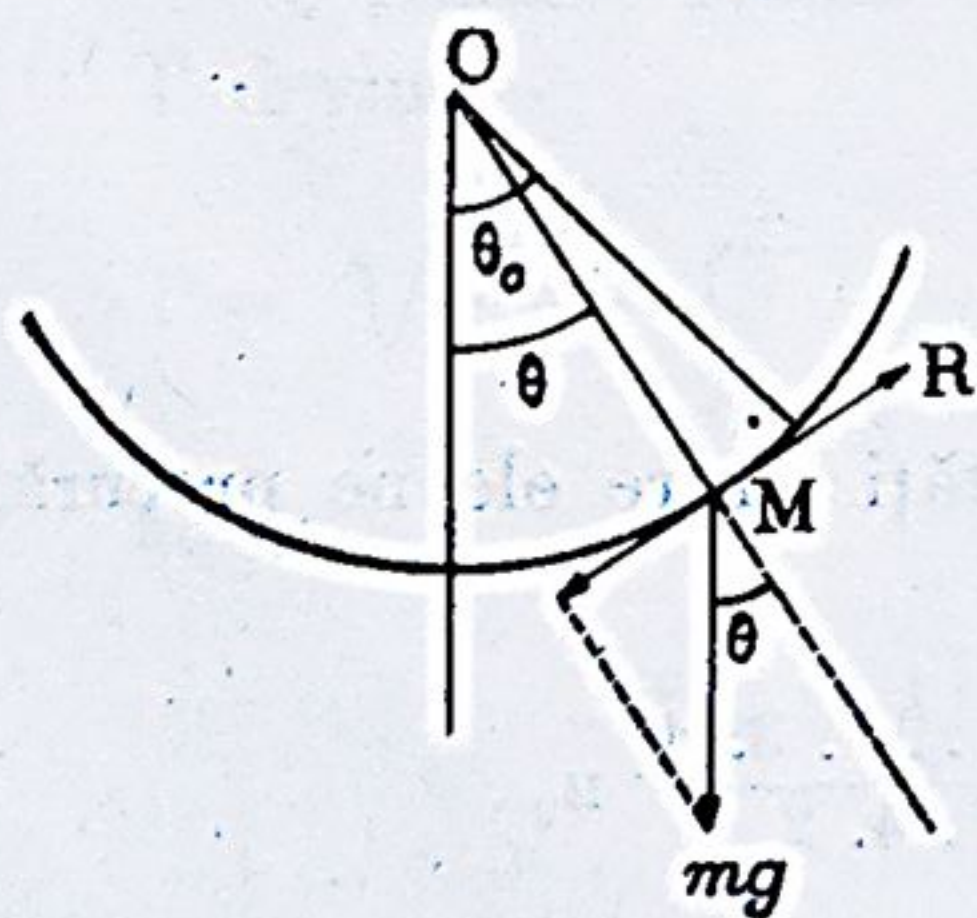


Fig. 64



care este ecuația mișcării. Dacă unghiul  $\theta$  este foarte mic, avem aproximativ

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este, după cum se știe din Analiză,

$$(2) \quad \theta = P e^{\alpha t} + Q e^{\beta t}$$

$P$  și  $Q$  fiind 2 constante arbitare iar  $\alpha$  și  $\beta$  rădăcinile ecuației

$$X^2 + 2hX + \frac{g}{l} = 0$$

adică

$$\alpha = -h + \sqrt{h^2 - \frac{g}{l}}, \quad \beta = -h - \sqrt{h^2 - \frac{g}{l}}.$$

Să presupunem rezistența mediului destul de mică pentru ca diferența  $h^2 - \frac{g}{l}$  să fie negativă; rădăcinile  $\alpha$  și  $\beta$  sunt atunci imaginare și, dacă punem,

$$(3) \quad \frac{g}{l} - h^2 = a^2$$

putem scrie

$$\alpha = -h + ai, \quad \beta = -h - ai$$

valori care substituie în expresia (2) ne dau

$$\theta = P e^{(-h+ai)t} + Q e^{(-h-ai)t}.$$

Însă

$$e^{ati} = \cos at + i \sin at$$

$$e^{-ati} = \cos at - i \sin at$$

deci

$$\theta = e^{-ht} \left[ (P + Q) \cos at + i (P - Q) \sin at \right]$$

sau încă

$$(4) \quad \theta = e^{-ht} (A \cos at + B \sin at)$$



punând

$$P + Q = A, \quad i(P - Q) = B$$

A și B fiind constante arbitrare. Valorile acestor constante sunt date de ecuația (4) și următoarea dedusă prin derivare

$$(5) \quad \frac{d\theta}{dt} = e^{-ht} \left[ (aB - hA) \cos at - (hB + aA) \sin at \right]$$

în care vom face, potrivit condițiilor inițiale,

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Obținem astfel

$$A = \theta_0, \quad B = \frac{h}{a} \theta_0$$

și introducând aceste valori în (4) și (5) găsim

$$(4)^{bis} \quad \theta = \theta_0 e^{-ht} \left( \cos at + \frac{h}{a} \sin at \right)$$

$$(5)^{bis} \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{h^2 + a^2}{a} \theta_0 e^{-ht} \sin at.$$

Aceste ecuații determină în fie-ce moment poziția pendulului și viteza sa unghiulară.

La sfârșitul fiecărei oscilații, avem  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , ceea ce are loc pentru  $at = n\pi$ . Oscilațiile sunt deci izocrone, ca și în vid, și durata unei oscilații este

$$T = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - h^2}}.$$

Vedem că această durată crește odată cu  $h$ , deci este cu atât mai mare cu cât mediul este mai rezistent.

Amplitudinea oscilațiilor descrește necontenit. Fie  $\alpha_n$  amplitudinea oscilației a  $n^a$ , la sfârșitul căreia  $at = n\pi$ . Vom avea, în valoare absolută, potrivit formulei (4)<sup>bis</sup>:

$$\alpha_n = \theta_0 e^{-\frac{nh\pi}{a}}$$



ceea ce arată că amplitudinele formează o progresie geometrică descrescătoare a căreia rație este  $e^{-\frac{h\pi}{a}}$ .

### III. PENDULUL CICLOIDAL.

1. Să reamintim o proprietate a cicloidei, care se demonstrează în cursul de Analiză.

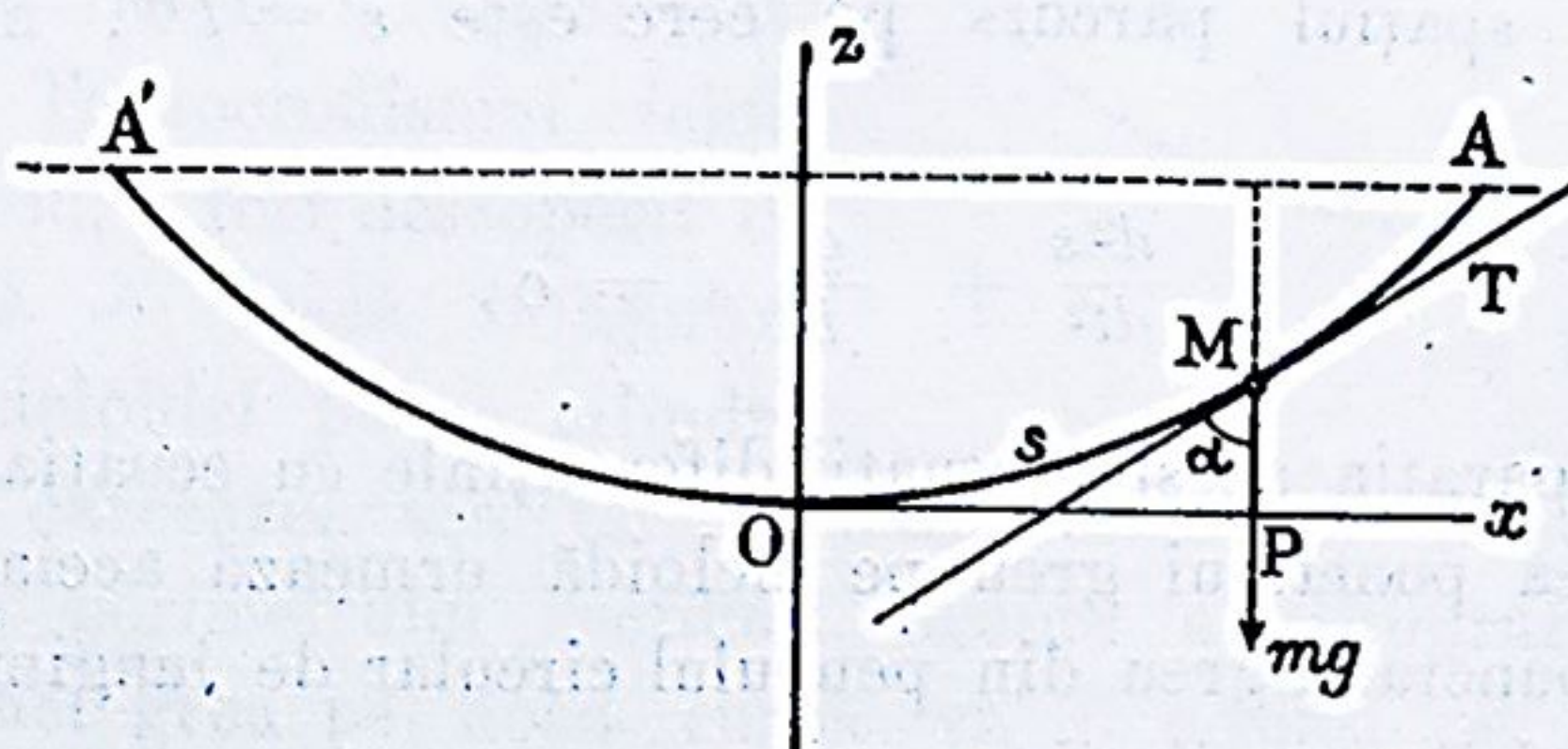


Fig. 65

Fie Oz axul cicloidei și Ox tangenta în punctul O.

Dacă însemnăm prin  $s$  arcul coprins între punctul O și un punct oarecare M al curbei, prin  $z$  ordonata MP a punctului M și prin  $a$  raza cercului generator, avem relația

$$(1) \quad s^2 = 8az.$$

Să considerăm acum mișcarea unui punct greu pe cicloidă, axul Oz fiind presupus vertical. Vom lua punctul O ca origină a spațiilor  $s$  parcurse de mobil.

Fie  $\alpha$  unghiul pe care-l face tangenta în M la cicloidă, dusă în sensul arcurilor crescătoare, cu axul Oz. Proiecția mișcării pe tangenta MT ne dă

$$(2) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \cos \alpha.$$

Însă

$$\cos \alpha = \frac{dz}{ds} \text{ și din relația (1) rezultă } \frac{dz}{ds} = \frac{s}{4a};$$



Ecuația (2) se poate deci scrie

$$(3) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s = 0.$$

Să considerăm pe de altă parte un pendul circular de lungime  $l$ . În cazul oscilațiilor mici, ecuația diferențială a mișcării sale am văzut că este

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Cum spațiul parcurs pe cerc este  $s = l\theta$ , mai putem scrie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l} s = 0.$$

Comparația acestei ecuații diferențiale cu ecuația (3) arată că mișcarea punctului greu pe cicloidă urmează aceeași lege ca mișcarea punctului greu din pendulul circular de lungime  $l = 4a$ , în cazul micilor oscilații.

Mai putem zice că mișcarea pe cicloidă se execută după legea mișcării vibratoare simple, durata  $T$  a unei oscilații pendulare fiind

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Această durată este în mod riguros *independentă de poziția inițială a punctului pe cicloidă*. Așa dar, ori din ce poziție de pe cicloidă, punctul mobil, abandonat greutatei fără viteză inițială, va pune întotdeauna același timp pentru a ajunge în punctul cel mai de jos al curbei. Acest fapt a făcut să se dea cicloidei numele de *curbă tautocronă*.

Să observăm că lungimea  $l = 4a$  este tocmai lungimea razei de curbură a cicloidei în vârful ei  $O$ .

2. Pendulul cicloidal poate fi realizat în felul următor: Construim desfășuratele arcurilor  $AO$  și  $A'O$ . Ele sunt două arcuri de cicloidă  $AI$  și  $A'I$ , identice cu  $AO$  și  $A'O$  și tangente



în punctul I, centru de curbura în O al cicloidei primitive. Legăm punctul M de punctul I printr'un fir flexibil și inextensibil, de lungime egală cu IO. În poziția M de pe figură, porțiunea IT a firului se va aplica pe porțiunea IT a cicloidei IA, cealaltă porțiune TM fiind o linie dreaptă tangentă în T la arcul IA.

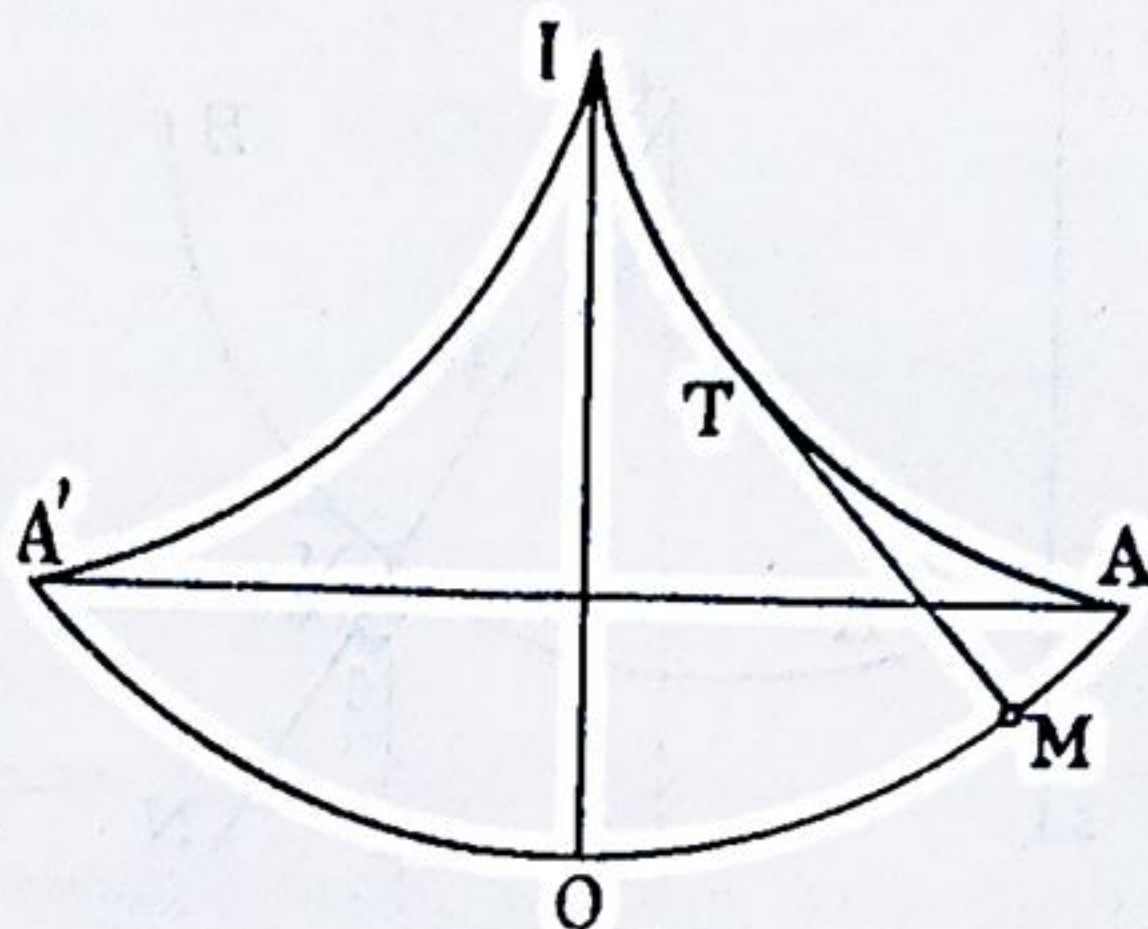


Fig. 66

3. Tautocronismul cicloidei, în vid, a fost descoperit de *Huyghens*. — Dacă înfășurăm planul cicloidei pe un cilindru vertical oarecare, așa fel ca baza cicloidei să coincidă cu o parte a perimetrului secțiunii drepte a cilindrului, mișcarea unui punct greu pe noua curbă va fi aceeași ca pe cicloidă; transformata cicloidei este deci tot o curbă tautocronă și există prin urmare o infinitate de curbe cu dublă curbura care se bucură de proprietatea tautocronismului, însă, după cum se poate demonstra, *ciclopedia este singura curbă tautocronă plană*.

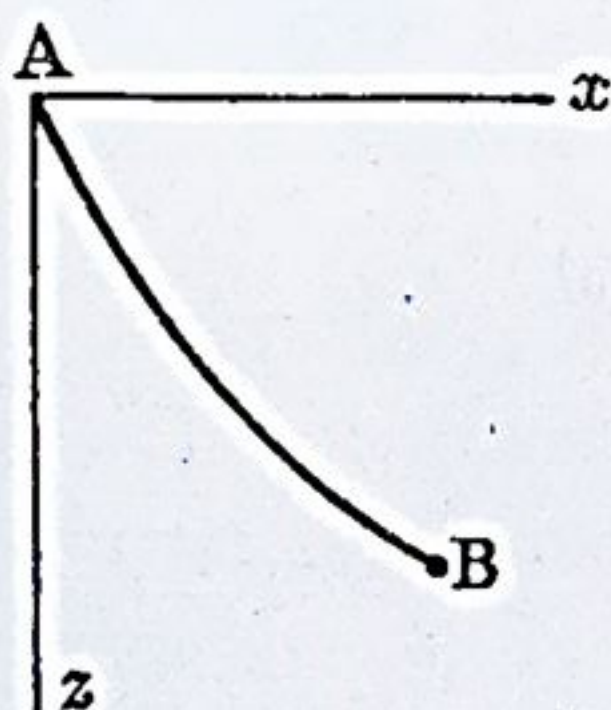


Fig. 67

**Notă.** Curba, dintr'un plan vertical, pe care alunecând fără frecare un punct greu, ce ar porni fără viteză inițială dintr'o poziție A pentru a ajunge în *minimum de timp*, într'o altă poziție B mai jos situată, se demonstrează că este tot o cicloidă. Astfel, cicloida mai este și o *curbă brahistocronă* ( $\beta\rho\alpha\chi\delta\varsigma$  scurt,  $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  timp).

#### IV. PRESIUNEA UNUI PUNCT GREU PE O CURBĂ CONȚINUTĂ ÎNTR'UN PLAN VERTICAL.

1. **Problemă.** *Un punct greu este obligat de a se mișca pe o curbă într'un plan vertical; să se calculeze presiunea punctului pe curbă.*



Fie AB curba, conținută în planul vertical  $xOz$ ; vom presupune axul  $Oz$  vertical și îndreptat în jos.

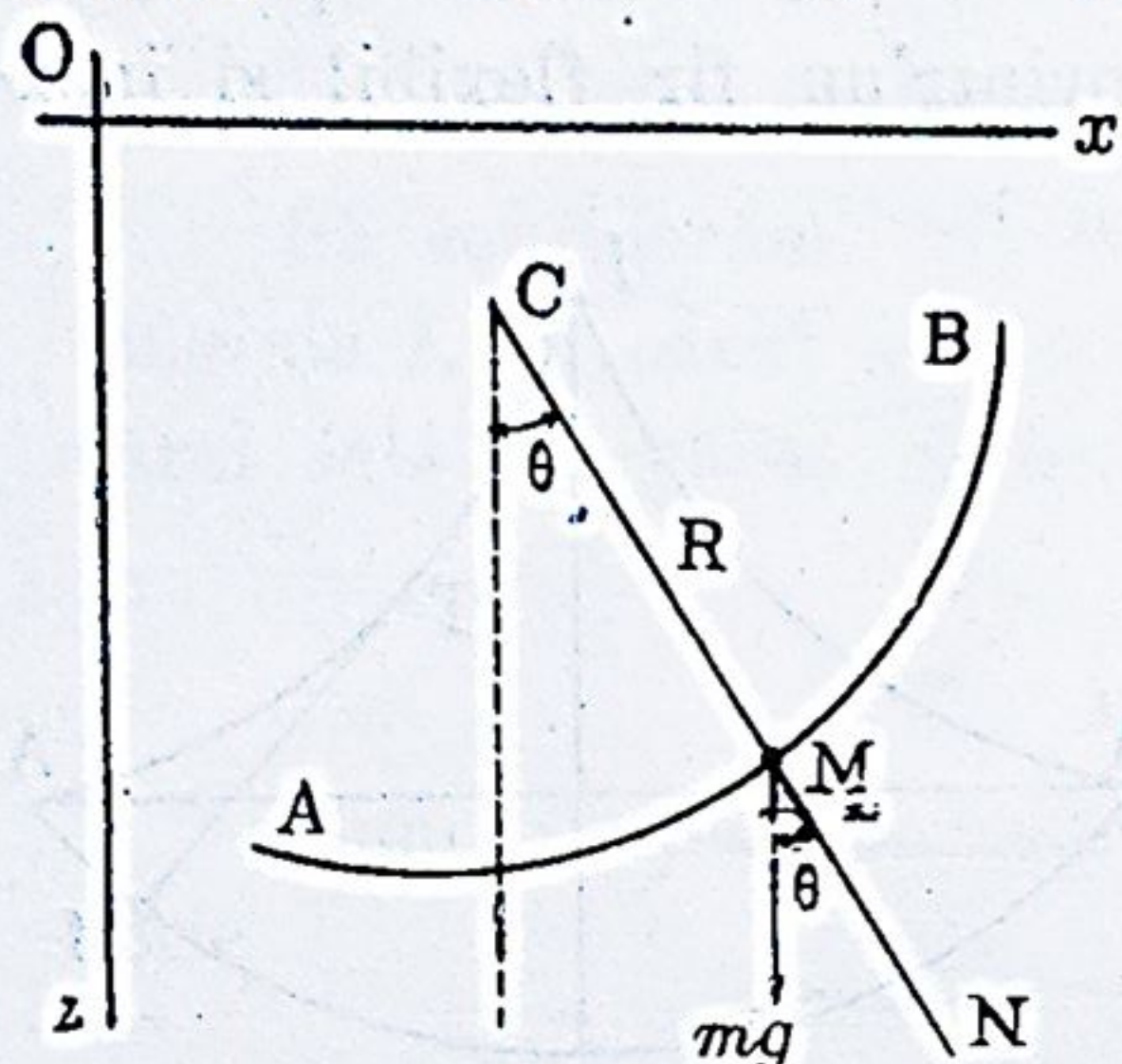


Fig. 68

Fie C centrul de curbură al curbei, corespunzător unei poziții oarecare M a mobilului.

Să însemnăm prin  $\theta$  unghiul normalei CM cu axul  $Oz$  și prin  $R$  raza de curbură CM în punctul M.

Știm că presiunea pe curbă este rezultanta componentei normale a greutateii și a forței cen-

trifuge, care îndreptată pe MN este egală cu  $m \frac{v^2}{R}$ . Deci, luând sensul MN ca sens pozitiv, presiunea are ca valoare

$$(1) \quad P = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{R}$$

și ea va fi îndreptată dela M spre N sau dela M spre C, după cum expresiunea (1) va fi pozitivă sau negativă.

Fie  $v_0, z_0$  valorile inițiale ale lui  $v$  și  $z$ . Avem, prin teorema forțelor vii,

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mg(z - z_0)$$

adică

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$$

sau încă

$$(2) \quad v^2 = 2g(z + h)$$

punând pentru prescurtare

$$(3) \quad v_0^2 - 2gz_0 = 2gh.$$

Purtând valoarea (2) a lui  $v^2$  în formula (1) se obține

$$(4) \quad P = mg \left[ \cos \theta + \frac{2(z + h)}{R} \right].$$



Dacă în loc de a fi complet legat curbei, punctul este numai așezat pe ea, atunci pentru ca punctul să nu părăsească curba, o condiție urmează a fi îndeplinită și anume:

dacă punctul este așezat pe concavitate, trebuie ca presiunea să fie îndreptată în sensul MN și deci să avem

$$\cos \theta + \frac{2(z+h)}{R} > 0;$$

dacă punctul este așezat pe convexitate, trebuie ca presiunea să fie îndreptată în sensul MC și prin urmare

$$\cos \theta + \frac{2(z+h)}{R} < 0.$$

Punctele unde presiunea este nulă sunt acelea unde presiunea schimbă de semn și prin urmare mobilul părăsește curba. Aceste puncte satisfac condiției

$$\cos \theta + \frac{2(z+h)}{R} = 0$$

sau potrivit lui (1)

$$mg \cos \theta = -m \frac{v^2}{R}$$

egalitate care exprimă că în punctele considerate componenta normală a greutății este egală și direct opusă forței centrifuge, adică se confundă cu forța centripetă.

Când punctul părăsește curba AB, el descrie o parabolă SD care are cu curba în punctul S un contact de ordinul al doilea, pentru că în acest punct ambele curbe au aceeași tangentă și aceeași rază de curbură.

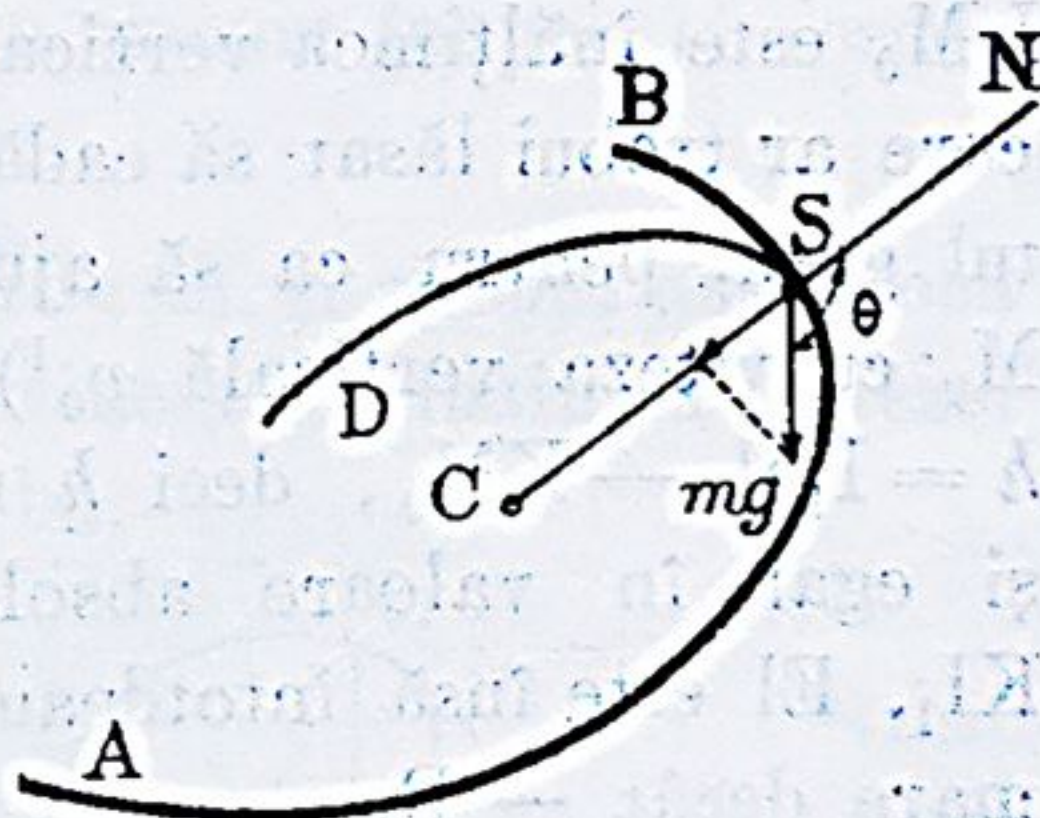


Fig. 69

În adevăr,  $m \frac{v^2}{R}$  are în punctul S aceeași valoare pentru amândouă curbele<sup>1)</sup>, și cum  $v$  este același,  $R$  trebuie să fie și el același.

<sup>1)</sup> Căci în punctul S. al curbei AB, presiunea  $P$  fiind nulă, avem  $-m \frac{v^2}{R} = mg \cos \theta$ , iar în același punct S al mișcării libere pe parabola SD, însemnând prin  $R'$  raza de curbură respectivă, forța centripetă  $-\frac{mv^2}{R'}$  fiind egală cu proiecția lui  $mg$  pe normală, are ea valoare tot  $mg \cos \theta$ .



2. Exemplu. Mișcarea unui punct greu, așezat în concavitatea unui cerc vertical și care pleacă dintr'un punct dat cu o viteză dată.

Să așezăm origina axelor în centrul cercului. Insemnând prin  $R$  raza cercului, avem

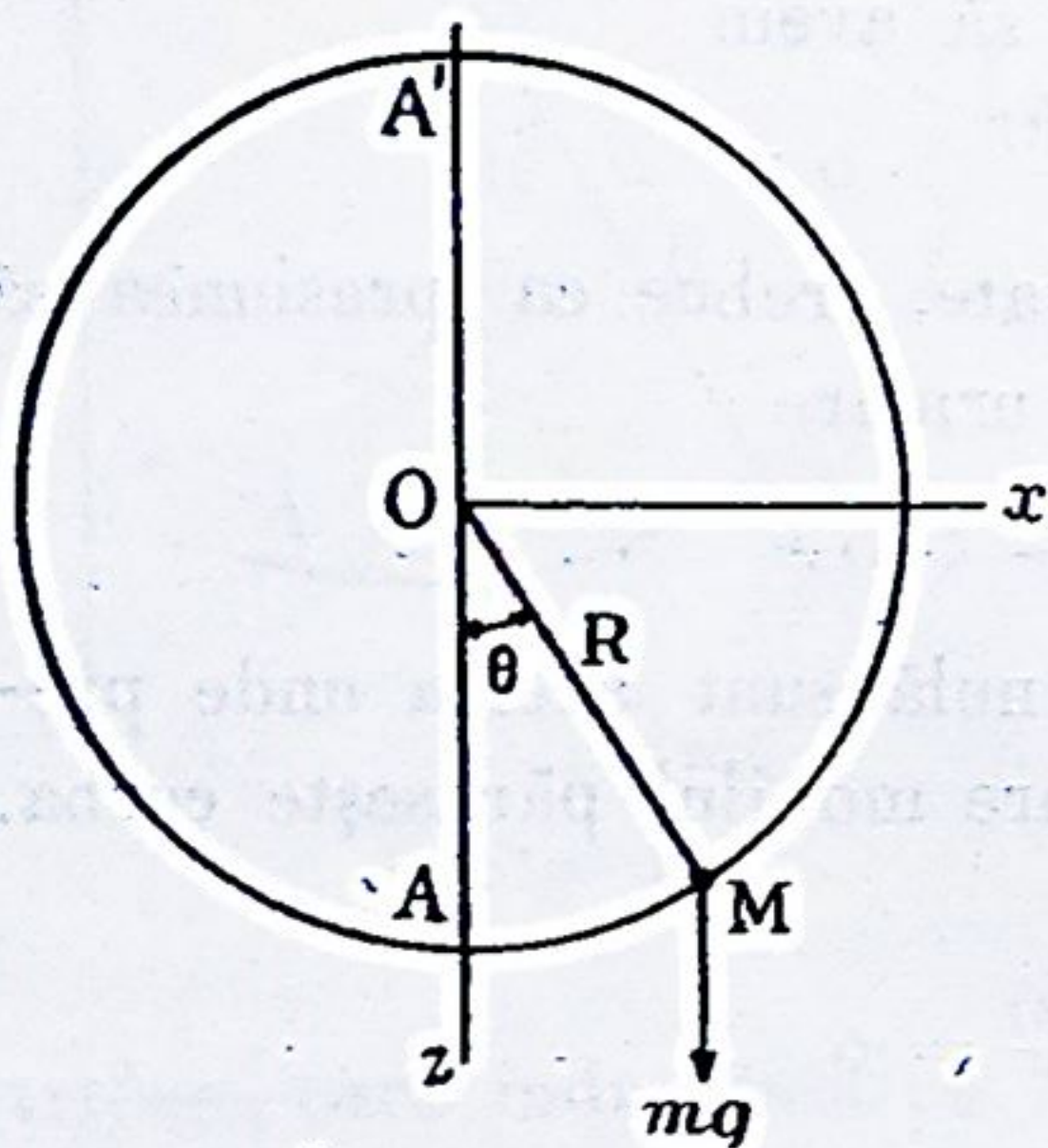


Fig. 70

$$z = R \cos \theta \quad \text{deci} \quad \cos \theta = \frac{z}{R}$$

și, ca urmare, potrivit formulei (4)

$$(5) \quad P = \frac{mg}{R} (3z + 2h)$$

cu relația de mai sus

$$(6) \quad v^2 = 2g(z + h).$$

Cantitatea  $h$  care figurează în aceste expresiuni este egală, potrivit formulei (3) cu  $\frac{v_0^2}{2g} = z_0$

și poate fi pozitivă sau negativă.

Pe figura alăturată dacă  $I_1M_0$  este înălțimea verticală dela care ar trebui lăsat să cadă punctul greu, pentru ca să ajungă în  $M_0$  cu viteza verticală  $v_0^1$ ), avem  $h = I_1M_0 - KM_0$ , deci  $h$  negativ și egal în valoare absolută cu  $KI_1$ . El este însă întotdeauna mai mare decât  $-R$ .

Pentru celelalte puncte  $I_2, I_3, \dots$ , situate deasupra lui  $Ox$ ,  $h$  este pozitiv :

$$h = I_2M_0 - KM_0 = KI_2, \text{ etc.}$$

Luând deci ca origină punctul  $K$ , sensul  $KM_0$  va corespunde, lui  $h$  negativ, iar sensul  $KI_2$  lui  $h$  pozitiv.

Aceasta fiind stabilit, observăm mai întâi că  $v$  se anulează

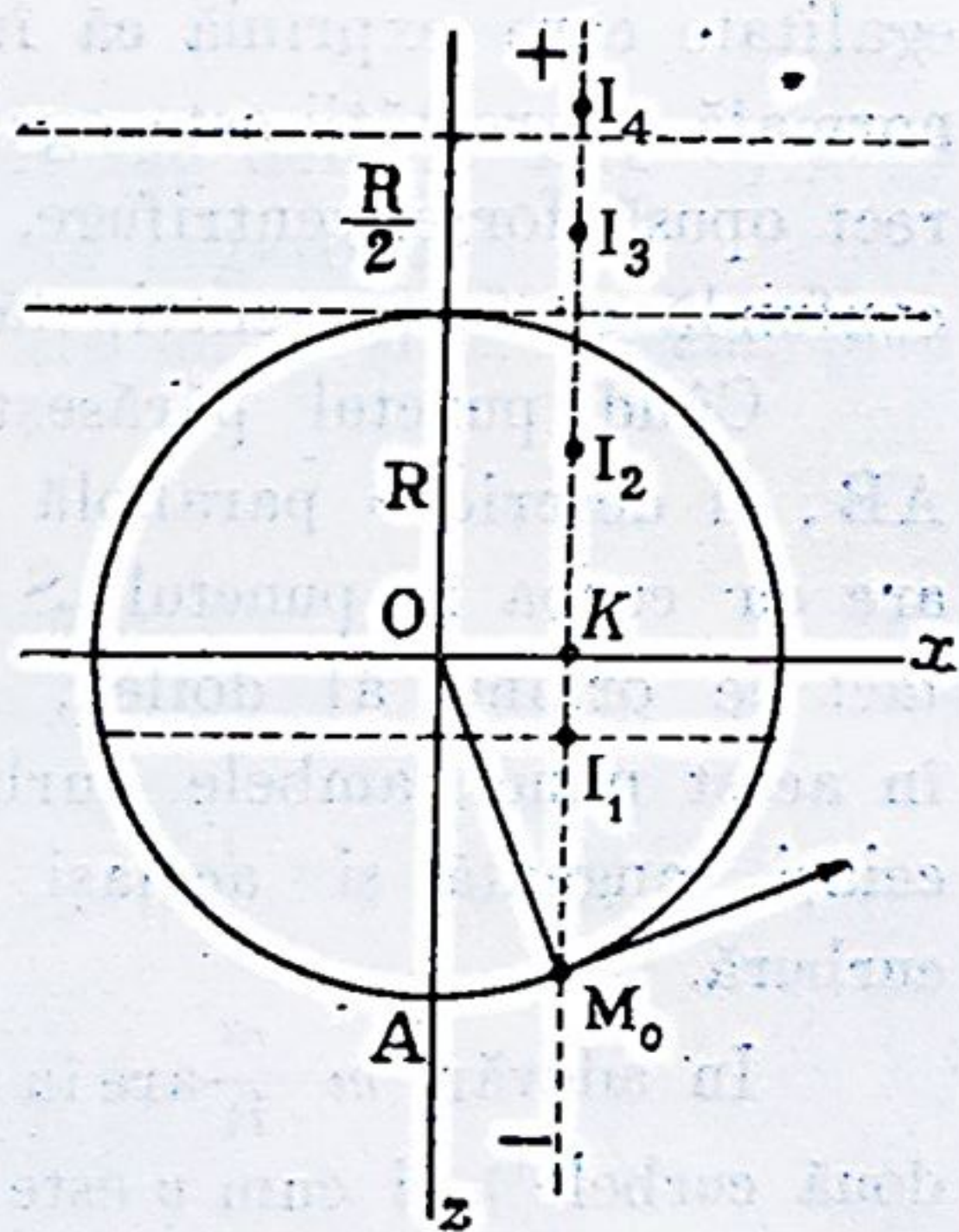


Fig. 71

<sup>1)</sup> Egală numai ca mărime cu  $v_0$  din  $M_0$ .



pentru valoarea  $z_1 = -h$  care, ca să existe ca ordonată de cerc, trebuie să fie cuprinsă între  $-R$  și  $+R$ , deci

$$-R < -h < R \quad \text{sau} \quad -R < h < R$$

ceea ce revine numai la condiția  $h < R$  deoarece  $h$  este mai mare ca  $-R$ .

Observăm de asemenea că presiunea  $P$  se anulează pentru valoarea  $z_2 = -\frac{2}{3}h$  care, ca să existe ca ordonată a cercului, trebuie să satisfacă condiției

$$-R < -\frac{2}{3}h < R \quad \text{sau} \quad -\frac{3}{2}R < h < \frac{3}{4}R$$

ceea ce revine numai la condiția  $h < \frac{3}{2}R$ .

Sunt prin urmare 4 cazuri de examinat:

$$h < 0, \quad 0 < h < R, \quad R < h < \frac{3}{2}R, \quad h > \frac{3}{2}R.$$

1°.  $h < 0$ . Punctul  $I_1$ . Valorile  $z_1$  și  $z_2$  sunt amândouă pozitive și  $z_1 > z_2$ . Deci viteza devine nulă mai înainte ca presiunea să se anuleze. Mobilul se întoarce prin urmare înapoi și descrie o mișcare oscilatoare.

2°.  $0 < h < R$ . Punctul  $I_2$ . Valorile  $z_1$  și  $z_2$  sunt amândouă negative și  $z_2 > z_1$ . Deci presiunea devine nulă înaintea vitezei și prin urmare mobilul părăsește curba.

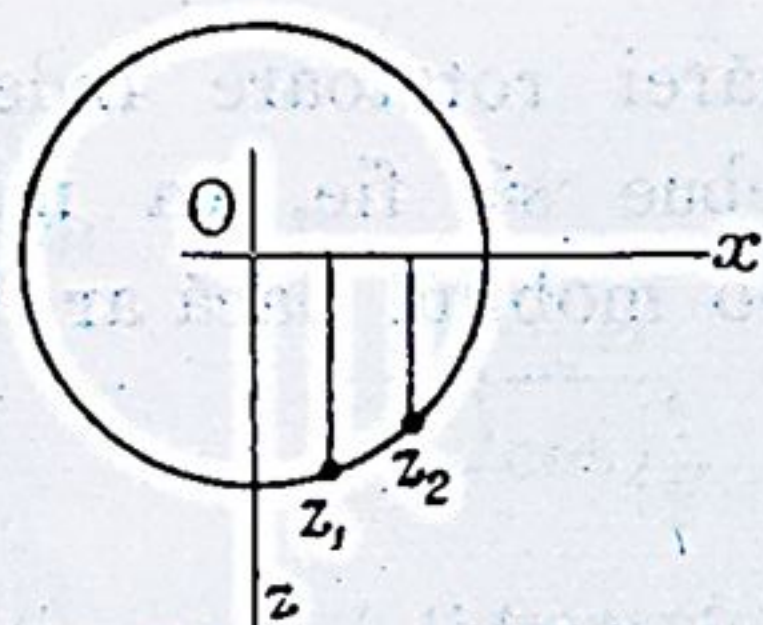


Fig. 72

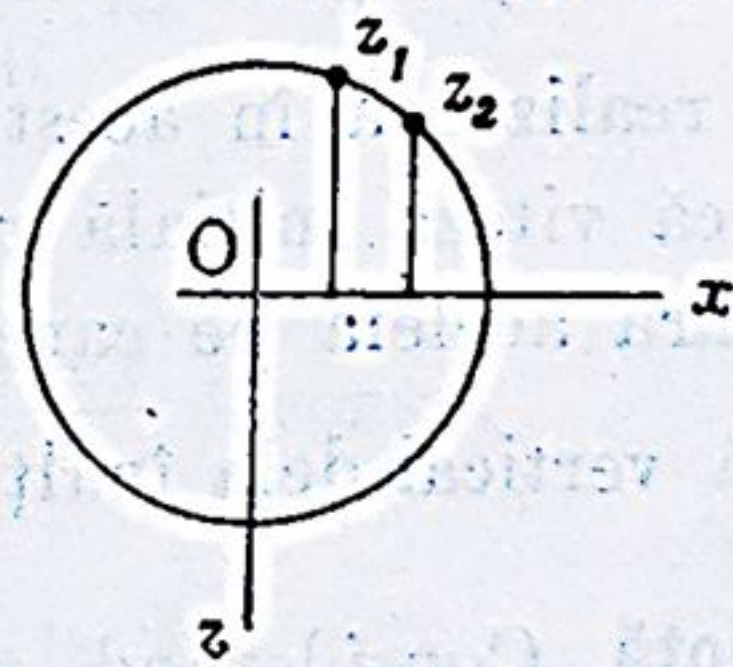


Fig. 73

3°.  $R < h < \frac{3}{2}R$ . Punctul  $I_3$ . Valoarea  $z_1$  nu există, deoarece ea pretinde condiția  $h < R$ . Viteza nu se anulează deci niciodată. Există însă  $z_2$  și pentru această valoare a lui  $z$ , presiunea anulându-se, mobilul părăsește curba.



4°.  $h > \frac{3}{2} R$ . Punctul  $I_4$ . Nu există nici  $z_1$ , nici  $z_2$ . Nici viteza, nici presiunea nu se anulează și în consecință mobilul parcurge circumferința de un număr indefinit de ori.

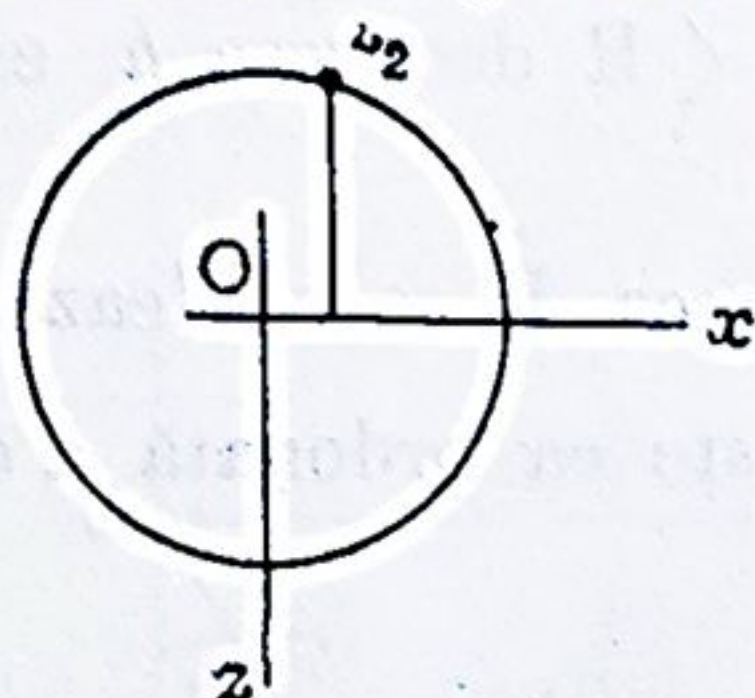


Fig. 74

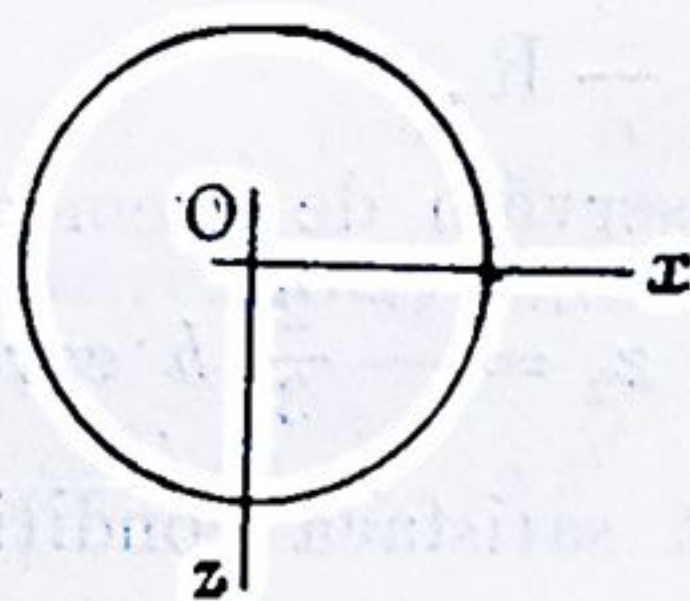


Fig. 75

În rezumat, putem spune că:  
 dacă  $h < 0$  mișcarea este oscilatoare,  
 „  $0 < h < \frac{3}{2} R$  mobilul părăsește curba,  
 „  $h > \frac{3}{2} R$  avem mișcare rotatoare indefinită.

În cazul particular când mobilul pornește din punctul cel mai de jos A, cu viteza  $v_0$ , atunci

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - R$$

și cele 3 feluri de mișcări vor avea loc după cum  $\frac{v_0^2}{2g}$  va fi mai mic decât  $R$ , cuprins între  $R$  și  $\frac{5}{2} R$  sau mai mare decât  $\frac{5}{2} R$ . Pentru realizarea în acest caz a mișcării rotatoare indefinite, vedem că viteza inițială  $v_0$  din A trebuie să fie, ca mărime, superioară aceleia pe care ar dobândi-o mobilul dacă ar fi lăsat să cadă vertical dela înălțimea  $\frac{5}{2} R$ .

**Notă.** Considerând tot cazul când mobilul pornește din punctul A cu viteza  $v_0$ , vom observa, că dacă mobilul nu poate părăsi curba, atunci potrivit formulei

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - R)$$

viteza  $v$  se anulează pentru valoarea

$$z = R - \frac{v_0^2}{2g}$$



care, pentru a corespunde unei ordonate a cercului, trebuie să fie mai mare sau cel puțin egală cu  $-R$ , deci

$$R - \frac{v_0^2}{2g} \geq -R$$

de unde

$$v_0^2 \leq 4gR.$$

În cazul contrariu, viteza nu se anulează niciodată<sup>1)</sup>. Ea descrește necontenit până în punctul  $A'$ , apoi crește, trecând prin aceleași valori ca la suirea până în  $A'$ .

Să considerăm în particular cazul când  $v_0^2 = 4gR$ .

În acest caz, viteza  $v$  se anulează în punctul  $A'$  de ordonată  $z = -R$ . Să calculăm timpul pe care îl va pune mobilul ca să se suie din  $A$  până în  $A'$ .

Formula de mai sus ne dă

$$\left(R \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4gR + 2g(R \cos \theta - R)$$

adică

$$R \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(1 + \cos \theta) = 4g \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

deci

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot dt$$

și, cum

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = -\text{Log tg } \frac{\pi - \theta}{4} + \text{const.}$$

rezultă, pentru intervalul dela  $\theta = 0$  la  $\theta = \pi$ ,

$$-\text{Log tg } \frac{\pi - \theta}{4} + \text{Log tg } \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t$$

<sup>1)</sup> Dând lui  $v_0$  o valoare mai mare decât  $4gR$  și căutând valoarea lui  $z$  pentru care  $v$  se anulează, se găsește un  $z$  negativ mai mic decât  $-R$  care nu corespunde astfel nici-unui punct de pe cerc.

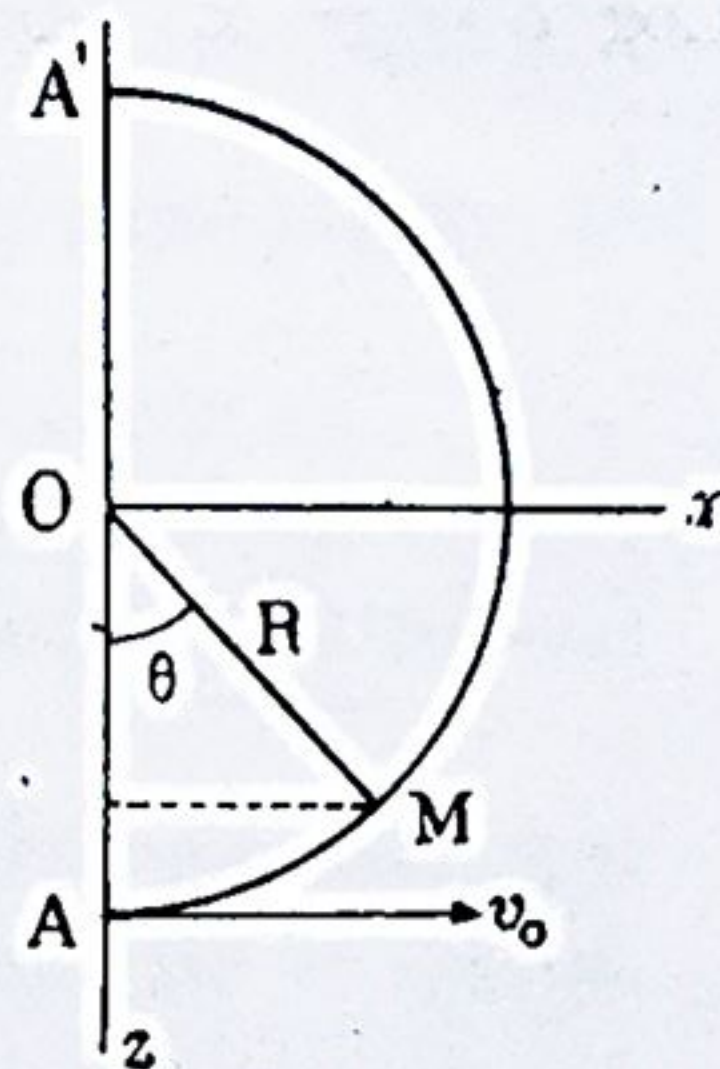


Fig. 76

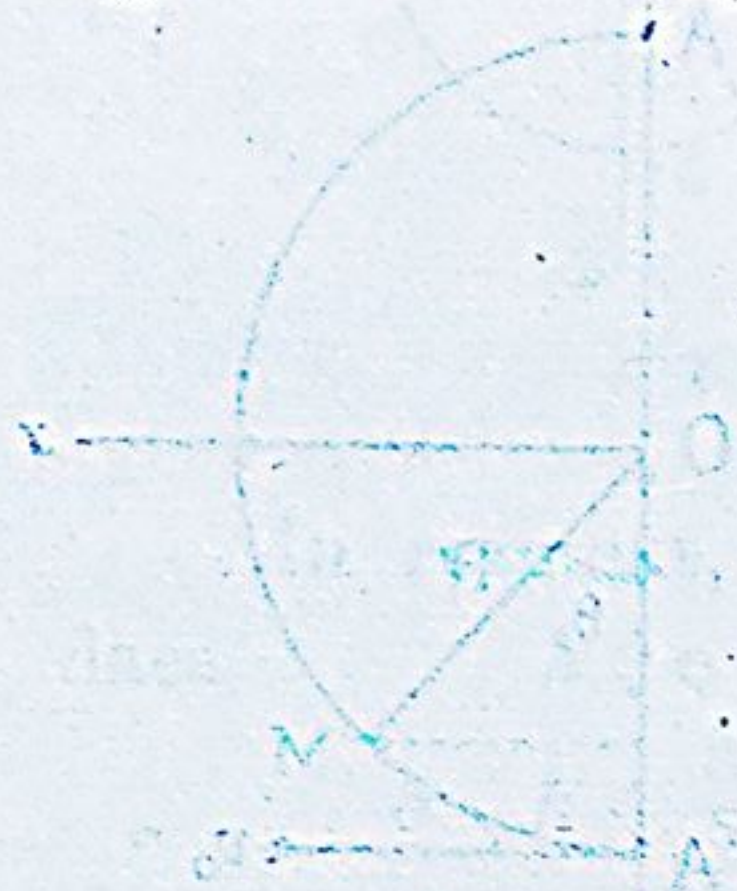


egalitate, care se reduce la

$$\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t = -\text{Log tg} \frac{\pi - \theta}{4}$$

de oarece  $\text{Log tg} \frac{\pi}{4} = \text{Log } 1 = 0$ .

Vedem, că dacă facem pe  $\theta$  să tindă către  $\pi$ , ceea ce corespunde atingerii poziției  $A'$ , găsim  $t = \infty$ , căci  $\text{tg } 0 = 0$  și  $\text{Log } 0 = -\infty$ . Așa dar, mobilul nu va ajunge niciodată în  $A'$ .





### III. EXEMPLE DE ECHILIBRU ȘI MIȘCARE RELATIVĂ.

Echilibrul și mișcarea unui punct la suprafața pământului.

1. **Considerațiuni generale.** Pământul este animat de o mișcare de translație în jurul soarelui și de o mișcare de rotație uniformă în jurul unui ax de direcție fixă trecând prin centrul său.

Echilibrul unui punct la suprafața pământului este deci un echilibru relativ, după cum de asemenea mișcările ce observăm pe glob sunt mișcări relative.

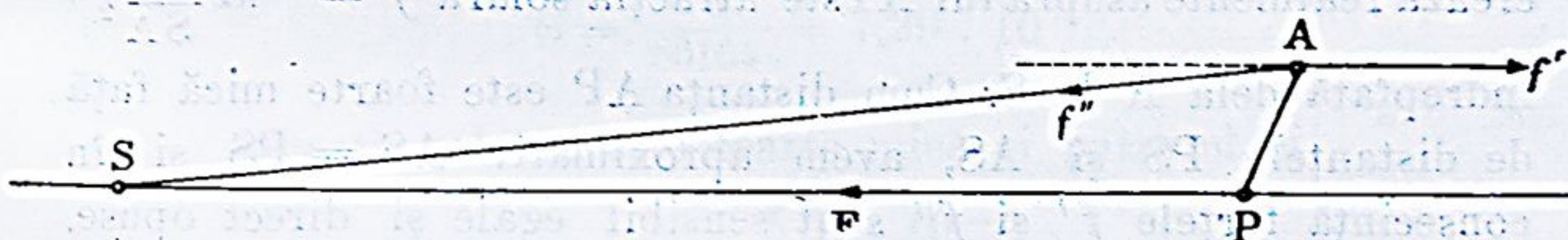


Fig. 77

Să căutăm care sunt forțele aparente ce trebuiesc alăturate forțelor realmente aplicate, pentru ca să putem trata echilibrul și mișcările relative despre care este vorba ca un echilibru și mișcări absolute față de pământ.

Să considerăm mai întâi translațiunea în jurul soarelui. Fie S soarele, P pământul concentrat în centrul său de greutate, și A un punct de pe pământ.

Pentru ca să putem trata mișcarea punctului ca o mișcare absolută față de un sistem de axe invariabil legate pământului, trebuie să alăturăm forțelor care lucrează realmente asupra punctului, forța de inerție de antrenare și forța centrifugă compusă. Aceasta din urmă este însă nulă, de oare-ce mișcarea



sistemului mobil este o translație. Forța de inerție de antrenare este egală cu accelerația lui P, luată în sens contrariu, înmulțită cu masa punctului (căci în translație, toate punctele au aceeași accelerație). Cum forța care lucrează asupra lui P este atracția solară

$$F = -f \cdot \frac{M' \cdot M}{SP^2}$$

unde am însemnat prin  $M'$  și  $M$  masele soarelui și pământului, accelerația lui P are ca valoare

$$w = \frac{F}{M} = -f \cdot \frac{M'}{SP^2}$$

și, în consecință, forța de inerție de antrenare corespunzătoare punctului A de masă  $m$ , este

$$f' = +f \cdot \frac{M' m}{SP^2}$$

direcția ei fiind paralelă cu SP. Ori, una din forțele care lucrează realmente asupra lui A este atracția solară  $f'' = -k \cdot \frac{M' m}{SA^2}$ ,

îndreptată dela A la S. Cum distanța AP este foarte mică față de distanțele PS și AS, avem aproximativ  $AS = PS$  și în consecință forțele  $f'$  și  $f''$  sunt sensibil egale și direct opuse.

Rezultă astfel, că pentru a ține seama de mișcarea de translație a pământului, și tot deodată de atracția punctului de către soare, ar trebui să introducem o forță extrem de mică rezultantă a celor 2 forțe  $f'$  și  $f''$  de mai sus; această rezultantă variază de altfel necontenit, în mărime și în direcție, căci poziția punctului în raport de soare se modifică în fie ce moment; ea antrenează o variațiune foarte mică a intensității greutății și a direcției verticalei; se poate însă în majoritatea cazurilor să se negligeze această forță perturbatrice.

Raționamentul pe care l'am făcut mai sus, poate fi repetat pentru a studia și efectul atracției lunare. Luna are un efect foarte slab, este adevărat, asupra translațiunii pământului, totuși rezultanta celor două forțe analoage forțelor  $f'$  și  $f''$  de mai sus, care constituie o nouă forță perturbatrice, deși foarte



mică, este superioară rezultantei forțelor  $f'$  și  $f''$ , din cauza distanțelor mai mici până la lună.

Cele două forțe perturbatrice nu produc decât variațiuni insensibile asupra intensității greutății și direcției verticalei; totuși ele sunt acelea cărora se datorează fenomenul mareelor <sup>1)</sup>, și din cele spuse se înțelege de ce atracția lunară are în acest fenomen un rol mai important.

*In rezumat: este permis, în general, când se studiază echilibrul sau mișcarea unui punct la suprafața pământului, să neglijăm mișcarea de translație în jurul soarelui, odată cu atracția solară și lunară și atunci, alături de forțele direct aplicate, nu vor mai fi de introdus decât atracția terestră și forțele fictive corespunzând mișcării de rotație în jurul liniei polurilor.*

**2. Viteza unghiulară de rotație a pământului.** Cum pământul pune 86164 secunde (durata zilei siderale) ca să facă o rotație întreagă în jurul liniei polurilor, avem

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \cdot 10^{-5}.$$

Această valoare este foarte mică și patratul ei

$$\omega^2 = 5,31 \cdot 10^{-9}$$

este astfel că înmulțit cu o cantitate de ordinul acelor ce se întâlnesc în problemele terestre, dă o valoare tot foarte mică, al căreia patrat poate, în general, să fie neglijat.

Așa spre exemplu, produsul lui  $\omega^2$  cu raza terestră, are ca valoare  $\omega^2 R = 3,385 \cdot 10^{-2}$  și patratul acestui număr  $\omega^4 R^2 = 1,146 \cdot 10^{-3}$  va putea fi, în general, neglijat.

## **I. ECHILIBRUL APARENT AL UNUI PUNCT MATERIAL.**

1. Să considerăm un punct M în echilibru pe un plan orizontal. Punctul se găsește în echilibru sub acțiunea:

<sup>1)</sup> Acest fenomen este cu deosebire datorit denivelării pe care o produce variațiunea direcției verticalei.



1° a atracției terestre  $MP$ , îndreptată spre centrul pământului;

2° a acțiunii normale  $MN$  a planului asupra punctului;

3° a forței de inerție de antrenare  $MC$  (forța centrifugă compusă fiind nulă în cazul echilibrului relativ).

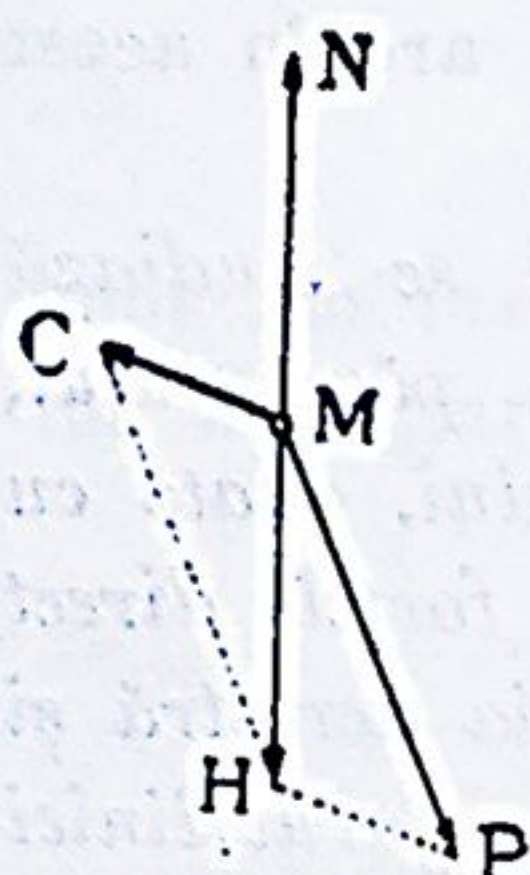


Fig. 78

Cum mișcarea de rotație este uniformă, accelerația de antrenare este centripetă și egală cu  $-\omega^2 r$ ,  $r$  fiind raza paralelei pe care se află situat punctul, deci forța de inerție de antrenare este centrifugă și egală cu  $+m\omega^2 r$ . Greutatea fiind egală și direct opusă acțiunii  $MN$  a planului asupra punctului, figura ne arată că valoarea ei,  $MH$ , este rezultanta atracției terestre și a forței centrifuge.

2. Intensitatea și direcția greutateii. Să presupunem pământul ca sferic și omogen. Fie:

$O$ , centrul pământului,

$M$ , un punct de la suprafața sa,

$SN$ , linia polurilor,

$EE'$ , ecuatorul.

Să însemnăm prin  $R$  raza terestră și prin  $\theta$  unghiul razei vectoare  $OM$  cu ecuatorul. Atracția terestră  $MP$  trece prin  $O$ ; fie  $mG$  intensitatea ei.

Forța centrifugă  $MC$  este perpendiculară pe  $SN$  și are ca valoare absolută  $m\omega^2 r$ ,  $r$  fiind distanța punctului  $M$  la axul de rotație. Însfârșit greutatea este reprezentată prin rezultanta  $MH$  a vectoarelor  $MP$  și  $MC$ ; fie  $mg$  intensitatea ei.

In triunghiul  $MPH$  să considerăm ca cunoscut latura  $MP$  egală cu  $mG$ , latura  $PH$  egală cu  $m\omega^2 r$  sau  $m\omega^2 R \cos \theta$ , și unghiul  $MPH$  egal cu  $\theta$ . Avem

In triunghiul  $MPH$  să considerăm ca cunoscut latura  $MP$  egală cu  $mG$ , latura  $PH$  egală cu  $m\omega^2 r$  sau  $m\omega^2 R \cos \theta$ , și unghiul  $MPH$  egal cu  $\theta$ . Avem

$$MH = \sqrt{MP^2 + PH^2 - 2MP \cdot PH \cos \theta}$$

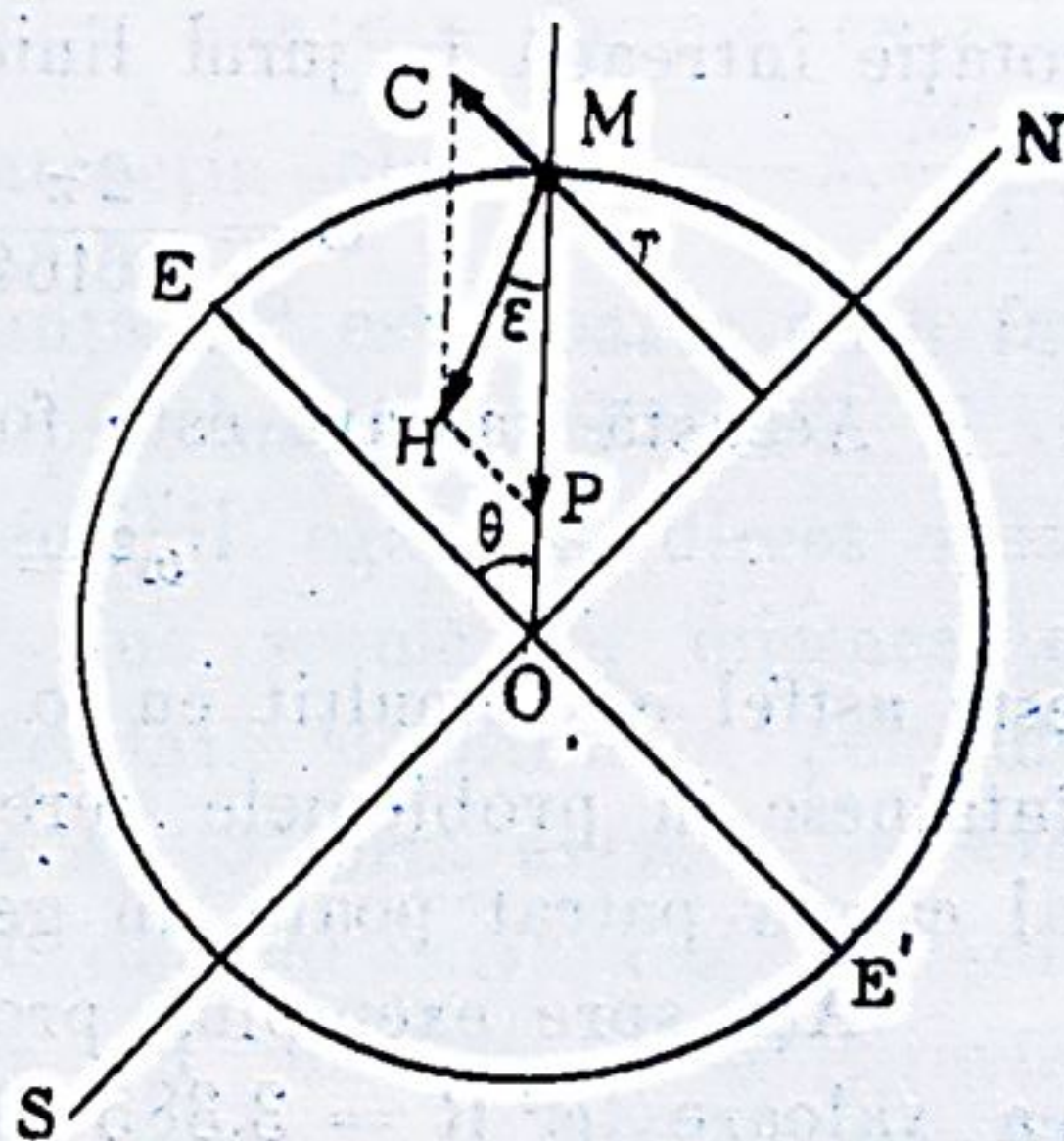


Fig. 79



adică

$$g = \sqrt{G^2 + \omega^4 R^2 \cos^2 \theta - 2 G \cdot \omega^2 R \cos^2 \theta}$$

și

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \theta} = \frac{\omega^2 R \cos \theta}{g}.$$

Dacă sub radical, înlocuim cantitatea neglijabilă  $\omega^4 R^2 \cos^2 \theta$  prin cantitatea tot neglijabilă  $\omega^4 R^2 \cos^4 \theta$  obținem:

$$(1) \quad g = G - \omega^2 R \cos^2 \theta$$

și pe de altă parte, unghiul  $\varepsilon$  fiind întotdeauna foarte mic, putem scrie

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{\omega^2 R \sin 2 \theta}{2 g}.$$

Această din urmă formulă ne dă direcția verticalei în ori și ce punct al globului. Ea nu coincide cu direcția razei terestre și prin urmare planul orizontal din M nu este tangent sferei terestre.

Cu privire la formula (1), observăm că la ecuator, forța centrifugă fiind direct opusă atracțiunei terestre, avem în mod riguros

$$(3) \quad g = G - \omega^2 R.$$

Pe de altă parte, observațiunea oscilațiilor pendulului la ecuator a procurat valoarea

$$g = 9^m, 7807$$

și cum  $\omega^2 R$  este egal cu 0,0338, formula (3) ne dă

$$G = 9,7807 + 0,0338 = 9,8145.$$

Cu această valoare, formula (1) ne permite de a calcula pe  $g$  în ori ce localitate de pe pământ.

**Observație.** Formula (3) se poate scrie

$$(4) \quad g = G \left( 1 - \frac{\omega^2 R}{G} \right).$$

Avem însă în mod foarte aproximativ

$$\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}$$



de unde

$$1 - \frac{(17 \omega)^2 R}{G} = 0.$$

Rezultă deci, potrivit formulei (4) că dacă pământul s'ar învârti de 17 ori mai repede, greutatea ar fi nulă la ecuator. Dacă viteza de rotație ar fi și mai mare, forța centrifugă ar deveni mai mare decât atracția terestră și corpurile situate la ecuator ar fi asvârlite în afară.

Influența forței centrifuge, semnalată pentru prima oară de *Huyghens*, este cauza cea mai importantă a variației greutății la suprafața pământului. O altă cauză, al căreia efect a fost calculat cu precizie de către *Clairaut*, este turtirea pământului la poli.

## II. MIȘCAREA APARENTĂ A UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

1. Să considerăm mișcarea unui punct raportată la un sistem de axe antrenat cu pământul în mișcarea sa de rotație.

Această mișcare poate să fie tratată ca absolută, dacă alăturăm forțelor reale, forța de inerție de antrenare și forța centrifugă compusă. Cum forța de inerție de antrenare se reduce în cazul rotației uniforme la forța centrifugă, vom avea deci de compus:

- 1° Forțele, care în afară de atracția terestră, lucrează realmente asupra punctului; fie  $F$  rezultanta lor;
- $\left\{ \begin{array}{l} 2^\circ \text{ Atracția terestră,} \\ 3^\circ \text{ Forța centrifugă;} \end{array} \right.$
- 4° Forța centrifugă compusă.

Ori, atracția terestră și forța centrifugă au ca rezultantă greutatea punctului; deci, mișcarea aparentă a punctului este datorită forței  $F$ , greutății și forței centrifuge compuse.

2. **Ecuatiile diferențiale ale mișcării.** Intr'un loc de pe pământ, situat spre exemplu, în emisfera boreală, fie  $O$  origina fixă, în raport cu pământul, a unui sistem de coordonate dreptunghiulare.



Să luăm pe  $Oz$  îndreptat pe verticala punctului  $O$ , în sensul greutății; pe  $Ox$  orizontal, în planul meridian și îndreptat spre sud; pe  $Oy$  orizontal, perpendicular pe planul meridian și îndreptat spre est. Triedrul  $Oxyz$  este un triedru direct.

Vectorul  $\omega$  al rotațiunii terestre este îndreptat de la  $C$  la  $S$ , observatorul așezat cu picioarele în  $C$  și cu capul în  $\omega$  văzând astfel rotația pământului dela stânga spre dreapta (dela West spre Est). Mutând paralel acest vector în punctul

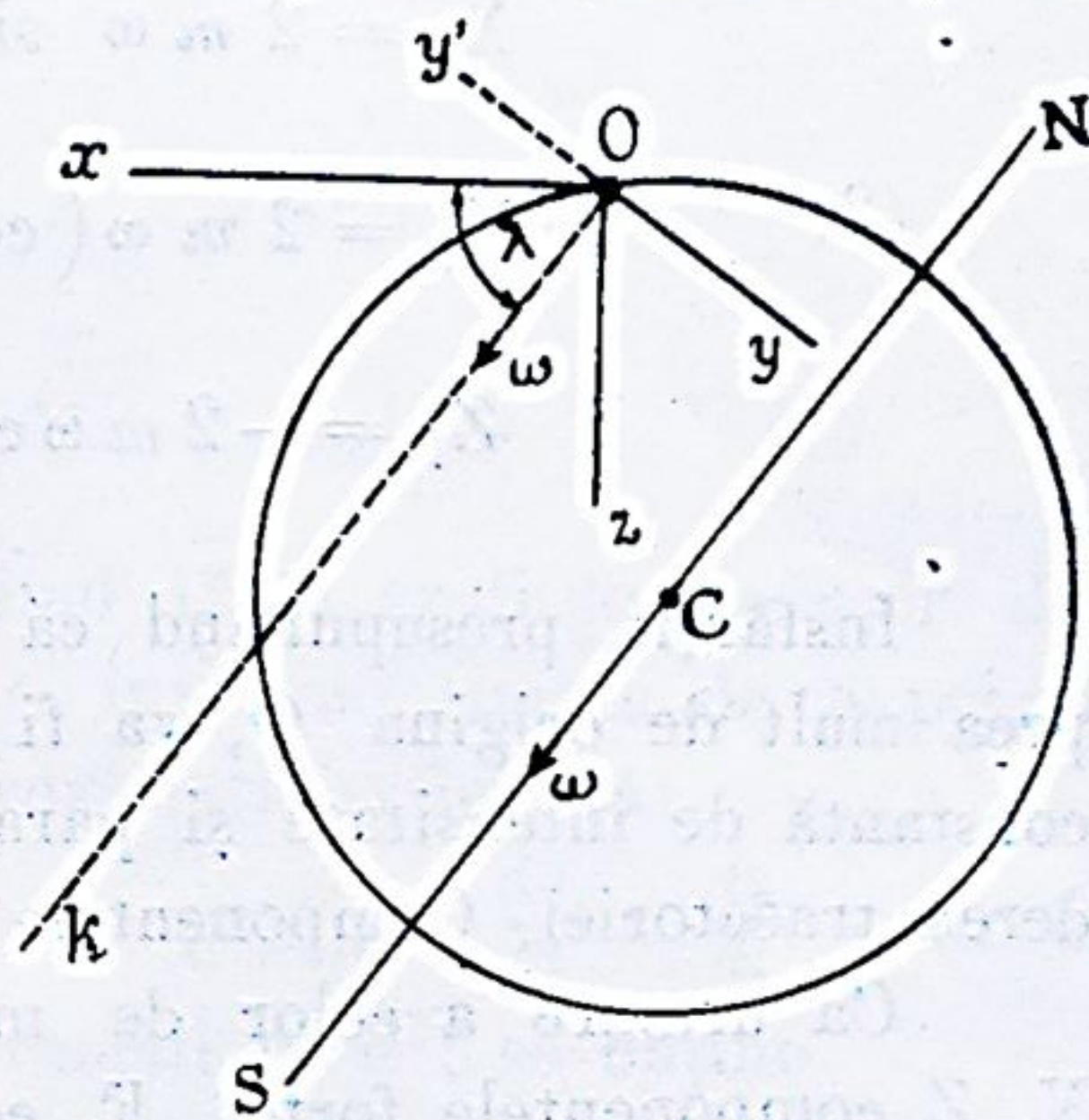


Fig. 80

$O$ , vedem, că dacă însemnăm prin  $\lambda$  latitudinea punctului  $O$ , proiecțiile lui  $\omega$  pe cele 3 axe cordonate sunt:

$$(1) \quad p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin \lambda.$$

Pe de altă parte, proiecțiile pe aceleași axe ale accelerației complementare  $w_c$  fiind după cum se știe din Cinematică<sup>1)</sup>,

$$(w_c)_x = 2 \left( q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right)$$

$$(w_c)_y = 2 \left( r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right)$$

$$(w_c)_z = 2 \left( p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right)$$

proiecțiile  $X_1, Y_1, Z_1$  ale forței centrifuge compuse vor fi

$$X_1 = -2m \left( q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right)$$

$$(1) \quad Y_1 = -2m \left( r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right)$$

$$Z_1 = -2m \left( p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right)$$

<sup>1)</sup> Cinematica, pag. 178.



expresiuni, care ținând seamă de egalitățile (1) se reduc la

$$(2) \quad \begin{aligned} X_1 &= 2 m \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ Y_1 &= 2 m \omega \left( \cos \lambda \frac{dz}{dt} - \sin \lambda \frac{dx}{dt} \right) \\ Z_1 &= -2 m \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Însfârșit, presupunând că punctul mobil nu se depărtează prea mult de origina  $O$ , va fi permis să privim greutatea ca constantă de intensitate și paralelă cu  $Oz$ , pentru toată întinderea traectoriei. Componentele greutății vor fi deci  $0, 0, mg$ .

Ca urmare a celor de mai sus, dacă însemnăm prin  $X, Y, Z$  componentele forței  $F$ , ecuațiile diferențiale ale mișcării vor fi

$$(3) \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + 2 m \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + 2 m \omega \left( \cos \lambda \frac{dz}{dt} - \sin \lambda \frac{dx}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + mg - 2 m \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

**3. Mișcarea aparentă a proiectilelor în vid.** Forța  $F$  neexistând, componentele ei  $X, Y, Z$  sunt nule. Să așezăm origina  $O$  în poziția inițială a mobilului, pentru ca  $x, y, z$  să fie nuli pentru  $t = 0$  și să însemnăm prin  $a, b, c$ , componentele inițiale ale vitezei relative.

Ecuațiile (3) de mai sus, în care nu rămân decât componentele greutății și ale forței centrifuge compuse, se scriu

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2 \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2 \omega \left( \cos \lambda \frac{dz}{dt} - \sin \lambda \frac{dx}{dt} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -2 \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} + g \end{aligned}$$



și obținem printr'o primă integrațiune

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 \omega y \sin \lambda + a \\ (5) \quad \frac{dy}{dt} &= 2 \omega (z \cos \lambda - x \sin \lambda) + b \\ \frac{dz}{dt} &= -2 \omega y \cos \lambda + gt + c. \end{aligned}$$

Ecuatiile (5) sunt de ordinul 1<sup>u</sup> și ar fi foarte ușor de a le integra în mod riguros; este însă mai simplu de a proceda în felul următor care dă o aproximație suficientă:

În ecuațiile (4) să înlocuim pe  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  prin expresiunile lor (5), neglijând termenii în  $\omega^2$ ; se obține

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2 \omega b \sin \lambda \\ (6) \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= 2 \omega (c \cos \lambda - a \sin \lambda) + 2 \omega gt \cos \lambda \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -2 \omega b \cos \lambda + g \end{aligned}$$

din care deducem, integrând de două ori,

$$(7) \quad \begin{cases} x = at + \omega bt^2 \sin \lambda \\ y = bt + \omega (c \cos \lambda - a \sin \lambda) t^2 + \frac{1}{3} \omega gt^3 \cos \lambda \\ z = ct - \omega bt^2 \cos \lambda + \frac{1}{2} gt^2. \end{cases}$$

Aceste ecuațiuni conduc la concluziuni foarte importante. Să considerăm, în particular, următoarele trei cazuri:

a). *Proectil abandonat greutateii fără viteză inițială.* Componentele  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , fiind în acest caz, nule, formulele (7) devin:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2} \omega gt^3 \cos \lambda, \quad z = \frac{1}{2} gt^2.$$

Aceste ecuațiuni arată că *dacă se abandonează un punct material, fără viteză inițială, la acțiunea greutateii, mobilul va rămâne într'un plan perpendicular meridianului (planul  $yOz$ )*







dem că ea duce punctul B spre  $Oy'$  și prin urmare forța centrifugă compusă este îndreptată pe  $Oy$ , adică spre Est.

b). *Proiectil asvârlit vertical de jos în sus, cu o viteză  $v_0$ .* În acest caz, deviația până în punctul culminant S al traectoriei are loc către West, de oarece viteza relativă  $v_r$  fiind sensibil dirijată pe  $Oz'$ , extremitatea vectorului  $2v_r$  tinde a se deplasa în virtutea rotației  $\omega$  spre  $Oy$  și deci forța centrifugă compusă are direcția  $Oy'$ .

Ecuatiile mișcării se obțin făcând  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = -v_0$  în ecuațiile (7). Găsim astfel

$$x = 0, \quad y = -\omega v_0 t^2 \cos \lambda + \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda$$

$$z = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

În vârful S al traectoriei avem  $\frac{dz}{dt} = 0$  adică  $-v_0 + g t = 0$  de unde  $t = \frac{v_0}{g}$  și prin urmare, substituind această valoare în expresiile lui  $y$  și  $z$ ,

$$OA = -\frac{2 v_0^3}{3 g^2} \omega \cos \lambda, \quad AS = -\frac{v_0^2}{2 g}$$

Insemnând prin  $h$  înălțimea ascensiunii, în valoare absolută, adică punând  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ , deviațiunea OA în funcție de  $h$  are ca expresie

$$(9) \quad OA = -\frac{2 \omega \cos \lambda}{3 g^2} \left( 2 g h \right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{4 \sqrt{2} \omega \cos \lambda}{3 \sqrt{g}} h^{\frac{3}{2}}$$

Comparația acestei valori cu aceea dată de formula (8) arată, că la egalitate de înălțime verticală  $h$ , proiectilul aruncat de jos în sus s'a deviat de 2 ori mai mult când a încetat de a se mai sui, decât proiectilul căzând fără viteză inițială; mai

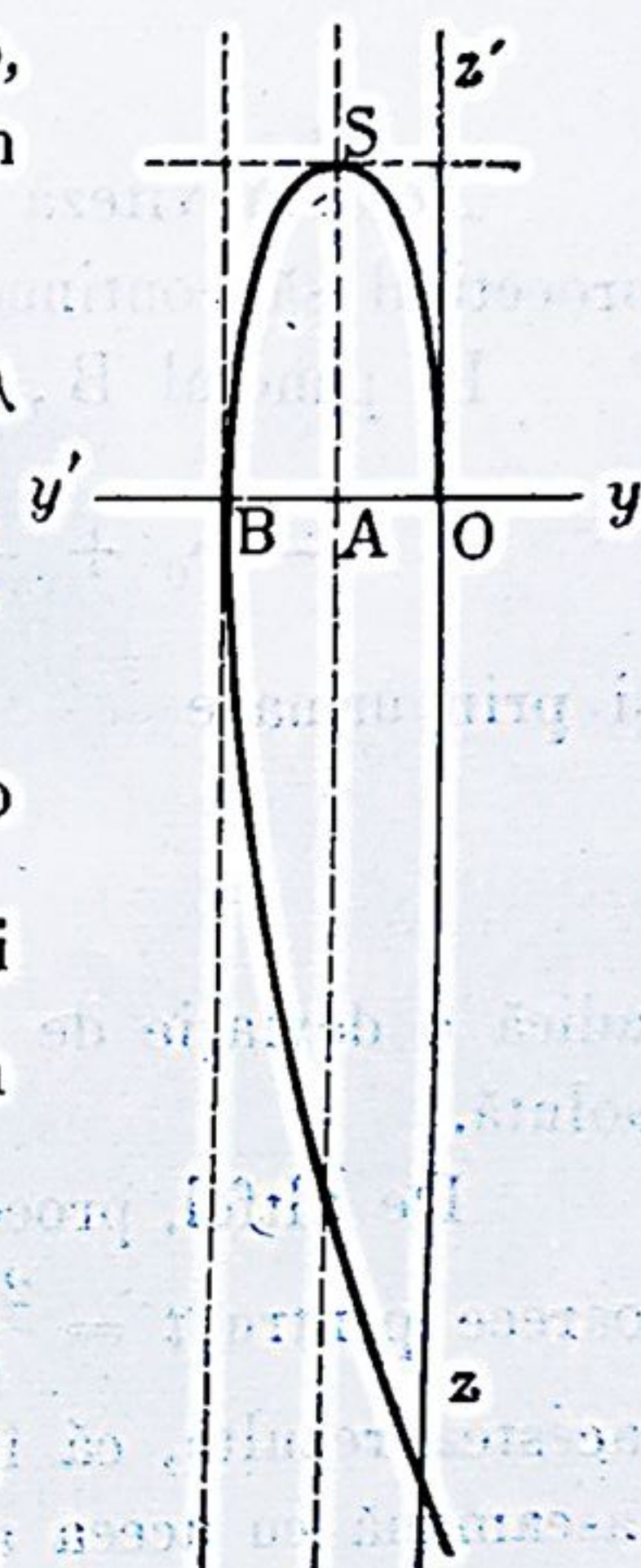


Fig. 83



mult, deviațiile au loc în sensuri contrarii, adică spre West dacă proiectilul se suie și spre Est dacă el coboară.

În punctul culminant S, viteza relativă  $v_r$ , fiind orizontală, are ca valoare

$$v_r = \frac{dy}{dt} = -2\omega v_0 t \cos \lambda + \omega g t^2 \cos \lambda$$

adică, înlocuind pe  $t$  prin valoarea sa  $\frac{v_0}{g}$ ,

$$v_r = -\frac{\omega v_0^2}{g} \cos \lambda.$$

Această viteză nefiind nulă și având sensul  $Oy'$  face ca proiectilul să continue de a devia spre West.

În punctul B,  $z$  fiind nul, avem

$$-v_0 + \frac{1}{2} g t = 0 \quad \text{deci} \quad t = \frac{2v_0}{g}$$

și prin urmare

$$OB = -\frac{4v_0^3}{3g^2} \omega \cos \lambda$$

adică o deviație de 2 ori mai mare decât OA, în valoare absolută.

De altfel, proiectilul sosește în B cu viteza verticală  $v_0$ , deoarece pentru  $t = \frac{2v_0}{g}$  avem  $\frac{dy}{dt} = 0$  și  $\frac{dz}{dt} = v_0$ . Din toate acestea rezultă, că între O și B traectoria are o formă care se aseamănă cu aceea a unei jumătăți de elipsă, simetrică în raport de săgeata AS.

Din B mai departe, dacă punctul continuă să coboare dedesubtul nivelului său primitiv, deviația descrește în valoare absolută, se anulează ( $y = 0$ ) pentru  $t = \frac{3v_0}{g}$  când  $z = \frac{3v_0^2}{2g}$  (de 3 ori săgeata AS) apoi crește neconținut în direcția Est.

În tragerile antiaeriene atmosferice, care se execută cu viteze inițiale vecine de 1000 de metri pe secundă, trebuie să se țină seama de deviația spre West a proiectilelor, care până în punctul culminant al traectoriei poate depăși cifra de 100 de metri.



c). *Proectil tras de un tun, cu viteză inițială conținută în planul perpendicular meridianului și în direcția Est.*

Fie  $v_0$  viteza inițială, coprinsă prin ipoteză în planul  $yOz$  și  $\alpha$  înclinarea ei pe axul  $Oy$ . Făcând în formulele (7)

$$a = 0, \quad b = v_0 \cos \alpha, \quad c = -v_0 \sin \alpha$$

obținem ecuațiile

$$x = \omega v_0 t^2 \cos \alpha \sin \lambda$$

$$y = v_0 t \cos \alpha - \omega v_0 t^2 \sin \alpha \cos \lambda + \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda$$

$$z = -v_0 t \sin \alpha - \omega v_0 t^2 \cos \alpha \cos \lambda + \frac{1}{2} g t^2.$$

Timpul pe care-l pune mobilul ca să recadă pe sol este dat de valoarea lui  $t$ , diferită de zero, care anulează pe  $z$ , adică

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g - 2 \omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda}$$

care se poate scrie

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \left( 1 - \frac{2 \omega v_0}{g} \cos \alpha \cos \lambda \right)} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \left( 1 - \frac{2 \omega v_0}{g} \cos \alpha \cos \lambda \right)^{-1}$$

și, neglijând termenii în  $\omega^2$ ,

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \left( 1 + \frac{2 \omega}{g} v_0 \cos \alpha \cos \lambda \right).$$

Deducem, pentru valorile corespunzătoare ale lui  $x$  și  $y$ , cu aceeași aproximație

$$x = \frac{4 \omega v_0^3 \sin \lambda}{g^2} \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha + \frac{4}{3} \frac{\omega v_0^3 \cos \lambda}{g^2} (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha.$$

Valoarea lui  $x$  reprezintă *deviația către Sud*; ea este pozitivă dacă  $\alpha$  este mai mic decât 90 de grade.

Valoarea lui  $y$  reprezintă *bătăia*; primul termen este, după cum știm, valoarea bătaiei în cazul când pământul ar sta nemiscat; termenul al doilea este pozitiv când  $\sin^2 \alpha$  este mai mic



decât  $\frac{3}{4}$ , ceea ce corespunde la  $\alpha < 60^\circ$ . În consecință, rotația pământului mărește sau micșorează bătaia, după cum înclinarea vitezei inițiale pe orizont este mai mică sau mai mare decât 60 de grade.

**4. Mișcare pe un plan orizontal.** Să considerăm un punct material greu, care se mișcă la suprafața pământului pe un plan orizontal, sub simplul efect al unei viteze inițiale  $v_0$ .

Singurele forțe reale care lucrează asupra mobilului fiind greutatea sa  $mg$  și reacțiunea normală  $N$  a planului, avem potrivit ecuațiilor (3) în care facem  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -N$  și  $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}$$

$$0 = -N + mg - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}$$

Ultima ecuație dă valoarea reacțiunii  $N$ , care după cum se vede diferă întru câțva de greutatea  $mg$  din cauza termenului în  $\omega$ .

Cele două dintâi sunt ecuațiile mișcării în planul  $xOy$ . Din ele deducem

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

deci

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \text{const.}$$

adică  $v_r^2 = \text{const.}$  Puteam ajunge și mai direct la acest rezultat prin aplicațiunea teoremei forțelor vii, care ne dă  $d\left(\frac{1}{2}mv_r^2\right) = 0$ , travaliul elementar al forțelor  $mg$  și  $N$  fiind în adevăr nul.

Viteza relativă a mișcării fiind astfel constantă este egală cu  $v_0$ . Fie  $\alpha$  unghiul pe care îl face  $v_r$  cu  $Ox$ . Avem  $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$



și  $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha$ . Introducând aceste expresii în una sau alta din cele două ecuații ale mișcării, găsim

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\omega \sin \lambda.$$

Unghiul  $\alpha$  descrește deci când crește timpul, așa că traectoria este o curbă ce rămâne neconținut în dreapta vitezei mobilului. Dacă pe de altă parte însemnăm prin  $s$  arcul  $OM$ , avem pentru valoarea razei de curbura din  $M$ ,

$$\rho = -\frac{ds^1)}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{v_0}{2\omega \sin \lambda}.$$

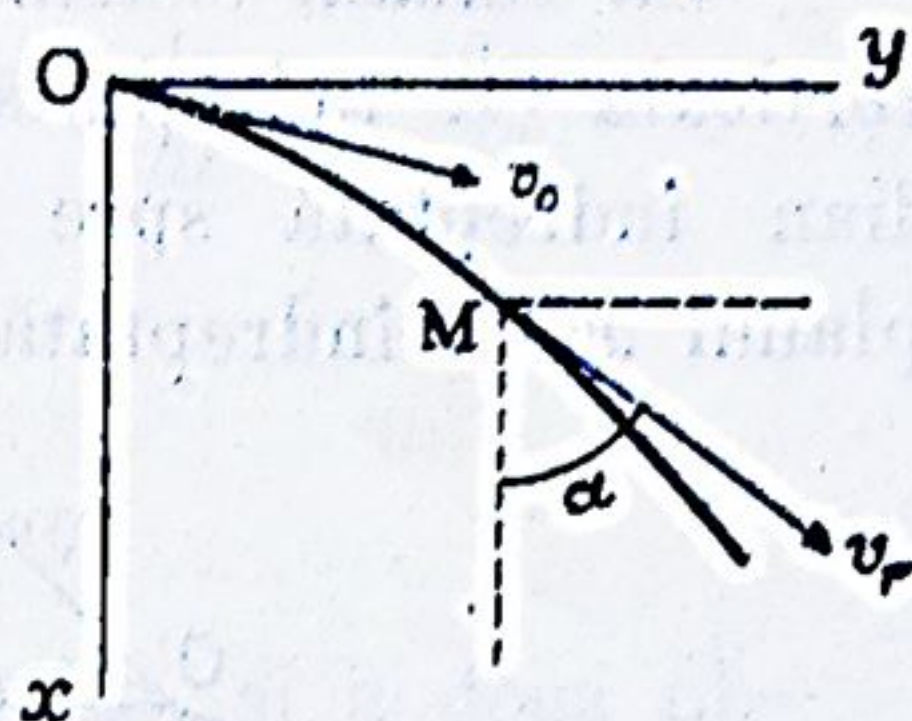


Fig. 84

Raza de curbura fiind constantă, rezultă că traectoria este circulară, raza cercului fiind însă foarte mare din cauza micimii produsului  $\omega \sin \lambda$ .

Astfel, în emisfera de Nord, un corp în mișcare pe un plan orizontal are tendința de a devia la dreapta vitezei sale. Fluviile care curg în această emisferă, sub mari latitudini<sup>2)</sup>, exercită în mijlociu o presiune mai mare pe țărmul lor drept decât pe cel stâng, așa că malul lor drept va fi mâncat puțin câte puțin.

De asemenea cu privire la cicloane, când există în atmosferă un centru de aspirație  $C$ , moleculele gazoase tind a înainta în linie dreaptă către acest centru; însă forța centrifugă compusă să fie căreia dintre ele,  $M$ , o deviație care, în emisfera de Nord, se produce spre dreapta vitezei, așa încât raza vectoare  $MC$  este obligată de a se învârti în jurul centrului  $C$ , în sensul invers al acelor unui ceasornic. Acesta este în adevăr sensul rotației cicloanelor în emisfera de Nord. Sensul este invers în emisfera de Sud și acest fapt se explică în mod analog.

### III. PENDULUL FOUCAULT.

Foucault a pus în evidență printr'o experiență celebră

<sup>1)</sup> Luăm semnul minus, căci  $s$  crește când  $\alpha$  se micșorează și  $\rho$  trebuie să fie pozitiv.

<sup>2)</sup> Când  $\rho$  este mai mic.



influența forței centrifuge compuse, datorită rotației pământului, asupra oscilațiilor unui pendul.

Să reluăm sistemul de axe dreptunghiulare constituit din verticala  $Oz$  îndreptată în jos, orizontala  $Ox$  din planul meridian îndreptată spre Sud și orizontala  $Oy$  perpendiculară pe planul  $xOz$ , îndreptată spre Est.

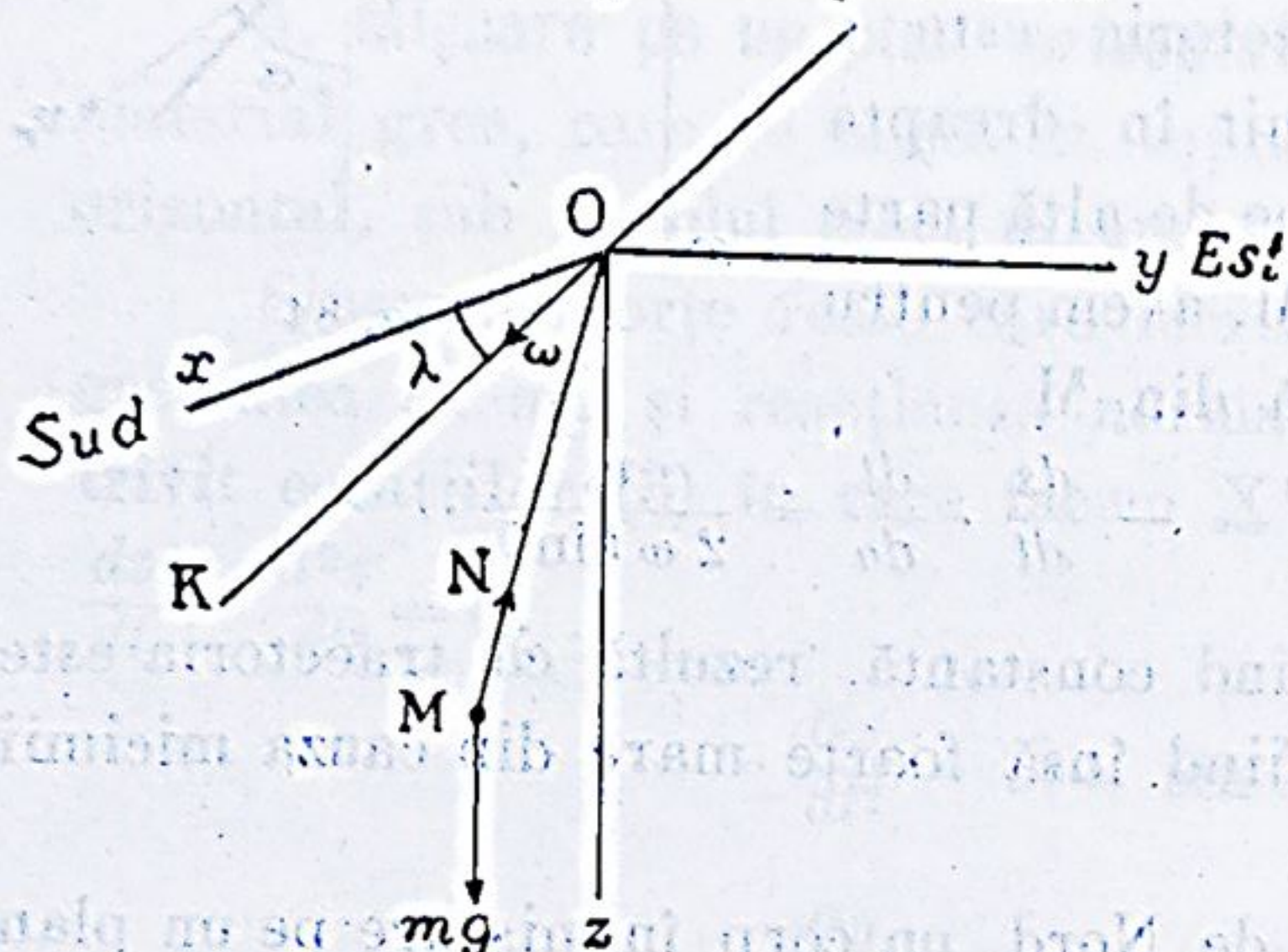


Fig. 85

Punctul  $O$  fiind punctul de suspensiune al pendulului,  $l$  lungimea sa și  $N$  acțiunea firului asupra greutateii  $mg$  susținută de fir, ecuațiile mișcării punctului  $M$  vor fi tot ecuațiile (3) de mai sus, în care vom locui pe  $X, Y, Z$  prin componentele acțiunii firului

$$-N \frac{x}{l}, -N \frac{y}{l}, -N \frac{z}{l}$$

mai adăugând ecuația care exprimă că lungimea  $OM$  rămâne invariabilă și egală cu  $l$ . Obținem astfel sistemul de patru ecuații:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \frac{x}{l} + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ (10) \quad m \frac{d^2y}{dt^2} &= -N \frac{y}{l} + 2m\omega \left( \cos \lambda \frac{dz}{dt} - \sin \lambda \frac{dx}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -N \frac{z}{l} + mg - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

*Cazul micilor oscilații.* Integrațiunea acestui sistem de ecuații dă loc la mari dificultăți. Noi ne vom mărgini la cazul când pendulul nu se depărtează decât foarte puțin de verticală; atunci raporturile  $\frac{x}{l}$  și  $\frac{y}{l}$  sunt destul de mici pentru ca să



putem neglija în calcule patratele lor ca și produsele lor cu  $\omega$ . În această ordine de idei, vom avea:

$$\frac{z}{l} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} = 1, \quad z = l, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Ecuția a treia ne dă

$$-N = 2 m \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} - mg$$

și substituind această valoare în ecuațiile întâia și a doua obținem, neglijând termenii care conțin în factor pe  $\frac{x}{l} \omega$  și  $\frac{y}{l} \omega$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l} x + 2 \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g}{l} y - 2 \omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Punând pentru simplificare

$$\omega \sin \lambda = r, \quad \frac{g}{l} = a^2$$

avem în cele din urmă

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 r \frac{dy}{dt} + a^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 r \frac{dx}{dt} + a^2 y &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Aceste două ecuații sunt suficiente pentru determinarea mișcării proiecției  $M'$  a punctului  $M$  pe planul orizontal  $xOy$ .

*Integrațiune.* Pentru a integra ecuațiile (11) vom înmulți mai întâi ecuația a doua cu  $i = \sqrt{-1}$  și apoi le vom aduna pe una cu alta. Obținem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i \frac{d^2y}{dt^2} + 2 r i \left( \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) + a^2 (x + y i) = 0$$

sau, dacă punem  $x + y i = u$ ,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 r i \frac{du}{dt} + a^2 u = 0.$$

Această ecuație este analoagă cu aceea pe care am întâl-



nit-o când am studiat mișcarea unui pendul simplu într'un mediu rezistent; soluția sa generală este

$$(12) \quad u = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

A și B fiind două constante iar  $\alpha$  și  $\beta$  rădăcinile ecuației

$$X^2 + 2riX + a^2 = 0.$$

Avem

$$X = -ri \pm \sqrt{-r^2 - a^2}$$

Însă  $r^2$  fiind egal cu  $\omega^2 \sin^2 \lambda$  și  $\omega^2$  fiind după cum știm neglijabil, cele două rădăcini  $\alpha$  și  $\beta$  sunt

$$\alpha = (a - r)i, \quad \beta = -(a + r)i.$$

Constantele A și B se determină prin condițiile inițiale. Fie  $u_0 = x_0 + y_0 i$  valoarea inițială a lui  $u$  și să presupunem că viteza inițială a punctului M este nulă. Făcând în (12)  $t = 0$  și  $u = u_0$ , obținem

$$(13) \quad A + B = u_0.$$

Pe de altă parte, derivata lui  $u$  fiind

$$\frac{du}{dt} = \alpha Ae^{\alpha t} + \beta Be^{\beta t}$$

avem, exprimând că pentru  $t = 0$  această derivată, egală cu  $\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$ , este nulă,

$$A\alpha + B\beta = 0.$$

sau, înlocuind pe  $\alpha$  și  $\beta$  prin expresiile lor de mai sus,

$$(14) \quad A(a - r) - B(a + r) = 0.$$

Cele două relații (13) și (14) determină pe A și pe B. Putem să le punem sub forma următoare:

$$(15) \quad \frac{A}{a + r} = \frac{B}{a - r} = \frac{u_0}{2a}.$$

Să introducem acum valorile  $\alpha$ ,  $\beta$ , A, și B în expresia (12) a lui  $u$ . Avem, mai întâi,

$$u = Ae^{(a - r)it} + Be^{-(a + r)it}$$

sau

$$u = e^{-rit} (Ae^{at} + Be^{-at})$$



sau încă <sup>1)</sup>

$$u = e^{-rt} \left[ (A + B) \cos at + (A - B) i \sin at \right].$$

Inlocuind acum pe A și B prin valorile lor deduse din (15) obținem

$$u = u_0 e^{-rt} \left( \cos at + \frac{ri}{a} \sin at \right).$$

Însă

$$u = x + yi, \quad u_0 = x_0 + y_0 i = \rho_0 (\cos \psi_0 + i \sin \psi_0) = \rho_0 e^{\psi_0 i}$$

deci

$$(16) \quad x + yi = \rho_0 e^{(\psi_0 - rt)i} \left( \cos at + \frac{ri}{a} \sin at \right).$$

Dacă în această relație separăm părțile reale și părțile imaginare, obținem pe  $x$  și pe  $y$  în funcție de  $t$ . Soluția problemei este deci completă.

*Interpretare.* Relația (16) este susceptibilă de o interpretare remarcabilă. Să punem

$$(17) \quad \psi_0 - rt = \varphi, \quad x' = \rho_0 \cos at, \quad y' = \rho_0 \frac{r}{a} \sin at.$$

Avem atunci

$$x + yi = e^{\varphi i} (x' + y'i)$$

sau

$$x + yi = (\cos \varphi + i \sin \varphi) (x' + y'i)$$

de unde, separând părțile reale și cele imaginare,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Aceste ecuații arată că  $x'$  și  $y'$  sunt coordonatele punctului  $M'$ , proiecție al lui  $M$ , în raport de sistemul de axe  $x'Oy'$  care face cu sistemul primitiv  $xOy$  un unghi  $\varphi$  în sensul dela  $Ox$  către  $Oy$ .

Relația  $\varphi = \psi_0 - rt$  arată că sistemul  $x'Oy'$  se învâr-

<sup>1)</sup> Reamintim formulele cunoscute din Analiză:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$



tește în jurul verticalei  $Oz$  cu o viteză unghiulară  $\frac{d\varphi}{dt} = -r = -\omega \sin \lambda$  adică în sensul dela  $Oy$  către  $Ox$ , care este sensul dela Est spre Sud.

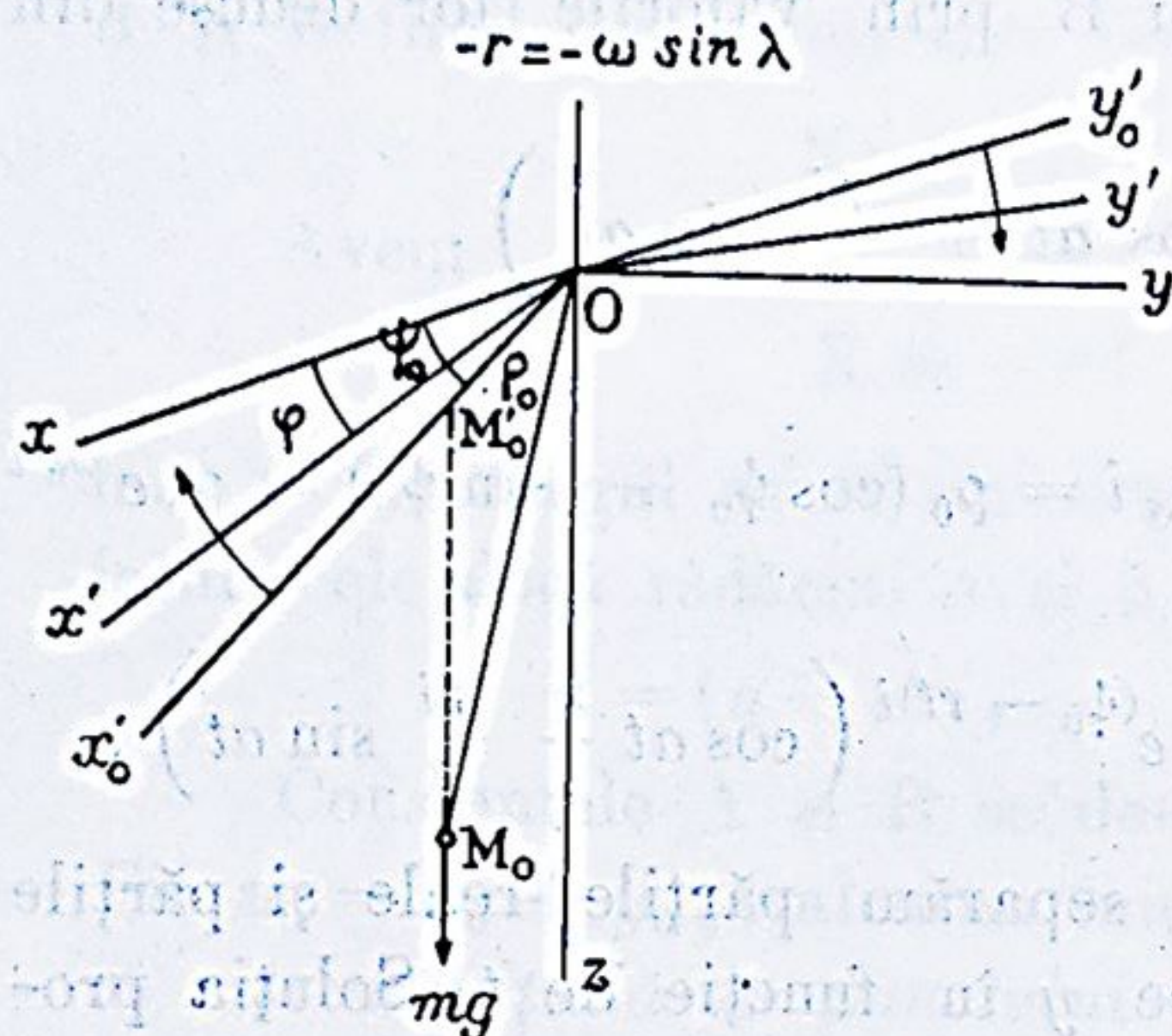


Fig. 86

Valorile (17) ale lui  $x'$  și  $y'$  în funcție de  $t$  determină mișcarea lui  $M'$  în raport de sistemul de comparație  $x'Oy'$ . Această mișcare este periodică; durata perioadei fiind

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

este egală cu aceea a unei oscilații complete a pendulului simplu de lungime  $l$  în planul vertical.

Ecuatia traectoriei punctului  $M'$  în raport de  $x'Oy'$  se obține prin eliminarea lui  $t$  între ecuațiile (17); această traec-torie este o elipsă cu centrul în  $O$ , ale căreia semi-axe îndrep-tate pe  $Ox'$  și  $Oy'$  sunt respectiv egale cu  $\rho_0$  și  $\rho_0 \frac{r}{a}$ . Semi-axul de pe  $Oy'$  este însă foarte mic față de celălalt, din cauza micimii factorului  $r$ .

În rezumat, din ceea ce precedă se conchide că în mișca-re aparentă a pendulului la suprafața pământului, proecția orizontală a punctului greu descrie o elipsă mobilă foarte alungită, al căreia ax mare se învâртеște în jurul verticalei punctului de suspensiune în sensul dela Est spre Sud, în emi-sfera boreală, cu o viteză unghiulară constantă, egală cu aceea a rotației terestre înmulțită cu sinusul latitudinii locului de observație.

Elipsa pe care o descrie punctul  $M'$  fiind foarte alungită în sensul axului  $Ox'$ , acest punct nu se depărtează mai de loc de ax, așa că pendulul pare a descrie un plan mobil care se învâртеște în jurul verticalei punctului de suspensiune cu viteza unghiulară  $\omega \sin \lambda$ .



Foucault a verificat acest rezultat suspendând un pendul de centrul cupolei Panteonului din Paris, pendulul fiind constituit dintr'un fir de oțel de 67 metri lungime, care susținea la partea de jos o bulă masivă de aramă prevăzută cu un vârf ascuțit. Acest vârf însemna direcția mișcării pendulului pe două movilițe de nisip așezate pe sol de o parte și de alta a verticalei punctului de suspensie.

**Notă.** Aplicația teoremei forțelor vii, atât în cazul mișcării proiectilelor, cât și în cazul pendulului conduce la simpla egalitate

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgz - mgz_0$$

adică

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0)$$

aceasta din cauză că forța centrifugă compusă și acțiunea firului de pendul fiind și una și alta perpendiculare pe viteza relativă a mobilului, traverșiile lor sunt nule și nu intră în calculul traverșiului total, care rămâne astfel datorit numai acțiunii greutății punctului.

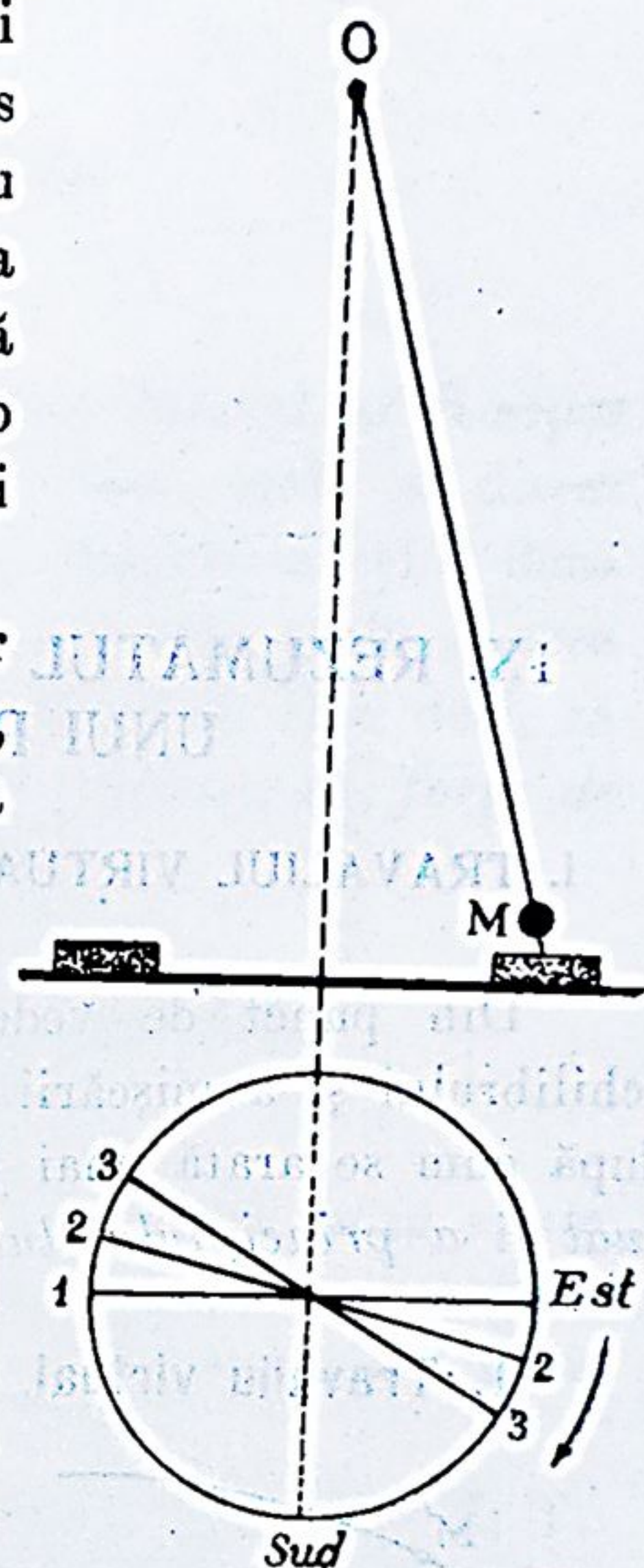


Fig. 87



## IX. REZUMATUL ECHILIBRULUI ȘI MIȘCĂREI UNUI PUNCT MATERIAL.

### I. TRAVALIUL VIRTUAL ȘI PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT.

Din punct de vedere al *unității de metodă*, chestiunea echilibrului și a mișcării unui punct material, poate fi rezumată după cum se arată mai jos, prin considerația *travaliului virtual* și a *principiului lui d'Alembert*.

1. **Travaliu virtual.** Să considerăm traectoria unui punct material și două pozițiuni  $M$  și  $M'$  infinit vecine. Fie  $F_1$  una din forțele care lucrează asupra punctului și  $ds$  diferențiala arcului  $MM'$ .

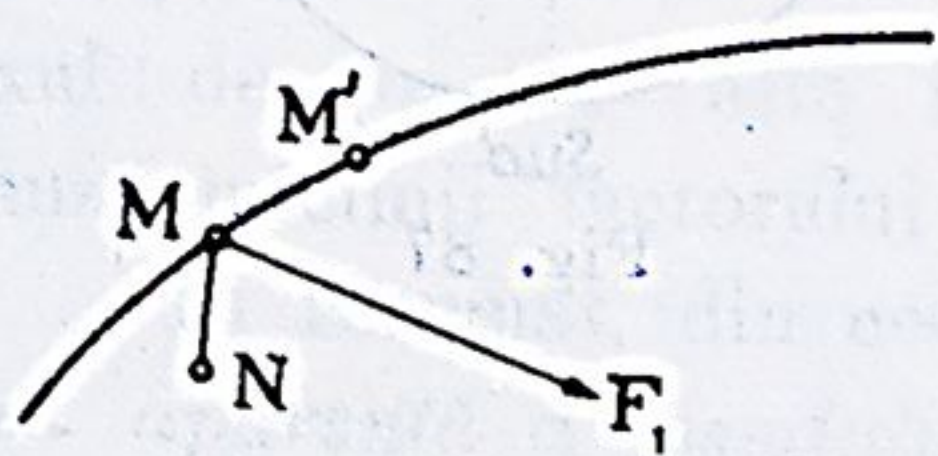


Fig. 88

Travaliul forței  $F_1$  în deplasarea elementară  $MM'$  este  $F_1 ds \cos (F_1, ds)$ .

Acesta este un travaliu real.

Să imaginăm însă o deplasare elementară fictivă  $MN$ . Travaliul forței  $F_1$  pentru această deplasare va fi

$$F_1 \delta s \cos (F_1, \delta s).$$

însemnând prin  $\delta s$  elementul  $MN$ . Un asemenea travaliu se numește *travaliu virtual*.

Dacă punctul  $M$  ar fi în echilibru, atunci deplasarea reală  $ds$  fiind nulă, orice travaliu ar fi virtual. — Se rezervă notațiunea  $\delta$  pentru diferențialele travaliurilor virtuale.



2. **Principiul lui d'Alembert.** Fie  $R$  rezultanta forțelor care lucrează asupra unui punct material  $M$ , adică forța motrice. Avem:

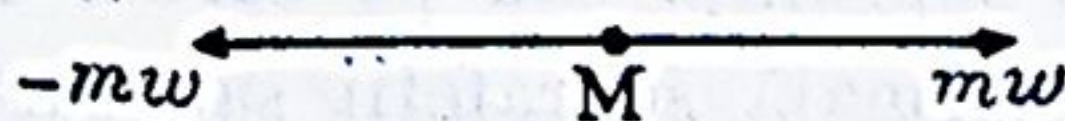


Fig. 89

$R = mw$ ,  $w$  fiind accelerația mișcării. Dacă punctul ar fi supus în același timp forței  $R$  și unei forțe  $-mw$ , egală și direct opusă lui  $R$ , punctul ar fi în echilibru, rezultanta celor două forțe considerate fiind nulă. Ori, forța  $-mw$  este egală cu ceea ce am numit forța de inerție a punctului  $M$ . Vom zice, deci, că există echilibru între rezultanta forțelor aplicate și forța de inerție. Acesta este principiul lui d'Alembert.

## II. REZUMATUL ECHILIBRULUI ȘI MIȘCĂREI UNUI PUNCT MATERIAL.

1. **Echilibru.** a). *Punct liber.* Teorema I. Pentru ca să existe echilibru, este necesar și suficient ca *travaliul virtual al rezultantei forțelor ce lucrează asupra punctului, să fie nul în ori și ce deplasare elementară.*

*Necesar.* În adevăr, dacă există echilibru, proiecțiile  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ale rezultantei forțelor pe trei axe cordonate dreptunghiulare sunt nule și avem

$$(1) \quad \delta \mathcal{E} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

ori care ar fi deplasările virtuale  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

*Suficient.* Dacă egalitatea (1) are loc ori cari ar fi  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . trebuie să avem  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$  și punctul este în echilibru.

b). *Punct supus la legături*, adică obligat de a rămâne pe o suprafață sau pe o curbă. Teorema II: Pentru ca să existe echilibru, este necesar și suficient ca *travaliul virtual al rezultantei forțelor direct aplicate să fie nul pentru ori ce deplasare elementară compatibilă cu legătura, adică pentru ori ce deplasare elementară a punctului pe suprafață sau pe curbă.*



**Necesar.** Fie, în adevăr,  $F$  rezultanta forțelor direct aplicate,  $X, Y, Z$  proiecțiile sale pe trei axe cordonate dreptunghiulare și  $\delta x, \delta y, \delta z$  proiecțiile pe aceleași axe ale unei deplasări elementare virtuale pe suprafață sau pe curbă. Dacă există echilibru, forța  $F$  este normală suprafeții sau curbei și avem

$$(2) \quad \delta \mathcal{E} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

ecuație care exprimă perpendicularitatea forței.

**Suficient.** [Dacă egalitatea (2) are loc pentru  $\delta x, \delta y, \delta z$  compatibili cu legătura, forța  $F$  este normală suprafeții sau curbei și există echilibru.

**Aplicație.** Echilibru pe o suprafață dată  $f(x, y, z) = 0$ . Avem ca primă ecuație potrivit teoremei precedente,

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0$$

însă  $\delta x, \delta y, \delta z$  fiind deplasări pe suprafață verifică ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Rezultă deci că

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

și sistemul acesta de 2 ecuații împreună cu ecuația suprafeții  $f(x, y, z) = 0$  ne permite a calcula cordonatele poziției de echilibru, în cazul când  $X, Y, Z$  depind numai de  $x, y, z$ .

**2. Mișcare.** a). *Punct liber.* Aplicăm teorema I a lucrului virtual celor două forțe  $R$  și  $-mw$  care își fac echilibru.

Fie  $X, Y, Z$  proiecțiile rezultantei  $R$ ; acelea ale forței de inerție sunt  $-m \frac{d^2 x}{dt^2}, -m \frac{d^2 y}{dt^2}, -m \frac{d^2 z}{dt^2}$ .

Avem

$$\left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z = 0$$

ori care ar fi  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Rezultă că coeficienții lui  $\delta x, \delta y, \delta z$  sunt nuli și prin urmare

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

care sunt ecuațiile mișcării.



b). *Punct supus la legături.* Aplicăm teorema II a lucrului virtual forțelor direct aplicate, printre care socotim și forțele de inerție.

Avem deci

$$\left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z = 0$$

$\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  fiind deplasări pe suprafață sau pe curbă.

*Aplicație.* Mișcare pe o suprafață dată  $f(x, y, z) = 0$ . La ecuația precedentă trebuie să alăturăm ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Deducem, pentru compatibilitatea sistemului,

$$(\alpha) \quad \frac{X - m \frac{d^2 x}{dt^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

ecuații care împreună cu  $f(x, y, z) = 0$  determină pe  $x$ ,  $y$ ,  $z$  în funcție de  $t$ .

Odată această determinare realizată, putem calcula și forța de legătură, adică acțiunea normală a suprafeței asupra punctului. Ecuațiile  $(\alpha)$  ne dau în adevăr, dacă egalăm raporturile cu  $-\lambda$ :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

ceea ce arată că forța de legătură are ca componente

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se vor putea deci calcula aceste componente, dacă s'au putut obține expresiunile coordonatelor  $x$ ,  $y$ ,  $z$  în funcție de  $t$ . Astfel

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} - X.$$

Valoarea forței de legătură este

$$\lambda \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$



### III. MIȘCAREA UNUI PUNCT PE O SUPRAFAȚĂ SAU PE O CURBĂ MOBILĂ.

Fie, spre exemplu,  $C$ , o curbă plană mobilă, adică o curbă care să varieze de poziție și chiar de formă odată cu timpul:

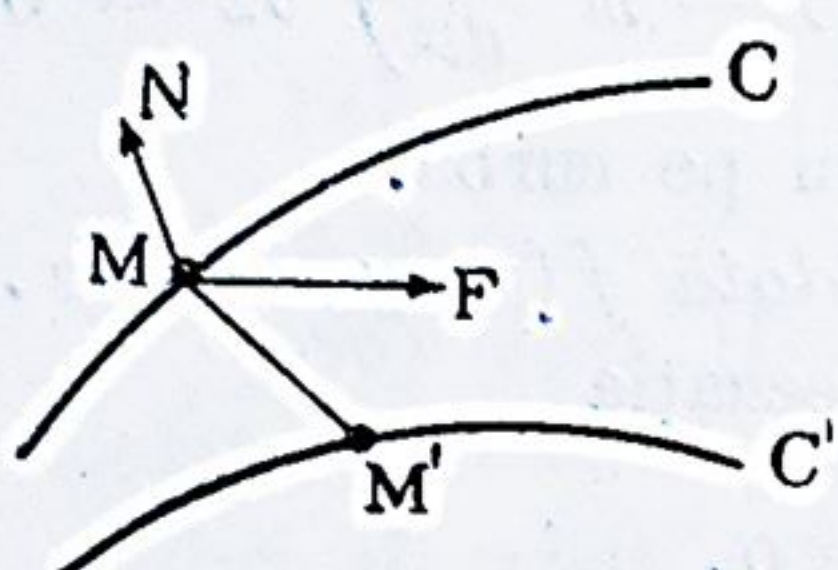


Fig. 90

$$f(x, y, t) = 0.$$

În momentul  $t$  mobilul se găsește în  $M$  pe curba  $C$ , iar după timpul  $dt$  el ocupă poziția  $M'$  pe curba  $C'$  infinit apropiată de  $C$ .

Fie  $F$  rezultanta forțelor direct aplicate mobilului și  $N$  acțiunea curbei  $C$  asupra lui. Dacă voim a aplica teorema forțelor vir trebuie să calculăm nu numai travaliul forței  $F$  în deplasarea  $MM'$  dar și travaliul acțiunii  $N$  în această deplasare, [care nu mai este nul ca în cazul curbelor fixe. Cum  $N$  este necunoscut, aceasta revine a zice că teorema în chestiune nu se poate aplica.

Din potrivă, teorema II a travaliului virtual se aplică și în cazul acesta, fără nici o deosebire de cazul curbelor fixe, căci în aceea teoremă este vorba numai de deplasările compatibile cu legătura așa cum există ea în momentul  $t$ , potrivit definiției însăși a travaliului virtual. Cum în exemplul luat, singura deplasare compatibilă cu legătura în momentul  $t$  este o deplasare elementară pe curba  $C$ , considerată ca fixă, travaliul forței  $N$  este nul pentru această deplasare, așa că teorema se aplică *considerând pe  $t$  ca constant*. Vom avea deci ecuațiile

$$\left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y = 0$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0$$

care împreună cu ecuația curbei vor rezolvi chestiunea determinării mișcării.

Vom da exemple de mișcarea unui punct pe o suprafață sau pe o curbă mobilă în Partea III-a a Cursului de față.



## PARTEA II.

# ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE

### I. TEORIA CENTRELOR DE GREUTATE.

#### I. DEFINIȚIA ȘI CORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE.

##### 1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale.

Fie un sistem de  $n$  puncte materiale:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de mase  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

Se numește *centru de greutate* al sistemului, punctul  $G$  pentru care suma geometrică<sup>1)</sup>

$$(m_1 GA_1) + (m_2 GA_2) + \dots + (m_n GA_n)$$

sau  $\Sigma (m GA)$  este nulă.

Fie în raport de 3 axe cordonate:

$a, b, c$  cordonatele lui  $G$  și  $x, y, z$  cordonatele unuia oarecare din punctele date. Vom avea în proiecțiune pe axe:

$$\Sigma m (x - a) = 0, \quad \Sigma m (y - b) = 0, \quad \Sigma m (z - c) = 0$$

adică

$$\Sigma m x = a \Sigma m, \quad \Sigma m y = b \Sigma m, \quad \Sigma m z = c \Sigma m$$

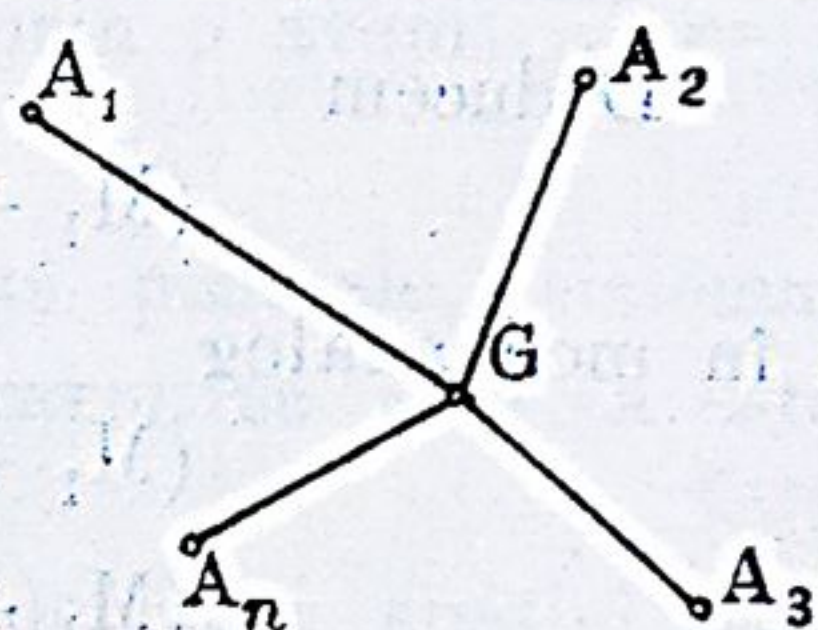


Fig. 91

<sup>1)</sup> Cinematica, pag. 12.



și în consecință

$$(1) \quad a = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad b = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad c = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

care sunt expresiunile cordonatelor punctului  $G$ . Dacă punem  $\Sigma m = M$ , adică dacă însemnăm prin  $M$  masa sistemului, formulele precedente se scriu

$$M a = \Sigma m x, \quad M b = \Sigma m y, \quad M c = \Sigma m z.$$

**2. Centrul de greutate a două sisteme.** Fie un sistem material de masă  $M_1$  având ca centru de greutate  $G_1$  (cordonate  $a_1, b_1, c_1$ ) și un al doilea sistem material de masă  $M_2$  având ca centru de greutate  $G_2$  (cordonatele  $a_2, b_2, c_2$ ). Se cere 'a se determina centrul de greutate  $G$  (cordonate  $a, b, c$ ) al sistemului total de masă  $M_1 + M_2$ .

Avem, deosebind prin indicii 1 și 2 literile care se raportează la cele două sisteme

$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= \Sigma m_1 x_1, & M_1 b_1 &= \Sigma m_1 y_1, & M_1 c_1 &= \Sigma m_1 z_1 \\ M_2 a_2 &= \Sigma m_2 x_2, & M_2 b_2 &= \Sigma m_2 y_2, & M_2 c_2 &= \Sigma m_2 z_2 \end{aligned}$$

iar pe de altă parte

$$(M_1 + M_2) a = \Sigma m x = \Sigma m_1 x_1 + \Sigma m_2 x_2.$$

Deducem

$$(M_1 + M_2) a = M_1 a_1 + M_2 a_2$$

și în mod analog

$$(M_1 + M_2) b = M_1 b_1 + M_2 b_2$$

$$(M_1 + M_2) c = M_1 c_1 + M_2 c_2$$

egalități care determină pe  $a, b, c$ .

Dacă luăm dreapta  $G_1 G_2$  drept ax  $Ox$ , avem

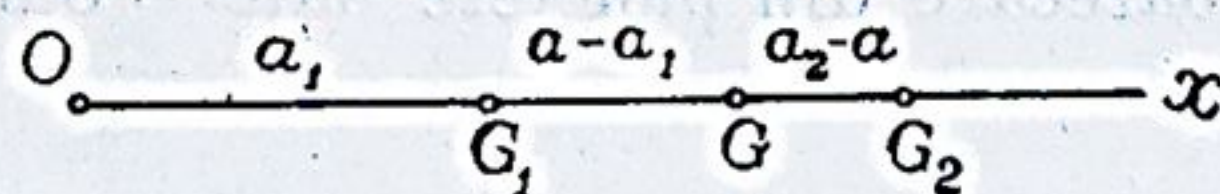


Fig. 92

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0; \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0$$

și prin urmare

$$b = 0, \quad c = 0$$

$$M_1 (a - a_1) = M_2 (a_2 - a).$$



Conchidem că centrul de greutate  $G$  se găsește pe dreapta  $G_1G_2$  și că distanțele  $GG_1$  și  $GG_2$  sunt invers proporționale cu masele  $M_1$  și  $M_2$ .

**3. Determinarea centrului de greutate al unui sistem continuu de puncte materiale.** Să considerăm un sistem de puncte materiale infinit apropiate unele de altele. Acest sistem va forma un *spațiu material*, o *suprafață materială* sau o *linie materială*, după cum va prezenta trei, două sau o singură dimensiune. Căutarea centrului de greutate al unui asemenea sistem, revine după cum se va vedea, la efectuări de cuadraturi.

a). *Spațiuri materiale.* Fie un spațiu material de volum  $V$  și de masă  $M$ . Să considerăm un punct  $P$  din acest spațiu; fie  $\Delta V$  un volum infinit de mic coprinzând punctul  $P$  și  $\Delta M$  masa materiei ce conține. Raportul  $\frac{\Delta M}{\Delta V}$  reprezintă densitatea mijlocie a volumului  $\Delta V$ ; dacă facem pe  $\Delta V$  să descrească necontenit, fără a înceta însă de a conține punctul  $P$ , acest raport va tinde către o limită fixă<sup>1)</sup>, care va fi *densitatea volumului  $V$  în punctul  $P$* . Insemnând această densitate prin  $\rho$  avem  $\frac{dM}{dV} = \rho$  sau  $dM = \rho dV$ .

Când densitatea este aceeași în toate punctele, sistemul material este zis *omogen*; în cazul contrariu, se zice că este *eterogen*.

Să descompunem în elemente infinit de mici spațiul material considerat și să însemnăm prin  $x, y, z$  cordonatele unui punct  $P$  al sistemului,  $\rho$  densitatea în acest punct,  $dV$ ,  $dM$  volumul și masa elementului care conține punctul  $P$ .

Aplicația formulelor (1) ne dă pentru cordonatele centrului de greutate

$$a = \frac{\int x dM}{\int dM}, \quad b = \frac{\int y dM}{\int dM}, \quad c = \frac{\int z dM}{\int dM}$$

<sup>1)</sup> Adică, presupunem că această limită există.



sau, fiindcă  $dM$  este egal cu  $\rho dV$ ,

$$(2) \quad a = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV}, \quad b = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV}, \quad c = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}.$$

Dacă raportăm sistemul la 3 axe cordonate dreptunghiulare; avem  $dV = dx dy dz$  și prin urmare

$$M = \int \rho dV = \iiint \rho dx dy dz$$

$$Ma = \iiint \rho x dx dy dz, \quad Mb = \iiint \rho y dx dy dz,$$

$$Mc = \iiint \rho z dx dy dz.$$

Când sistemul este omogen,  $\rho$  fiind constant dispăre din formulele (2) așa că avem

$$a = \frac{\int x dV}{V}, \quad b = \frac{\int y dV}{V}, \quad c = \frac{\int z dV}{V}.$$

b). *Suprafețe materiale.* Densitatea suprafeții în punctul P va fi limita raportului  $\frac{\Delta M}{\Delta S}$ , în care  $\Delta S$  reprezintă elementul de suprafață care conține pe P și  $\Delta M$  masa acestui element. Deci  $\frac{dM}{dS} = \rho$  sau

$$dM = \rho dS.$$

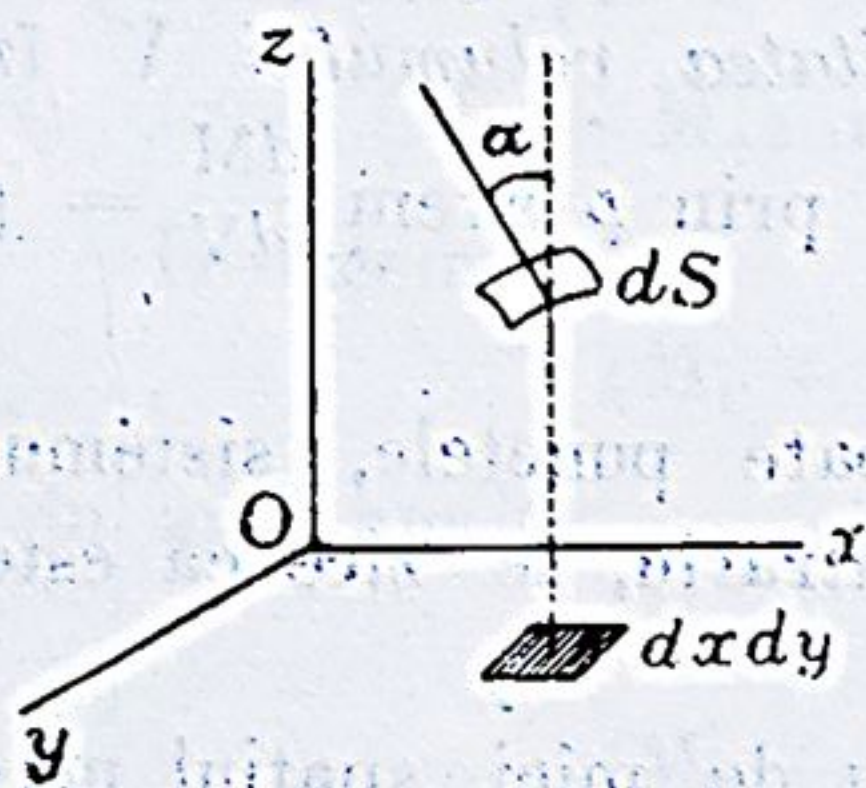


Fig. 93

Cordonatele centrului de greutate, au ca expresiuni

$$(3) \quad a = \frac{\int \rho x dS}{\int \rho dS}, \quad b = \frac{\int \rho y dS}{\int \rho dS}, \quad c = \frac{\int \rho z dS}{\int \rho dS}.$$

Dacă suprafața este raportată la 3 axe dreptunghiulare, putem lua ca  $dS$  elementul de suprafață care are ca proiecție dreptunghiul  $dx dy$  pe planul  $xOy$ .

Insemnând prin  $\alpha$  unghiul normalei la elementul  $dS$  cu axul  $Oz$ , avem deci  $dS \cos \alpha = dx dy$ . Inșă, după cum se știe din



Analiză,  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ,  $p$  și  $q$  fiind derivatele parțiale ale lui  $z$  în raport de  $x$  și  $y$  din ecuația suprafeței:  $z = f(x, y)$ . Așa dar

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \, dy$$

și formulele cordonatelor centrului de greutate se scriu

$$M a = \iint \rho x \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \, dy$$

$$M b = \iint \rho y \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \, dy$$

$$M c = \iint \rho z \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \, dy \quad (6)$$

în care

$$M = \int \rho \, dS = \iint \rho \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \, dy.$$

Când suprafața este omogenă, formulele (3) devin

$$a = \frac{\int x \, dS}{S}, \quad b = \frac{\int y \, dS}{S}, \quad c = \frac{\int z \, dS}{S}.$$

c). *Linii materiale.* Densitatea liniei într'un punct  $P$  se definește prin limita raportului  $\frac{\Delta M}{\Delta L}$ , în care  $\Delta L$  reprezintă elementul linear care conține pe  $P$  și  $\Delta M$  masa elementului. Așa dar  $dM = \rho \, dL$  și avem formulele

$$(4) \quad a = \frac{\int \rho x \, dL}{\int \rho \, dL}, \quad b = \frac{\int \rho y \, dL}{\int \rho \, dL}, \quad c = \frac{\int \rho z \, dL}{\int \rho \, dL}.$$

Dacă raportăm linia la un sistem de 3 axe dreptunghiulare, cordonatele  $x, y, z$  sunt funcțiuni de un parametru  $\alpha$  și avem

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2} \cdot d\alpha.$$

Inlocuind pe  $dL$  prin această expresiune în formulele (4) determinarea cordonatelor  $a, b, c$  se reduce la efectuări de cuadraturi.



Când linia este omogenă, avem

$$a = \frac{\int x dL}{L}, \quad b = \frac{\int y dL}{L}, \quad c = \frac{\int z dL}{L}$$

$L$  fiind lungimea respectivă a liniei.

#### 4. Teoreme care ușurează găsirea centrului de greutate.

Fie un sistem de  $n$  puncte materiale de aceeași masă  $m$ . Expresiunile (1) ale cordonatelor centrului de greutate, devin în asemenea caz, prin reducerea factorului  $m$ ,

$$(5) \quad a = \frac{\Sigma x}{n}, \quad b = \frac{\Sigma y}{n}, \quad c = \frac{\Sigma z}{n}.$$

Centrul de greutate se confundă deci cu centrul distanțelor medii. Avem astfel următoarele 3 teoreme care se aplică și sistemelor continue în care densitatea este aceeași în toate punctele:

**Teorema I.** Când un sistem are un centru de simetrie, acest centru de simetrie este centrul de greutate al sistemului.

Luând, în adevăr, acest centru de simetrie ca origină a unui sistem de axe, la ori ce punct  $x, y, z$  corespunde un punct de cordonate  $-x, -y, -z$ ; deci sumele  $\Sigma$  din expresiunile (5) sunt toate nule și centrul de greutate se confundă cu origina.

**Teorema II.** Când un sistem are un plan de simetrie, centrul de greutate este în acest plan.

Dacă luăm, în adevăr, planul de simetrie drept plan  $xOy$ , la orice punct  $x, y, z$  corespunde un punct de cordonate  $x, y, -z$  așa că  $c = 0$ .

**Teorema III.** Când un sistem are un ax de simetrie, centrul de greutate este pe acel ax.

Dacă luăm, în adevăr, axul de simetrie drept ax  $Oz$ , la orice punct  $x, y, z$  corespunde un punct de cordonate  $-x, -y, z$  deci  $a = 0, b = 0$ .



**Exemplu.** Centrul de greutate al unei jumătăți de sferă, presupusă omogenă.

Acest centru se găsește pe axul Oz. Insemnând prin  $c$  cota sa, avem

$$c = \frac{\int z dV}{V}.$$

Ori, după cum se vede pe figură,

$$r^2 + z^2 = R^2$$

$$dV^1) = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz$$

deci

$$\int z dV = \pi \int_0^R z (R^2 - z^2) dz = \pi \left[ R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \pi \frac{R^4}{4}$$

și, cum  $V$  ca jumătate de volum de sferă este egal cu  $\frac{2}{3} \pi R^3$ , obținem prin diviziune,

$$c = \frac{3}{8} R.$$

**Notă.** Cele trei teoreme precedente sunt adevărate și în cazul când sistemul material nu este omogen însă prezintă particularitatea că *punctele sale care se corespund în mod simetric au aceeași masă*. Astfel, în cazul teoremei I, dacă la un punct de masă  $m$  corespunde în mod simetric un punct tot de masă  $m$ , sumele  $\sum m x$ ,  $\sum m y$ ,  $\sum m z$  sunt toate nule și prin urmare

$$a = \frac{\sum m x}{M} = 0, \quad b = \frac{\sum m y}{M} = 0, \quad c = \frac{\sum m z}{M} = 0$$

și tot asemenea pentru celelalte două teoreme.

Un exemplu de astfel de sisteme materiale îl prezintă proiectilele de artilerie încărcate cu explosiv. Ele nu sunt cor-

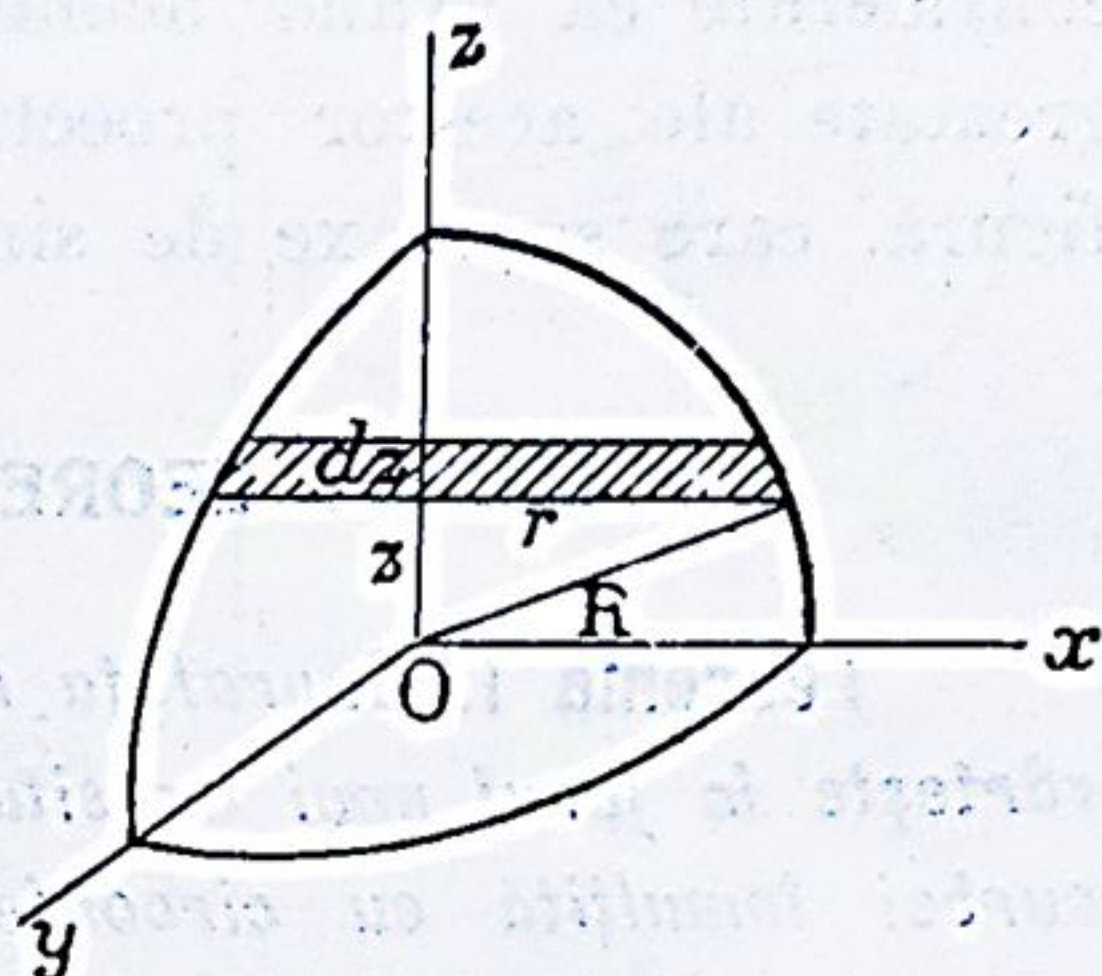


Fig. 94

<sup>1)</sup> Luăm ca element de volum  $dV$  volumul cilindrului de rază  $r$  și de înălțime  $dz$ .



puri omogene, însă, în mod destul de sensibil, punctele care se corespund simetric față de axul de figură al proiectilului pot fi considerate ca având aceeași masă. În consecință, centrele de greutate ale acestor proiectile se află situate pe axele lor de figură, care sunt axe de simetrie.

## II. TEOREMELE LUI GULDIN.

**Teorema I.** *Suprafața născută de o curbă plană care se învâртеște în jurul unui ax situat în planul ei, este egală cu lungimea curbei înmulțită cu circumferința pe care o descrie centrul de greutate al curbei, presupusă omogenă.*

Să raportăm, în adevăr, curba plană la axul de rotație luat drept ax  $Ox$  și la o perpendiculară  $Oy$ . Un element  $dL$  al curbei, având ca ordonată  $y$ , naște prin învârtire un element de suprafață care putând fi asimilat suprafeții unui trunchi de con are ca expresie

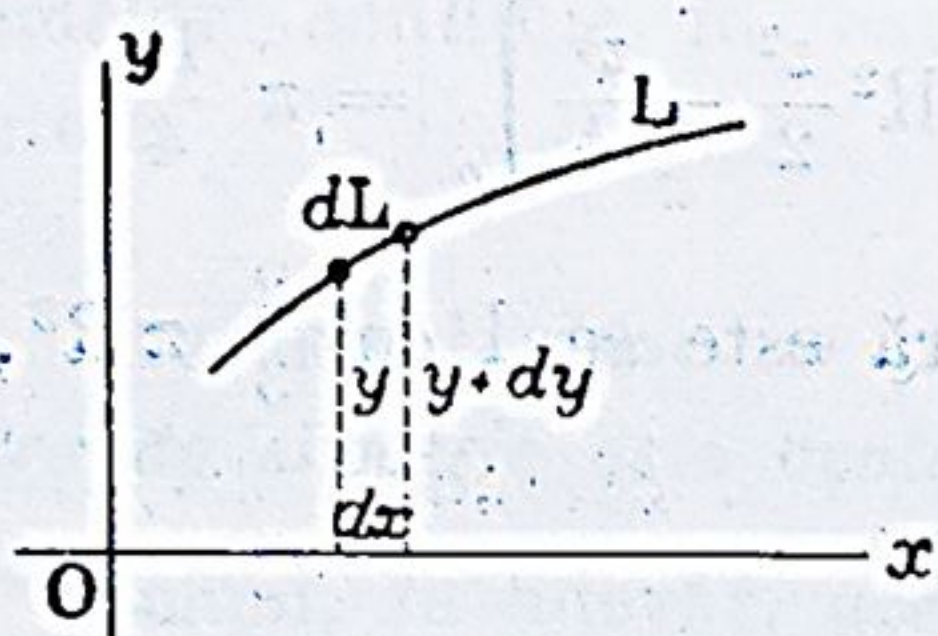


Fig. 95

$$\pi dL [ y + (y + dy) ]$$

adică în valoare principală  $2\pi y dL$ , așa că suprafața totală născută de

curbă va fi

$$A = 2\pi \int y dL.$$

Însă, dacă  $b$  este ordonata centrului de greutate al curbei, știm că avem

$$bL = \int y dL$$

deci

$$A = L \times 2\pi b.$$

**Teorema II.** *Volumul născut de o arie plană care se învâртеște în jurul unui ax situat în planul ei, este egal cu suprafața ariei înmulțită cu circumferința descrisă de centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă.*



În adevăr, un element  $dx, dy$  al ariei  $S$  naște prin rotația sa în jurul axului  $Ox$  un element de volum care, fiind diferența volumelor celor 2 cilindri născuți de ariile  $A'B'CD$  și  $ABCD$ , are ca expresie

$$\pi (y + dy)^2 dx - \pi y^2 dx$$

adică, în valoare principală,

$$2\pi y dx dy$$

asa încât volumul  $V$  născut de aria  $S$  este

$$V = 2\pi \iint y dx dy.$$

Însă, după cum s'a văzut mai înainte, avem

$$bS = \int y dS = \iint y dx dy$$

deci

$$V = S \times 2\pi b.$$

**Aplicații. 1. Centrul de greutate al unei semicircunferințe.**

Insemnând prin  $b$  ordonata sa, avem, potrivit teoremei I a lui Guldin,

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi b$$

deci

$$b = \frac{2}{\pi} R.$$



Fig. 97

**2. Centrul de greutate al suprafeții unei jumătăți de cerc.**

Teorema II a lui Guldin ne dă

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} 2\pi b$$

deci

$$b = \frac{4R}{3\pi}.$$



## II. ECHILIBRUL UNUI SOLID INVARIABIL.

### I. REDUCEREA FORȚELOR APLICATE UNUI SOLID INVARIABIL.

1. **Principiu.** Pentru ca două forțe aplicate unui solid să-și facă echilibru, este necesar și suficient ca ele să fie egale și direct opuse.

Din acest principiu considerat ca o axiomă, rezultă propozițiunea următoare:

**Corolariu.** Putem fără a schimba efectul unei forțe asupra unui solid, să mutăm punctul de aplicație al forței în ori ce punct de pe direcția sa.

Fie  $F$  o forță aplicată în punctul  $A$ . Să luăm un punct oarecare  $B$  pe direcția forței  $F$  și să aplicăm în acest punct, considerat ca invariabil legat solidului, două forțe, una  $F'$  echipolentă cu  $F$  și alta  $F''$  egală și direct opusă lui  $F$ . Prin aceasta n'am modificat starea solidului, căci forțele  $F'$  și  $F''$  își fac echilibru. Cum însă, pe de altă parte, forțele  $F$  și  $F''$  își fac și ele echilibru, fiind egale și direct opuse, ele pot fi suprimate și rămâne atunci forța  $F'$  aplicată în  $B$ . Această forță poate deci înlocui forța  $F$  aplicată în  $A$ .

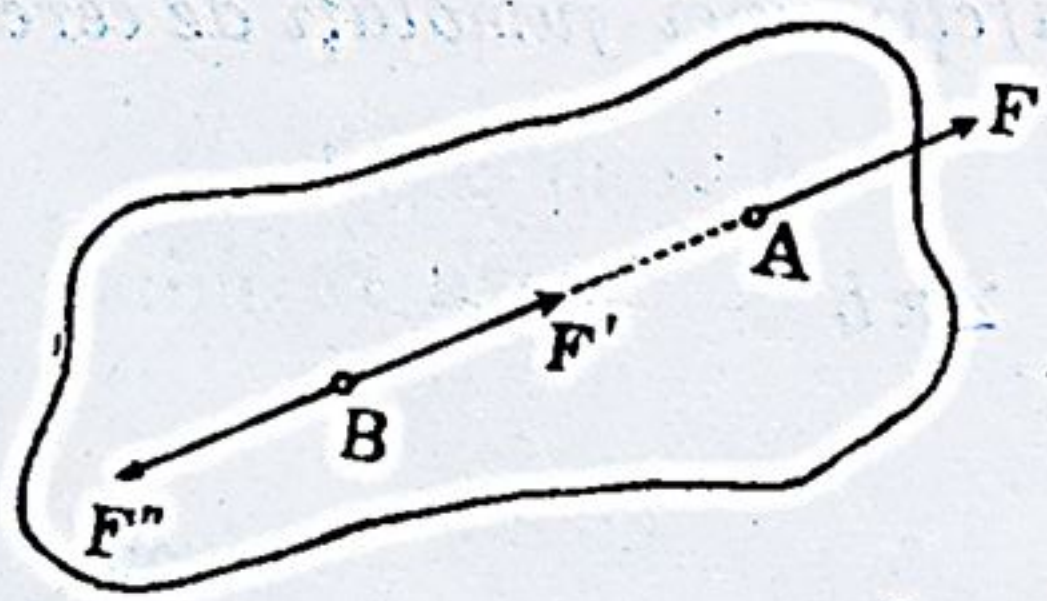


Fig. 98



2. **Teorema I.** *Un sistem oarecare de forțe aplicate unui solid, poate fi înlocuit prin două forțe, dintre care una, aplicată într'un punct arbitrar.*

Fie  $A, B, C$  trei puncte invariabil legate solidului și  $M$  un punct în care lucrează o forță  $F$ . Putem uni punctul  $M$  cu punctele  $A, B, C$  și descompune forța  $F$  în 3 componente îndreptate pe direcțiile  $MA, MB, MC$ , pe care le vom transporta pe direcțiile lor în  $A, B, C$ . Executând această operație pentru fiecare din forțele sistemului, obținem 3 grupuri de forțe, aplicate în  $A, B, C$ . Fiecare grup dă o rezultantă așa că prin procedeul urmat am redus întregul sistem la 3 forțe  $P, Q, R$  aplicate respectiv în punctele  $A, B, C$  arbitrar alese.

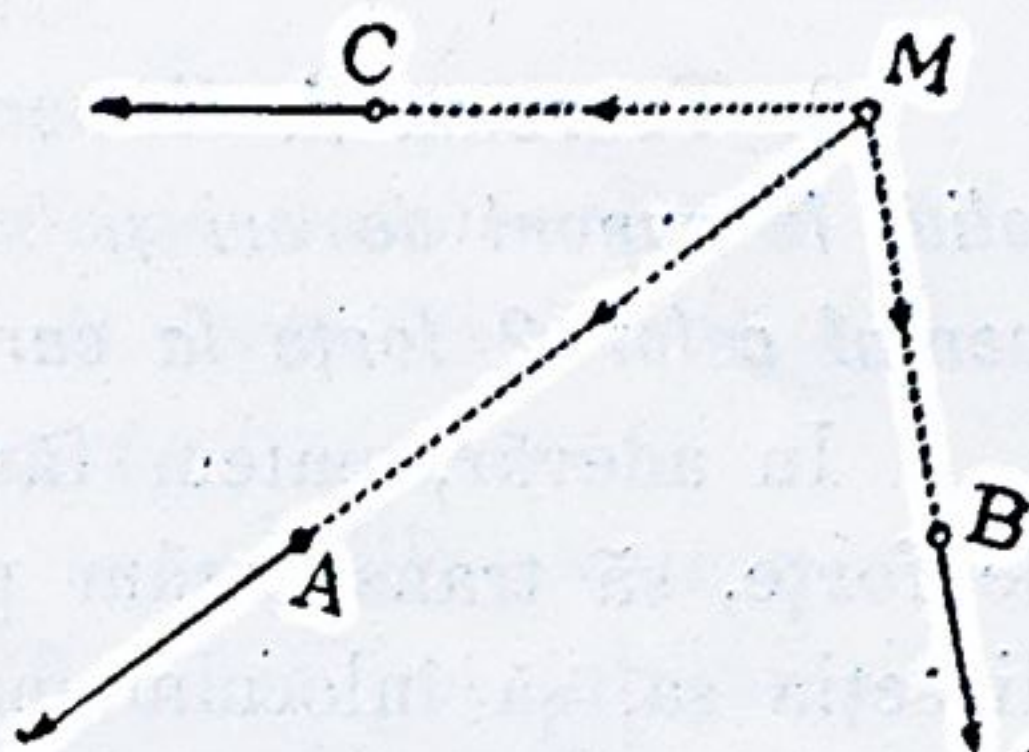


Fig. 99

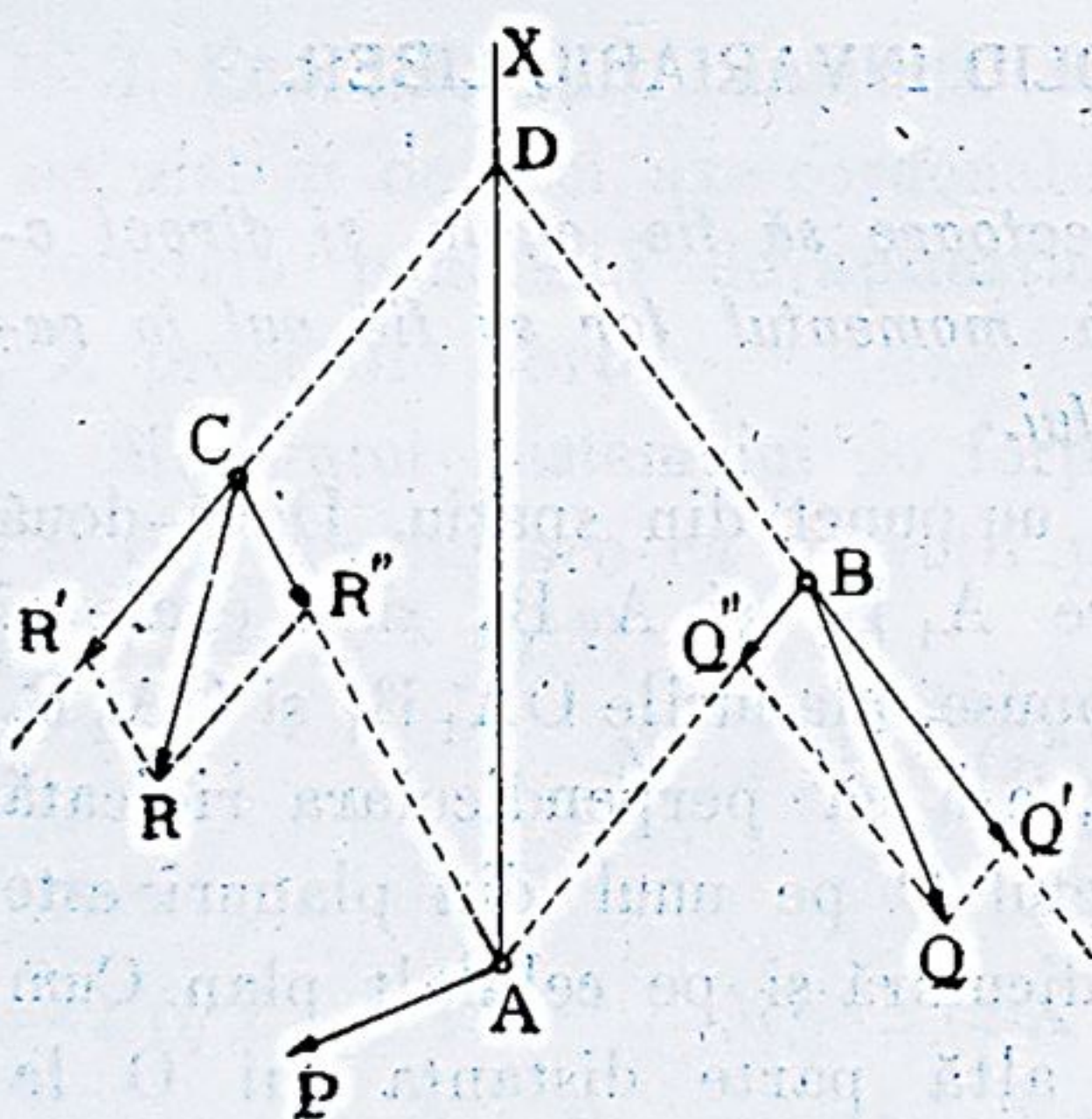


Fig. 100

Să considerăm acum cele două planuri determinate de punctul  $A$  și cele două forțe  $Q$  și  $R$ . Pe linia lor de intersecție  $AX$  să luăm un punct arbitrar  $D$  și să unim punctele  $B, C$  cu  $A$  și  $D$ . Descompunând forța  $Q$  în  $Q'$  și  $Q''$  pe direcțiile  $DB$  și  $BA$  și forța  $R$  în  $R'$  și  $R''$  pe direcțiile  $DC$  și  $CA$ , să mutăm forțele  $Q'$  și  $R'$  pe direcțiile lor în  $D$  și forțele  $Q''$  și  $R''$  pe direcțiile lor în punctul  $A$ . Vom obține astfel, în cele din urmă

două forțe  $S$  și  $T$  aplicate în punctele  $A$  și  $D$ .

Să observăm că punctul  $A$  este arbitrar și că poziția dreptei  $AX$  depinde de alegerea punctelor  $B$  și  $C$ . Variind poziția acestor două puncte variem și poziția dreptei  $AX$  și, pe fiecare dreaptă  $AX$ , putem lua punctul  $D$  în mod arbitrar. Așa



dar există o infinitate de moduri de a reduce sistemul de forțe la 2 forțe dintre care una aplicată în  $A$ , însă la o poziție determinată a punctului  $D$  pe dreapta  $AX$  răspund două forțe bine determinate  $S$  și  $T$  aplicate în  $A$  și  $D$ .

**3. Teorema II.** *Momentul unui sistem de forțe aplicate unui solid, în raport de ori și ce punct al spațiului, este egal cu momentul celor 2 forțe la care se poate reduce sistemul.*

În adevăr, putem fără a modifica momentul unui sistem de forțe, să transportăm punctul de aplicație al unei forțe pe direcția sa, să înlocuim mai multe forțe concurente prin rezultanta lor și să descompunem o forță în mai multe altele aplicate în același punct. Cum pentru găsirea forțelor  $S$  și  $T$  noi n'am întrebuințat decât aceste moduri de transformări, rezultă că momentul sistemului de forțe nu se găsește modificat când înlocuim forțele  $F_1, F_2, F_3 \dots$  care lucrează asupra solidului prin cele două forțe  $S$  și  $T$ .

## II. ECHILIBRUL UNUI SOLID INVARIABIL LIBER.

**1. Lemă.** *Pentru ca două vectoare să fie egale și direct opuse, este necesar și suficient ca momentul lor să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului.*

*Necesar.* Fie în adevăr  $O$  un punct din spațiu. Dacă două vectoare  $A_1 B_1$  și  $A_2 B_2$  sunt egale și direct opuse, planurile  $OA_1 B_1$  și  $OA_2 B_2$  coincid, așa că perpendiculara ridicată în punctul  $O$  pe unul din planuri este perpendiculară și pe celălalt plan. Cum pe de altă parte distanța lui  $O$  la ambele vectoare este aceeași, momentele vectoarelor în raport de  $O$  sunt

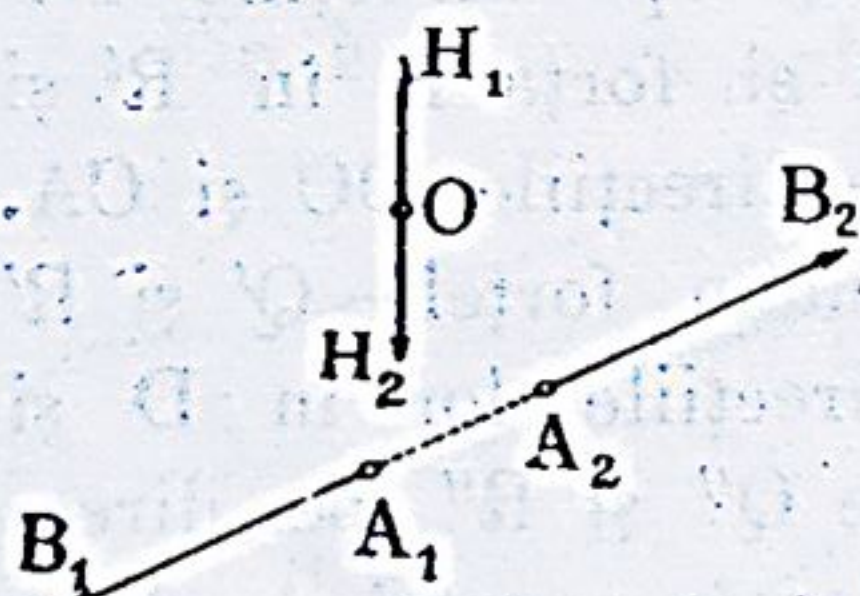


Fig. 101

egale și direct opuse, așa că momentul lor resultant este nul.

*Suficient.* În adevăr, dacă momentul resultant a două vectoare  $A_1 B_1$  și  $A_2 B_2$  în raport de un punct  $O$  este nul, momentele  $OH_1$  și  $OH_2$  ale vectoarelor sunt egale și direct opuse, deci ele sunt purtate pe aceeași dreaptă și în consecință pla-



nurile  $OA_1B_1$  și  $OA_2B_2$  coincid unul cu altul. Dar, pentru ca aceste planuri să coincidă ori care ar fi punctul  $O$ , trebuie ca vectoarele să fie în linie dreaptă. Înșfârșit momentele  $OH_1$  și  $OH_2$  fiind egale și de semne contrarii trebuie ca vectoarele  $A_1B_1$  și  $A_2B_2$  să fie egale și direct opuse.

**2. Teoremă.** Pentru ca un solid să fie în echilibru, este necesar și suficient ca momentul sistemului de forțe ce-i sunt aplicate, să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului.

În adevăr, pentru ca solidul să fie în echilibru este necesar și suficient ca cele două forțe  $S$  și  $T$ , care pot înlocui sistemul de forțe aplicate, să fie egale și direct opuse. Ori, pentru aceasta este necesar și suficient ca momentul acestor forțe în raport de ori și ce punct al spațiului să fie nul. Însă acest moment este identic cu acela al sistemului de forțe aplicate, deci momentul sistemului de forțe aplicate trebuie să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului.

**3. Ecuațiile care exprimă echilibrul unui solid.** În raport cu un sistem de trei axe cordonate dreptunghiulare, fie  $x, y, z$  cordonatele punctului de aplicație al uneia dintre forțe și  $X, Y, Z$  proiecțiile forței.

Momentul sistemului de forțe, în raport de un punct  $x', y', z'$  din spațiu, are ca proiecții pe axe<sup>1)</sup>.

$$(1) \quad L' = L - (y'R - z'Q), \quad M' = M - (z'P - x'R), \\ N' = N - (x'Q - y'P)$$

în care

$$L = \sum (yZ - zY), \quad M = \sum (zX - xZ), \quad N = \sum (xY - yX)$$

$$P = \sum X, \quad Q = \sum Y, \quad R = \sum Z.$$

Cum pentru echilibru trebuie ca  $L', M', N'$  să fie nuli, oricare ar fi  $x', y', z'$ , formulele (1) arată că condițiile necesare și suficiente echilibrului sunt

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0; \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

<sup>1)</sup> Cinematica, pag. 27.



adică, trebuie să avem următoarele 6 identități:

$$(2) \begin{cases} \Sigma X = 0, & \Sigma Y = 0, & \Sigma Z = 0; \\ \Sigma (yZ - zY) = 0, & \Sigma (zX - xZ) = 0, & \Sigma (xY - yX) = 0. \end{cases}$$

Primele trei ecuații exprimă că vectorul rezultat al forțelor este nul, iar celelalte trei, că momentul sistemului de forțe în raport cu origina aleasă este nul, această origină fiind de altfel un punct arbitrar.

**4. Aplicațiuni.** a). *Echilibrul forțelor dintr'un același plan.* Când forțele care lucrează asupra unui solid sunt toate situate într'un același plan, putem lua acest plan drept plan  $xOy$  și atunci pentru ori ce forță avem  $z = 0$ ,  $Z = 0$  și cele 6 ecuații de echilibru se reduc în consecință la următoarele trei:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Primele două exprimă că vectorul rezultat al forțelor este nul, iar cea de a treia, că momentul forțelor în raport de un punct al planului este nul.

b). *Echilibrul forțelor concurente.* Putem lua ca punct comun de aplicație al forțelor, punctul lor de întâlnire. Fie  $x$ ,  $y$ ,  $z$  coordonatele sale. Cele trei din urmă ecuații ale sistemului (2) se pot scrie atunci:

$$y \Sigma Z = z \Sigma Y, \quad z \Sigma X = x \Sigma Z, \quad x \Sigma Y = y \Sigma X$$

și vedem că aceste egalități se găsesc satisfăcute dacă avem

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Așa dar condițiile de echilibru se reduc numai la aceste 3 ultime ecuații, care exprimă că vectorul rezultat al sistemului de forțe este nul. Puteam raționa și astfel: Momentul sistemului de forțe fiind egal cu momentul rezultantei, trebuie ca acesta să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului, ceea ce nu poate avea loc decât dacă rezultanta este nulă, deci  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma Z = 0$ . — Obținem deci aceleași condiții ca în cazul echilibrului unui punct material, după cum este și logic să fie.



c). *Echilibrul unui sistem de forțe paralele.* Fie  $F$  una dintre forțe și  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  cosinusurile sale directoare. Avem, pentru proiecțiile pe cele trei axe:

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma.$$

Pentru forțele care lucrează în sens contrariu, ar trebui să schimbăm semnele cosinusurilor. În loc de aceasta, să dăm acelor forțe semnul minus și să păstrăm pe  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  neschimbați. Cu asemenea convenție, cele 6 ecuații de echilibru devin

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sum F &= 0, & \cos \beta \sum F &= 0, & \cos \gamma \sum F &= 0; \\ \cos \gamma \sum F y - \cos \beta \sum F z &= 0, & \cos \alpha \sum F z - \cos \gamma \sum F x &= 0, \\ \cos \beta \sum F x - \cos \alpha \sum F y &= 0. \end{aligned}$$

Cele dintâi trei se reduc la  $\sum F = 0$  care exprimă că vectorul rezultat al sistemului este nul. Celelalte trei se reduc la următoarele două:

$$\frac{\sum F x}{\cos \alpha} = \frac{\sum F y}{\cos \beta} = \frac{\sum F z}{\cos \gamma}.$$

Acest rezultat ne este cunoscut de la teoria momentelor, când am căutat condiția ca un sistem de vectoare paralele să aibe în raport de un punct  $O$  momentul nul, în ipoteza  $\sum F = 0$ .

Să presupunem că forțele sunt toate paralele cu axul  $Oz$ . În acest caz, cele 6 ecuații de echilibru se reduc la

$$\sum F = 0, \quad \sum F x = 0, \quad \sum F y = 0$$

căci  $\cos \alpha = 0$ ,  $\cos \beta = 0$  iar  $\cos \gamma = 1$ .

Dacă însfârșit forțele sunt toate coprinse în planul  $xOy$  și sunt paralele cu  $Oy$ , avem

$$\sum F = 0, \quad \sum F x = 0$$

de oarece  $\cos \alpha = 0$  iar  $\cos \beta = 1$ .

**5. Notă.** Să notăm în treacăt, că ori-ce alte condiții de echilibru nu pot fi decât consecințe ale ecuațiilor generale de mai sus.

Astfel, dacă este adevărat că în cazul când momentele unui sistem de forțe coprinse într'un plan, în raport de  $O$



puncte ale planului ne situate în linie dreaptă, sunt nule, sistemul este în echilibru, aceasta rezultă imediat din ecuațiile dela N° precedent, în felul următor:

Fie O, O', O'' cele trei puncte date, dintre care pe O să-l luăm ca origina axelor cordonate. Momentele în raport de aceste 3 puncte fiind nule avem

$$\begin{aligned} N &= \Sigma (x Y - y X) = 0 \\ (1) \quad N' &= N - (x' Q - y' P) = 0 \\ N'' &= N - (x'' Q - y'' P) = 0 \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} \Sigma (x Y - y X) &= 0 \\ x' Q - y' P &= 0, \quad x'' Q - y'' P = 0. \end{aligned}$$

Ori, dacă dreapta O'O'' nu trece prin origina O, atunci nu avem proporția  $\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''}$  și, ca urmare, cele două din urmă ecuații nu pot avea loc decât dacă

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Sistemul de ecuații (1) revine deci la cele 3 ecuații generale de echilibru dela pagina 160:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma (x Y - y X) = 0.$$

### III. SISTEME DE FORȚE ECHIVALENTE.

1. **Definiție.** Două sisteme de forțe care lucrează asupra unui solid sunt zise echivalente, dacă le putem înlocui, unul prin celălalt, fără a schimba starea solidului.

2. **Teorema I.** Dacă două sisteme de forțe  $S_1$  și  $S_2$  sunt echilibrate fiecare în parte de un al 3-lea sistem  $S_3$ , ele sunt echivalente.

În adevăr, sistemului  $S_1$  putem să-i adăugăm cele două sisteme  $S_2$  și  $S_3$  care își fac echilibru. Însă în sistemul  $(S_1, S_2, S_3)$  putem să suprimăm sistemele  $S_1$  și  $S_3$  care își fac echilibru. Rămâne atunci sistemul  $S_2$ , care este deci echivalent lui  $S_1$ .



**3. Teorema II.** *Pentru ca două sisteme de forțe să fie echivalente, este necesar și suficient ca ele să aibă același moment în raport de ori și ce punct al spațiului.*

În adevăr, pentru ca solidul să fie în echilibru sub acțiunea sistemului de forțe  $(S_1, S_3)$  este necesar și suficient ca momentul acestui sistem să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului, și aceasta pretinde ca momentul lui  $S_1$  să fie totdeauna egal și direct opus momentului lui  $S_3$ .

Ori, aceeași condiție trebuie îndeplinită pentru ca solidul să fie în echilibru sub acțiunea sistemului de forțe  $(S_2, S_3)$ . Rezultă atunci imediat că momentul sistemului  $S_1$  trebuie să fie totdeauna egal în mărime, direcție și sens cu momentul sistemului  $S_2$ .

**4. Ecuații care exprimă echivalența a două sisteme de forțe.**

Fie  $L'_1, M'_1, N'_1$ , și  $L'_2, M'_2, N'_2$  proiecțiile momentelor a două sisteme echivalente de forțe  $S_1$  și  $S_2$  în raport cu un punct de coordonate  $x', y', z'$ .

Potrivit teoremei precedente trebuie să avem, ori care ar fi  $x', y', z'$  următoarele trei egalități:

$$L'_1 = L'_2, \quad M'_1 = M'_2, \quad N'_1 = N'_2$$

adică; explicitând,

$$L_1 - (y' R_1 - z' Q_1) = L_2 - (y' R_2 - z' Q_2)$$

$$M_1 - (z' P_1 - x' R_1) = M_2 - (z' P_2 - x' R_2)$$

$$N_1 - (x' Q_1 - y' P_1) = N_2 - (x' Q_2 - y' P_2).$$

Ori, aceste 3 egalități nu pot avea loc ori care ar fi  $x', y', z'$  decât dacă

$$P_1 = P_2, \quad Q_1 = Q_2, \quad R_1 = R_2;$$

$$L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2.$$

Acste condiții exprimă că ambele sisteme de forțe au același vector rezultat și același moment în raport de un punct.

**5. Condiție pentru ca un sistem de forțe să se reducă la o forță unică.**

Un sistem de forțe aplicat unui solid este în general reductibil la două forțe, și numai în mod excepțional el poate



fi redus la o forță unică. Să căutăm condiția acestei din urmă reducții. Fie:  $P, Q, R$  componentele vectorului rezultat al sistemului de forțe și  $L, M, N$  componentele momentului sistemului de forțe în raport de un punct pe care-l luăm ca origină a axelor cordonate.

Pentru ca o forță  $X_0, Y_0, Z_0$  aplicată într'un punct  $x_0, y_0, z_0$  să fie echivalentă sistemului, este necesar și suficient să avem

$$\begin{aligned} X_0 &= P, & Y_0 &= Q, & Z_0 &= R; \\ y_0 Z_0 - z_0 Y_0 &= L, & z_0 X_0 - x_0 Z_0 &= M, & x_0 Y_0 - y_0 X_0 &= N. \end{aligned}$$

Cele dintâi 3 ecuații determină pe  $X_0, Y_0, Z_0$ ; celelalte 3 se scriu, înlocuind pe  $X_0, Y_0, Z_0$  prin  $P, Q, R$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_0 R - z_0 Q = L \\ & z_0 P - x_0 R = M \\ & x_0 Q - y_0 P = N. \end{aligned}$$

Aceste 3 ecuații în  $x_0, y_0, z_0$  nu sunt însă independente, determinantul lor fiind nul. De altfel, dacă înmulțim respectiv ecuațiile cu  $P, Q, R$  și le adunăm, obținem ecuația

$$(2) \quad PL + QM + NR = 0$$

care neconținând necunoscutele, reprezintă condiția de compatibilitate adică condiția<sup>1)</sup> pentru ca să poată exista valori  $x_0, y_0, z_0$  care să verifice sistemul celor trei ecuații. Dacă această condiție este satisfăcută, sistemul (1) se reduce numai la 2 ecuații care reprezintă o dreaptă  $\Delta$ . Ori ce punct de pe această dreaptă poate fi luat drept punct  $x_0, y_0, z_0$  de aplicație, pentru forța  $X_0, Y_0, Z_0$ . De altfel dreapta  $\Delta$  este paralelă cu vectorul rezultat al sistemului, și deci cu forța  $X_0, Y_0, Z_0$ , căci paralela lui  $\Delta$  dusă prin origină, are ca ecuații, potrivit sistemului (1):

$$\frac{x_0}{P} = \frac{y_0}{Q} = \frac{z_0}{R}.$$

<sup>1)</sup> Ea exprimă că determinantul caracteristic al sistemului (1) este nul.



Însfârșit, condiția (2) exprimând că vectoarele  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  și  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sunt perpendiculare unul pe altul dă loc la următoarea propozițiune:

*Pentru ca forțele aplicate unui solid să se reducă la o forță unică, este necesar și suficient ca vectorul rezultat al sistemului de forțe și momentul acestui sistem în raport de un punct să fie perpendiculari unul pe altul.*

Reamintim că suma  $P L + M Q + N R$  este un invariant<sup>1)</sup>, așa că dacă această sumă este nulă pentru punctul ales ca origină, ea este nulă pentru ori ce alt punct al spațiului.

Forța unică la care se reduce sistemul de forțe ia numele de *rezultantă*. Pentru ca ea să existe, trebuie bineînțeles, în primul rând, ca vectorul rezultat al sistemului să nu fie nul, și deci  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  să nu fie toți nuli. În această presupunere, vom observa că, în particular, dacă în raport de origina aleasă  $O$  avem

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

condiția (2) fiind atunci satisfăcută, sistemul de forțe se reduce la o forță unică, aplicată potrivit ecuațiilor (1) într'un punct oarecare al dreptei

$$\frac{x_0}{P} = \frac{y_0}{Q} = \frac{z_0}{R}$$

care trece prin origina  $O$  și are aceeași direcție ca vectorul rezultat al forțelor.

a). *Cazul forțelor cuprinse în același plan.* Luând planul forțelor drept plan  $x O y$ , sistemul celor 3 ecuații (1) se reduce la singura ecuație

$$x_0 Q - y_0 P = N$$

care determină dreapta de suport a rezultantei sistemului.

Așa dar, în caz că  $P$  și  $Q$  nu sunt amândoi nuli, sistemul se poate totdeauna reduce la o forță unică, fără vre-o altă condiție de îndeplinit. De altfel, în cazul forțelor conținute într'un plan, momentul oricărei forțe este perpendicular pe direcția forței.

<sup>1)</sup> *Otinematloa*, pag. 28.



b). *Cazul forțelor paralele.* Știm de la teoria momentelor că dacă vectorul rezultat al unui sistem de vectoare paralele nu este nul, adică dacă nu avem  $\Sigma F = 0$ , atunci există un punct de cordonate

$$a = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}, \quad b = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F}, \quad c = \frac{\Sigma F z}{\Sigma F}$$

prin care ducând o dreaptă  $\Delta$  paralelă direcției comune a vectoarelor și aplicând pe această dreaptă în sensul  $\alpha, \beta, \gamma$ , ce s'a definit, un vector egal cu  $\Sigma F$ , momentul acestui vector este egal cu acela al sistemului în raport de ori și ce punct al spațiului. Am stabilit pe de altă parte că există totdeauna relația  $PL + MQ + NR = 0$ .

Asimilând forțele cu vectoare, vedem astfel că un sistem de forțe paralele se poate totdeauna reduce la o forță unică, dacă vectorul rezultat al sistemului nu este nul. Punctul de cordonate  $a, b, c$  ia numele de *centrul forțelor paralele*. El este independent de unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  ale direcției forțelor.

Tot ca urmare a celor spuse la teoria momentelor, rezultanta  $R$  a unui sistem de 2 forțe paralele  $F_1$  și  $F_2$  aplicate în punctele  $O_1$  și  $O_2$ , divide dreapta  $O_1 O_2$  în părți invers proporționale cu cele două forțe, adică avem  $F_1 f_1 = F_2 f_2$  sau, mai general,

Fig. 102

$$\frac{F_1}{f_2} = \frac{F_2}{f_1} = \frac{R}{O_1 O_2}$$

Dacă forțele au direcții opuse, rezultanta lor este egală cu diferența  $F_2 - F_1$  și este aplicată într'un punct  $O$  de pe prelungirea dreptei  $O_1 O_2$  dinspre forța cea mai mare  $F_2$ , însă așa fel că avem tot proporțiile

$$\frac{F_1}{f_2} = \frac{F_2}{f_1} = \frac{R}{O_1 O_2}$$

cu  $R = F_2 - F_1$  și  $O_1 O_2 = f_1 - f_2$ .

*Aplicație la greutate.* Să considerăm, la suprafața pământului, un sistem inva-

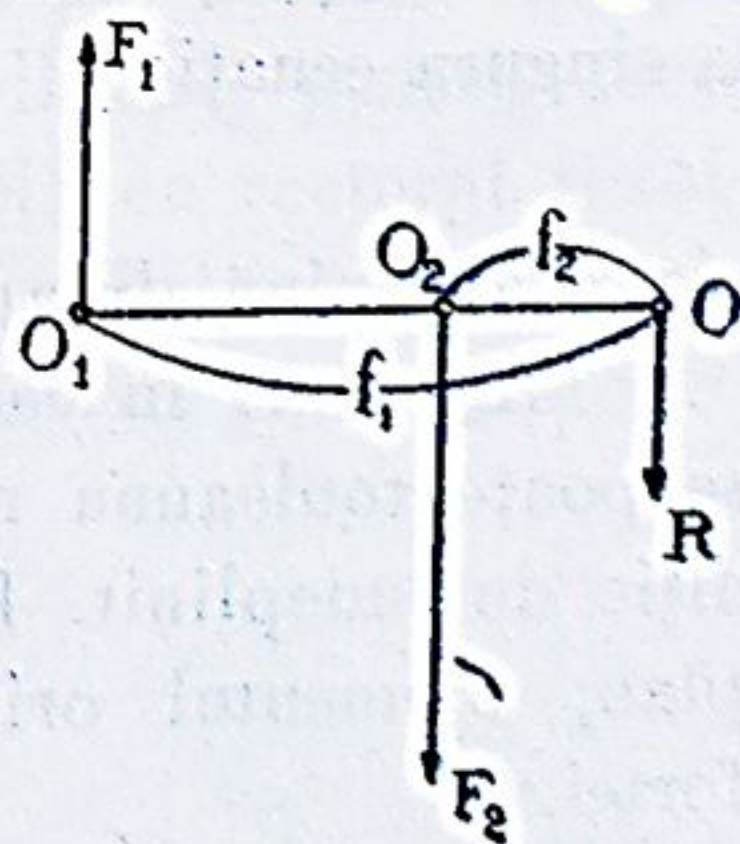


Fig. 103



riabil de puncte materiale, supuse la acțiunea greutatei. Dacă dimensiunile sistemului sunt foarte mici față de acelea ale pământului, greutățile tuturor punctelor sunt paralele, așa că însemnând prin  $p$  una din ele, prin  $x, y, z$  cordonatele punctului material respectiv și prin  $P$  greutatea întregului sistem, avem, potrivit celor de mai sus, pentru cordonatele centrului de forțe:

$$a = \frac{\sum px}{P}, \quad b = \frac{\sum py}{P}, \quad c = \frac{\sum pz}{P}.$$

Însă, dacă reprezentăm prin  $m$  masa punctului de greutate  $p$  și prin  $M$  masa totală, vom putea înlocui pe  $p$  prin  $mg$  și pe  $P$  prin  $Mg$ ; suprimând atunci factorul comun  $g$  de la numărători și numitori se obține

$$a = \frac{\sum mx}{M}, \quad b = \frac{\sum my}{M}, \quad c = \frac{\sum mz}{M}.$$

Așa dar, centrul de forțe coincide cu centrul de greutate al sistemului.

În mod mai general, vom zice, că dacă fiecare punct al unui sistem invariabil este solicitat de o forță proporțională cu masa punctului și toate aceste forțe sunt paralele și de același sens, atunci rezultanta lor trece prin centrul de greutate al sistemului.

**6. Notă.** Când 3 forțe care lucrează asupra unui solid își fac echilibru, ele sunt coprinse în același plan și una oarecare dintre ele este egală și direct opusă rezultantei celorlalte două.

Fie în adevăr  $P, Q, R$  aceste forțe. Pe direcția forței  $P$  să luăm un punct arbitrar  $O$ . Forțele făcându-și echilibru, momentul total în raport de  $O$  trebuie să fie nul. Cum momentul forței  $P$  în raport de  $O$  este nul, rezultă că momentele în raport de acest punct ale forțelor  $Q$  și  $R$  trebuie să fie egale și direct opuse, ceea ce pretinde ca forțele  $Q, R$  și punctul  $O$  să fie coprinse în același plan. Acest plan conține de altfel și forța  $P$  de oarece punctul  $O$  poate fi un punct absolut ori și care de pe direcția acestei forțe.



Pe de altă parte, una oarecare dintre forțe trebuind să facă echilibru celorlalte două, este evident egală și direct opusă rezultantei acestora. — În mod mai general, când mai multe

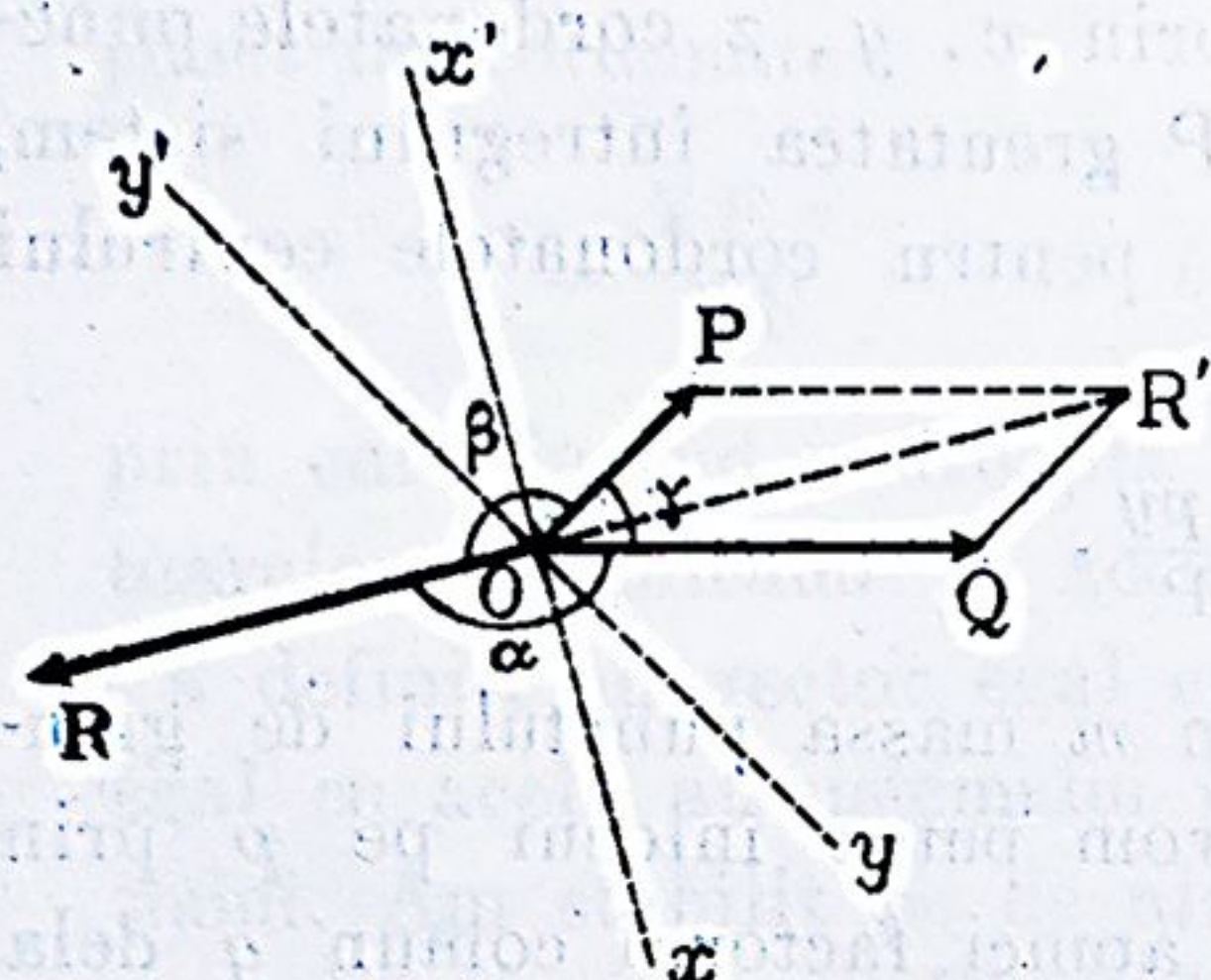


Fig. 104

forțe își fac echilibru asupra unui solid, una oarecare dintre ele echilibrează pe toate celelalte, de unde rezultă că suprimând una dintre forțe, sistemul format de celelalte se reduce la o forță unică.

Când 3 forțe își fac echilibru, ele sunt fie concurente, fie paralele. Când sunt concurente, avem următoarele pro-

porții între forțe și sinusurile unghiurilor cuprinse între ele:

$$(1) \quad \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$

din care rezultă

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos \gamma.$$

Avem în adevăr, spre exemplu, în triunghiul OPR', în care  $R' = R$ ,

$$\frac{P}{\sin (\pi - \alpha)} = \frac{Q}{\sin (\pi - \beta)} = \frac{R}{\sin (\pi - \gamma)}$$

egalități din care rezultă proporțiile (1) căci  $\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$ , etc.

Obținem tot proporțiile (1) dacă proiectăm sistemul de forțe pe două direcții respectiv perpendiculare pe două oarecare dintre direcțiile forțelor.

Astfel proiecția pe direcția  $xx'$  perpendiculară pe OR, ne dă

$$P \cos \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) + Q \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = 0$$

adică

$$P \sin \beta = Q \sin \alpha$$



iar proecția pe direcția  $yy'$  perpendiculară pe OP, dă

$$R \cos \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) + Q \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

adică

$$R \sin \beta = Q \sin \gamma.$$

Regăsim deci proporțiile (1).

În consecință, în cazul considerat, acest sistem de proporții va putea oricând înlocui sistemul celor două ecuații generale de echilibru  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ . Este însă de observat că aceste ecuații ca și cele două proporții au loc și în cazul când R formează cu rezultanta forțelor concurente P și Q un cuplu. Pentru ca 3 forțe coprinse în același plan să-și facă echilibru, mai este deci necesar ca momentul sistemului de forțe în raport de un punct al planului să fie nul, ca în cazul general al echilibrului forțelor coprinse în același plan.

#### IV. TEORIA CUPLURILOR.

1. **Definiție.** Se numește cuplu, sistemul format de 2 forțe egale, paralele și de sensuri contrarii.

Am stabilit la teoria momentelor, că momentul unui cuplu este același în raport de ori și ce punct al spațiului și deci egal cu momentul în raport de A sau A' care are ca valoare  $F \cdot d$ , însemnând prin F intensitatea comună a forțelor și prin  $d$  brațul de pârghie al cuplului. Ducând spre exemplu din A o perpendiculară pe planul cuplului, vectorul moment se poartă pe această perpendiculară și așa fel ca un observator culcat pe ea cu picioarele în A, să vadă direcția forței F' dela stânga spre dreapta.

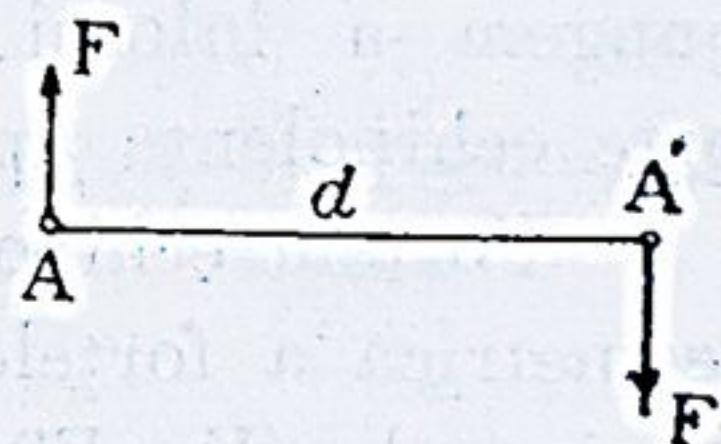


Fig. 105

2. **Teorema I.** Putem, fără a schimba efectul unui cuplu, să deplasăm planul cuplului paralel cu el însuși și să modificăm în acest plan forța și brațul de pârghie, așa fel însă ca momentul cuplului să nu se schimbe.



În adevăr, prin ori și care din aceste modificări nu se alterează deloc momentul cuplului în raport de un punct oarecare al spațiului. Toate cuplurile ce se obțin sunt deci echivalente.

**3. Teorema II.** *Un sistem de cupluri având ca momente  $H_1, H_2, H_3, \dots$  este echivalent unui cuplu unic având ca moment suma geometrică a momentelor  $H_1, H_2, H_3, \dots$*

În adevăr, momentul sistemului de cupluri fiind egal cu suma geometrică a momentelor  $H_1, H_2, H_3, \dots$  este același în raport de ori și ce punct al spațiului ca momentul cuplului unic; deci există echivalență.

**4. Intrebuințarea teoriei cuplurilor pentru reducerea forțelor aplicate unui solid.** Fie  $O$  un punct arbitrar, legat invariabil

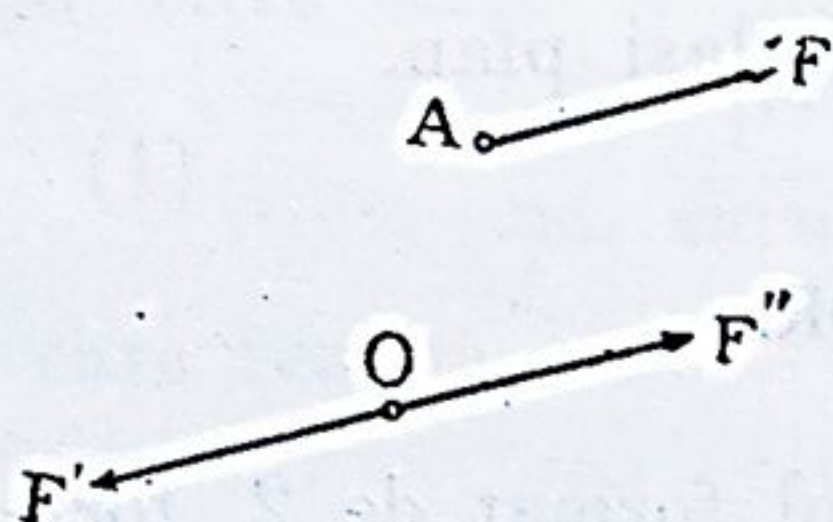


Fig. 106

solidului, și  $A$  punctul de aplicație al uneia din forțe  $F$ . Să aplicăm în punctul  $O$ , în sensuri opuse, două forțe  $F', F''$  egale și paralele forței  $F$ . Nu am schimbat prin aceasta starea solidului căci forțele  $F'$  și  $F''$  își fac echilibru. Prin operația făcută, am înlocuit însă forța  $F$  prin forța echipolentă  $F''$  și cuplul  $(F, F')$ . Procedând la fel pentru toate celelalte forțe care lucrează asupra solidului, ajungem a înlocui sistemul de forțe dat printr'un sistem de forțe echipolente aplicate în  $O$  și un sistem de cupluri.

Forțele echipolente din  $O$  dau o rezultantă egală cu suma geometrică a forțelor  $F$ . Pe de altă parte, cum momentul fiecărui cuplu  $(F, F')$  în raport de  $O$  este egal cu momentul forței respective  $F$ , momentul sistemului de cupluri este egal cu acela al sistemului de forțe aplicate solidului. De aci următoarea propozițiune:

*Un sistem de forțe aplicate unui solid este totdeauna reductibil la o forță unică aplicată într'un punct arbitrar  $O$ , egală cu suma geometrică a forțelor date, și un cuplu unic al căruia moment este egal cu momentul sistemului de forțe în raport de  $O$ .*



Să ducem prin  $O$  trei axe cordonate dreptunghiulare și să însemnăm prin  $X, Y, Z$  proiecțiile uneia dintre forțe  $F$  și prin  $x, y, z$  cordonatele punctului ei de aplicație.

Potrivit propozițiunei enunțate, forța unică aplicată în  $O$  va avea ca proiecții

$$P = \Sigma X, \quad Q = \Sigma Y, \quad R = \Sigma Z$$

iar momentul cuplului unic va avea ca proiecții pe aceleași axe

$$L = \Sigma (yZ - zY), \quad M = \Sigma (zX - xZ), \quad N = \Sigma (xY - yX).$$

Pentru echilibrul solidului, este necesar și suficient ca atât forța unică cât și cuplul unic să fie nuli. Exprimând acest lucru, regăsim cele 6 condiții de echilibru cunoscute

$$\begin{array}{lll} P = 0, & Q = 0, & R = 0; \\ L = 0, & M = 0, & N = 0. \end{array}$$

**5. Notă.** a). Din cele de mai sus rezultă că dacă numai suma geometrică a forțelor aplicate unui solid este nulă, adică dacă avem numai

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

*sistemul de forțe se reduce la un cuplu.*

Dacă din potrivă, avem numai

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

adică dacă momentul sistemului de forțe în raport de un punct  $O$  este nul, *sistemul de forțe se reduce la o singură forță aplicată în  $O$ , egală cu suma lor geometrică, așa după cum am mai spus la pagina 165.*

b). Un cuplu nu poate fi echivalent decât tot unui cuplu, căci o forță unică nu poate avea niciodată același moment în raport de ori și ce punct al spațiului ca un cuplu.

Ca urmare imediată, un cuplu nu poate fi distrus decât tot printr'un cuplu.

## V. ECHILIBRUL UNUI SOLID CARE NU ESTE LIBER.

**1. Determinarea condițiilor de echilibru.** Fie un solid ale cărui mișcări să fie limitate de obstacole, cum spre exemplu un



solid care având 2 puncte fixe nu poate lua altă mișcare decât o rotație în jurul drepte care unește cele două puncte.

În asemenea cazuri, condițiile de echilibru se obțin exprimând că forțele, în general necunoscute, prin care se pot înlocui acțiunile obstacolelor asupra solidului și forțele direct aplicate solidului, formează împreună un sistem de forțe în echilibru, cele două categorii de forțe făcându-și de altfel reciproc echilibru.

Vom putea deci aplica sistemului total de forțe cele 6 ecuații de echilibru. Eliminând între ecuații componentele forțelor necunoscute, ne vor rămâne un oarecare număr de ecuații independente de aceste forțe care vor reprezenta condițiile de echilibru căutate. Presupunând aceste condiții îndeplinite, vom deduce componentele forțelor necunoscute din ecuațiile în care figurează ele.

**2. Echilibrul unui solid care are un punct fix.** Să luăm punctul fix ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare. Fie  $X, Y, Z$  proiecțiile uneia oarecare dintre forțele aplicate solidului și  $x, y, z$  coordonatele punctului ei de aplicație. Acțiunea punctului fix asupra solidului poate fi reprezentată printr-o forță  $N$  trecând prin acest punct; fie  $X', Y', Z'$  componentele necunoscute ale sale.

Solidul putând fi considerat ca liber și în echilibru sub acțiunea forțelor direct aplicate și a forței  $N$ , aplicația celor 6 ecuații de echilibru ne dă, observând că momentul forței  $N$  în raport de origină este nul,

$$\begin{aligned} X' + \Sigma X &= 0, & Y' + \Sigma Y &= 0, & Z' + \Sigma Z &= 0; \\ \Sigma(yZ - zY) &= 0, & \Sigma(zX - xZ) &= 0, & \Sigma(xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

Cele 3 din urmă ecuații fiind independente de  $N$  reprezintă condițiile de echilibru. Ele exprimă că *momentul sistemului de forțe direct aplicate, în raport de punctul fix, este nul*; cu alte cuvinte că forțele direct aplicate se reduc la o singură forță trecând prin punctul fix.

Cele dintâi 3 ecuații ne dau componentele acțiunii  $N$ .



Avem în adevăr

$$X' = - \Sigma X, \quad Y' = - \Sigma Y, \quad Z' = - \Sigma Z.$$

Presiunea solidului asupra punctului fix, fiind egală și direct opusă lui  $N$ , are ca componente  $-X'$ ,  $-Y'$ ,  $-Z'$ . Deci: sarcina punctului fix este egală, în caz de echilibru, cu rezultanta forțelor direct aplicate.

*Exemple.* a). Echilibrul unui pârghii  $A O B$  supusă forțelor  $F_1$  și  $F_2$ . Condiția este ca momentul sistemului  $F_1, F_2$  în raport de punctul fix  $O$  să fie nul, deci ca momentele forțelor  $F_1$  și  $F_2$  în raport de  $O$  să fie egale și direct opuse adică

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2.$$

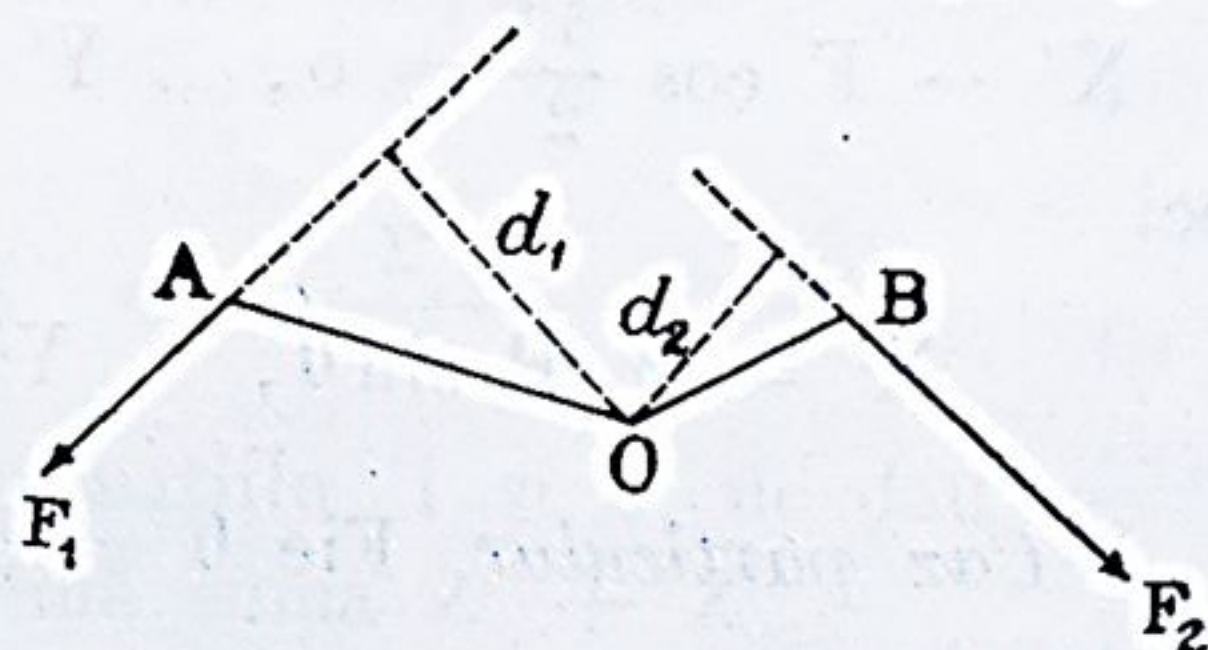


Fig. 107

Rezultanta forțelor  $F_1$  și  $F_2$  trece prin punctul  $O$  și reprezintă sarcina acestui punct.

b). Echilibrul într'un plan vertical al unei bare grele și omogene  $OA$ , de lungime  $a$ , fixată în  $O$  și legată prin extremitatea ei  $A$  de un fir flexibil și inextensibil care trece fără frecare printr'un inel fix  $C$  și este tras de o forță  $F$ . În afară de greutatea  $P$  și de forța  $F$ , bara mai este sollicitată la trei sferturi din lungimea ei de o forță verticală egală cu  $2P$ . Se dă

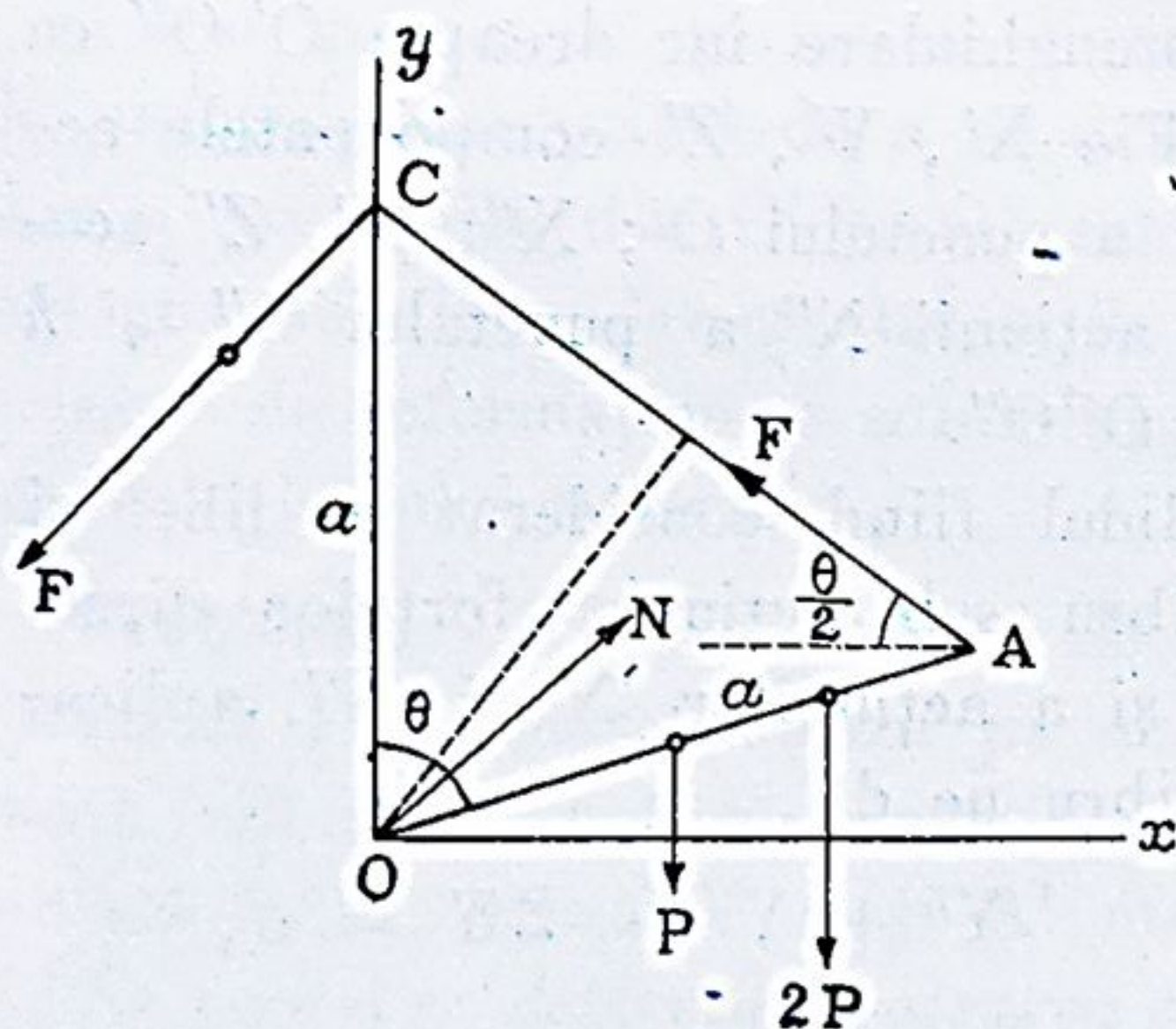


Fig. 108

$$OC = OA.$$

Cum efectul forței  $F$  se transmite prin fir punctului  $A$  în direcția  $AC$ , condiția de echilibru este, luând momentele în raport de  $O$ ,

$$P \frac{a}{2} \sin \theta + 2P \frac{3a}{4} \sin \theta - F a \cos \frac{\theta}{2} = 0$$



adică

$$F \cos \frac{\theta}{2} = 2 P \sin \theta$$

de unde

$$F = 4 P \sin \frac{\theta}{2}.$$

Să calculăm valoarea acțiunii  $N$  din punctul  $O$ . Avem, proiectând pe  $Ox$  și  $Oy$  și însemnând prin  $X'$  și  $Y'$  componentele lui  $N$ ,

$$X' - F \cos \frac{\theta}{2} = 0, \quad Y' - 3 P + F \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

deci

$$X' = 2 P \sin \theta, \quad Y' = P \left( 3 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

*Caz particular.* Fie  $\theta = 60^\circ$ . Atunci

$$F = 2 P, \quad X' = P \sqrt{3}, \quad Y' = 2 P \\ N = P \sqrt{7}.$$

**3. Echilibrul unui solid care are un ax fix.** Când un solid are două puncte fixe  $O'$ ,  $O''$ , solidul nu poate decât să se învârtască în jurul dreptei  $O' O''$ , care este un ax fix. Să luăm

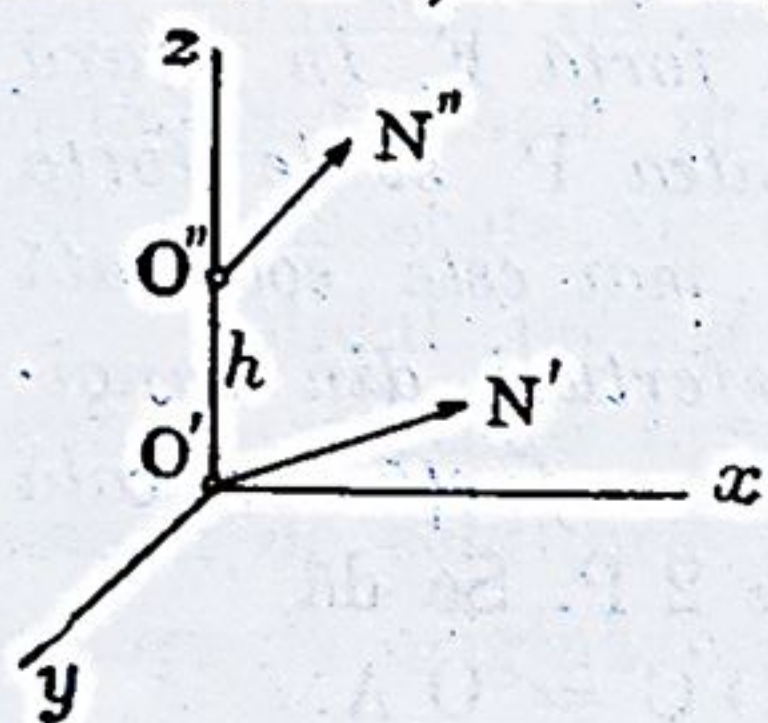


Fig. 109

punctul  $O'$  ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare iar dreapta  $O' O''$  ca ax  $Oz$ . Fie  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  componentele acțiunii  $N'$  a punctului  $O'$ ;  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  acelea ale acțiunii  $N''$  a punctului  $O''$  și  $h$  distanța  $O' O''$ .

Solidul fiind considerat ca liber și în echilibru sub acțiunea forțelor direct aplicate și a acțiunilor  $N'$  și  $N''$ , aplicațiunea celor 6 ecuații de echilibru ne dă,

$$X' + X'' + \Sigma X = 0, \quad Y' + Y'' + \Sigma Y = 0,$$

$$Z' + Z'' + \Sigma Z = 0;$$

$$-h Y'' + \Sigma (y Z - z Y) = 0, \quad h X'' + \Sigma (z X - x Z) = 0,$$

$$\Sigma (x' Y - y X) = 0$$



observând că forța  $N''$  intervine singură în cele 3 din urmă ecuații și că cordonatele punctului său de aplicație fiind  $0, 0, h$ , componentele momentului ei în raport de origină sunt, potrivit formulelor generale,

$$-h Y'', \quad h X'', \quad 0.$$

Ultima ecuație fiind singura care este independentă de acțiunile necunoscute  $N'$  și  $N''$ , exprimă condiția de echilibru. Această condiție este ca *momentul sistemului de forțe direct aplicate solidului, în raport de axul fix, să fie nul.*

Ecuatiile 4 și 5 ne dau

$$Y'' = \frac{\Sigma (y Z - z Y)}{h}, \quad X'' = \frac{-\Sigma (z X - x Z)}{h}.$$

$X''$  și  $Y''$  fiind astfel cunoscuți, ecuațiile 1 și 2 ne dau pe  $X'$  și  $Y'$ ; însfârșit ecuația 3 determină suma  $Z' + Z''$ .

Cantitățile  $Z'$  și  $Z''$  nu pot prin urmare să fie determinate în mod separat; acest rezultat putea să fie prevăzut, căci ori ce forță aplicată unui *solid invariabil* putând să fie transportată într'un punct oarecare de pe direcția sa, este clar că cele două forțe  $Z'$ ,  $Z''$  pot să fie distribuite în mod arbitrar celor 2 puncte  $O'$ ,  $O''$  cu singura condiție ca suma lor să rămână neschimbată.

Când în loc de un sistem riguros rigid, se consideră un solid natural, susceptibil de a se deforma sub acțiunea forțelor aplicate, presiunile din  $O'$  și  $O''$  sunt sub toate raporturile distincte una de alta, dar pentru a le calcula este necesar să se dea legea de deformațiune a solidului și această chestiune nu intră în cadrul Cursului nostru.

**Problemă.** *Un solid omogen de formă paralelipipedică și de greutate  $P$  se găsește așezat pe un plan orizontal, ca un zid vertical. El poate fi însă învârtit în jurul muchiei sale  $AA'$  proiectată în  $A$ , punctele  $A$  și  $A'$  fiind fixe.*

*Se cere a se determina valoarea efortului perpendicular  $Q$ , cu care trebuie să împingem solidul la o înălțime  $h$  dela bază, pentru ca el să se afle pe punctul de a se răsturna spre dreapta figurei.*



Fie  $a, b, c$  lungimile celor trei muchii ale solidului, dintre care  $c = AA'$ .

Forța căutată  $Q$  este aceea care menține solidul în poziție verticală când el, în loc de a se rezema pe planul orizontal, se reazemă numai pe muchia sa  $AA'$ . Valoarea acestei forțe se determină luând momentele forțelor  $P$  și  $Q$  în raport de axul de rotație. Avem

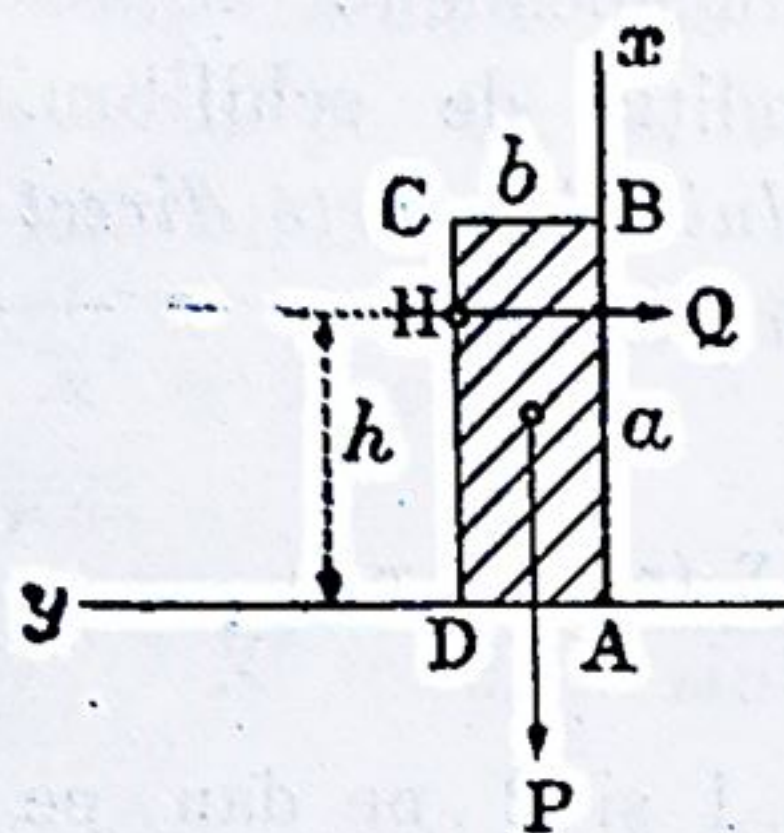


Fig. 110

deci

$$P \frac{b}{2} - hQ = 0$$

$$Q = \frac{Pb}{2h}.$$

Ori-ce efort superior lui  $Q$  provoacă răsturnarea solidului spre dreapta figurei.

Valoarea lui  $Q$  nu depinde de poziția punctului de aplicație  $K$  pe orizontala proiectată în  $H$ . La ori-ce poziție a lui  $K$  corespund însă alte acțiuni  $N'$  și  $N''$  ale celor 2 puncte fixe  $A$  și  $A'$  asupra solidului.

Dacă voim a determina aceste acțiuni prin metoda generală, vom imagina un sistem de axe dreptunghiulare  $Axyz$  cu originea în  $A$ , așa după cum arată figura, axul  $Az$  fiind îndreptat pe direcția  $AA'$  pentru ca sistemul de axe să formeze un triedru direct. Atunci aplicația primelor 5 formule din cele 6 de mai sus ale echilibrului, ne dă, însemnând prin  $z$  depărtarea punctului  $K$  de planul vertical  $Axy$ ,

$$\begin{aligned} X' + X'' - P &= 0, & Y' + Y'' - Q &= 0, & Z' + Z'' &= 0; \\ -cY'' + Qz &= 0, & cX'' - \frac{c}{z}P &= 0 \end{aligned}$$

din care deducem

$$X'' = \frac{P}{2}, \quad Y'' = \frac{Qz}{c}$$

$$X' = \frac{P}{2}, \quad Y' = Q\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

componentele  $Z'$  și  $Z''$  ne-putând fi determinate fie-care în parte.



4. **Echilibrul unui solid care se reazemă pe un plan fix.**  
Fie un solid care se reazemă pe un plan fix prin punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . Să luăm acest plan drept plan  $xOy$ , iar ca ax  $Oz$  să luăm perpendiculara îndreptată spre partea unde se găsește solidul.

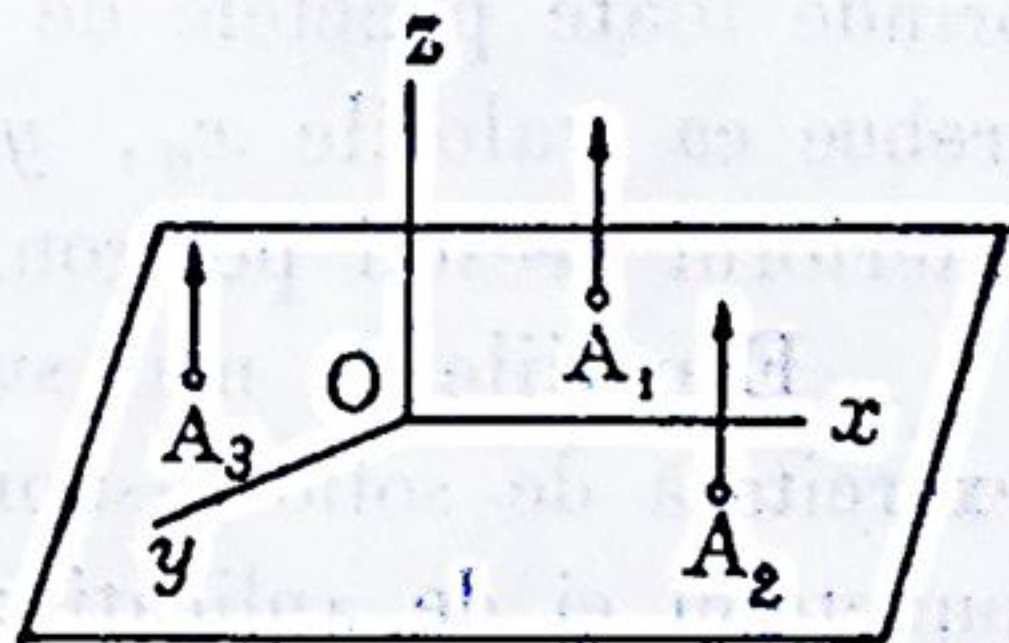


Fig. 111

Acțiunile planului fix sunt paralele cu  $Oz$  și aplicate în punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$ ; ele dau o rezultantă  $Z_0$  care întâlnește planul  $xOy$  într'un punct de coordonate  $x_0, y_0$ .

Solidul fiind în echilibru sub acțiunea rezultantei  $Z_0$  și a forțelor ce-i sunt aplicate, aplicațiunea ecuațiilor de echilibru ne dă

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, & \Sigma Y &= 0, & Z_0 + \Sigma Z &= 0; \\ y_0 Z_0 + \Sigma (y Z - z Y) &= 0, & -x_0 Z_0 + \Sigma (z X - x Z) &= 0, \\ \Sigma (x Y - y X) &= 0. \end{aligned}$$

Ecuațiile 1, 2 și 6 neconținând pe  $Z_0$  exprimă condițiile de echilibru și anume: *trebuie ca vectorul rezultat al forțelor aplicate să fie perpendicular pe planul fix și, pe de altă parte, ca momentul acelorasi forțe în raport de un ax normal planului să fie nul.*

Ecuația 3 ne dă

$$Z_0 = -\Sigma Z.$$

Cum  $Z_0$  este pozitiv, trebuie deci ca  $\Sigma Z$  să fie negativ și aceasta constituie o nouă condiție de îndeplinit.  $\Sigma Z$  fiind egal cu  $-Z_0$  reprezintă acțiunea solidului asupra planului fix și se înțelege că această acțiune trebuie să constituie o apăsare așa că  $\Sigma Z$  trebuie cu adevărat să fie negativ.

Insfârșit ecuațiile 4 și 5 determină pe  $x_0$  și  $y_0$ :

$$x_0 = \frac{\Sigma (z X - x Z)}{Z_0}, \quad y_0 = \frac{-\Sigma (y Z - z Y)}{Z_0}.$$

Cum punctul de aplicație al rezultantei a 2 forțe paralele de același sens este coprins între punctele de aplicație ale for-



țelor, se vede ușor că dacă compunem succesiv acțiunile aplicate în  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , punctul de aplicație al rezultantei  $Z_0$  va fi necesarmente situat în interiorul poligonului convex care conține toate punctele de reazăm. Așa dar, ca *ultimă condiție*, trebuie ca valorile  $x_0, y_0$  să corespundă unui punct situat în interiorul acestui poligon.

Ecuatiile de mai sus ne dau numai presiunea totală —  $Z_0$  exercitată de solid asupra planului și coordonatele  $x_0, y_0$  ale punctului ei de aplicație; să ne propunem de a determina presiunile care corespund fiecăruia în parte dintre punctele de reazăm. Fie  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , acțiunile planului fix în  $A_1, A_2, A_3, \dots$  și  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \dots$  coordonatele acestor puncte.

Acțiunea  $Z_0$  fiind rezultanta forțelor  $p_1, p_2, p_3, \dots$  teoria forțelor paralele ne procură ecuațiile

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = Z_0 = - \Sigma Z$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots = x_0 Z_0 = \Sigma (z X - x Z)$$

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots = y_0 Z_0 = - \Sigma (y Z - z Y).$$

Necunoscutele fiind  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , vedem că dacă numărul punctelor de reazăm este mai mare ca 3, problema este nedeterminată. Când este însă vorba de un solid natural, acțiunile  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , și prin urmare presiunile în punctele de reazăm, care sunt respectiv egale și direct opuse acțiunilor, sunt totdeauna determinate, dar solidul este atunci deformabil, iar nu rigid după cum presupune teoria.

**5. Probleme. 1).** *Să se determine poziția de echilibru a unei bare grele și omogene, care se reazămă prin extremitățile sale pe două planuri înclinate.*

Fie  $P$  greutatea barei, aplicată în mijlocul ei  $D$ ;  $N$  și  $N'$  cele două acțiuni normale ale planurilor înclinate asupra extremităților  $A$  și  $A'$  ale barei.

Cele 3 forțe  $P, N, N'$  făcându-și echilibru sunt concurente și cuprinse în același plan. Acest plan e vertical căci conține forța  $P$ ; el este totdeauna perpendicular pe intersecția celor două



planuri înclinate de oare ce conține perpendicularele  $N$  și  $N'$  la aceste planuri. Această intersecție este deci o dreaptă orizontală.

Fie  $\theta$  unghiul barei cu orizontala. Cunoașterea acestui unghi determină poziția de echilibru  $AA'$  a barei.

Pentru determinarea lui  $\theta$ , vom lua momentele în raport de un punct al planului. Cel mai simplu este de a lua momentele în raport de punctul  $C$  unde se întâlnesc direcțiile celor două acțiuni  $N$  și  $N'$ , căci momentele acestor acțiuni fiind nule în raport

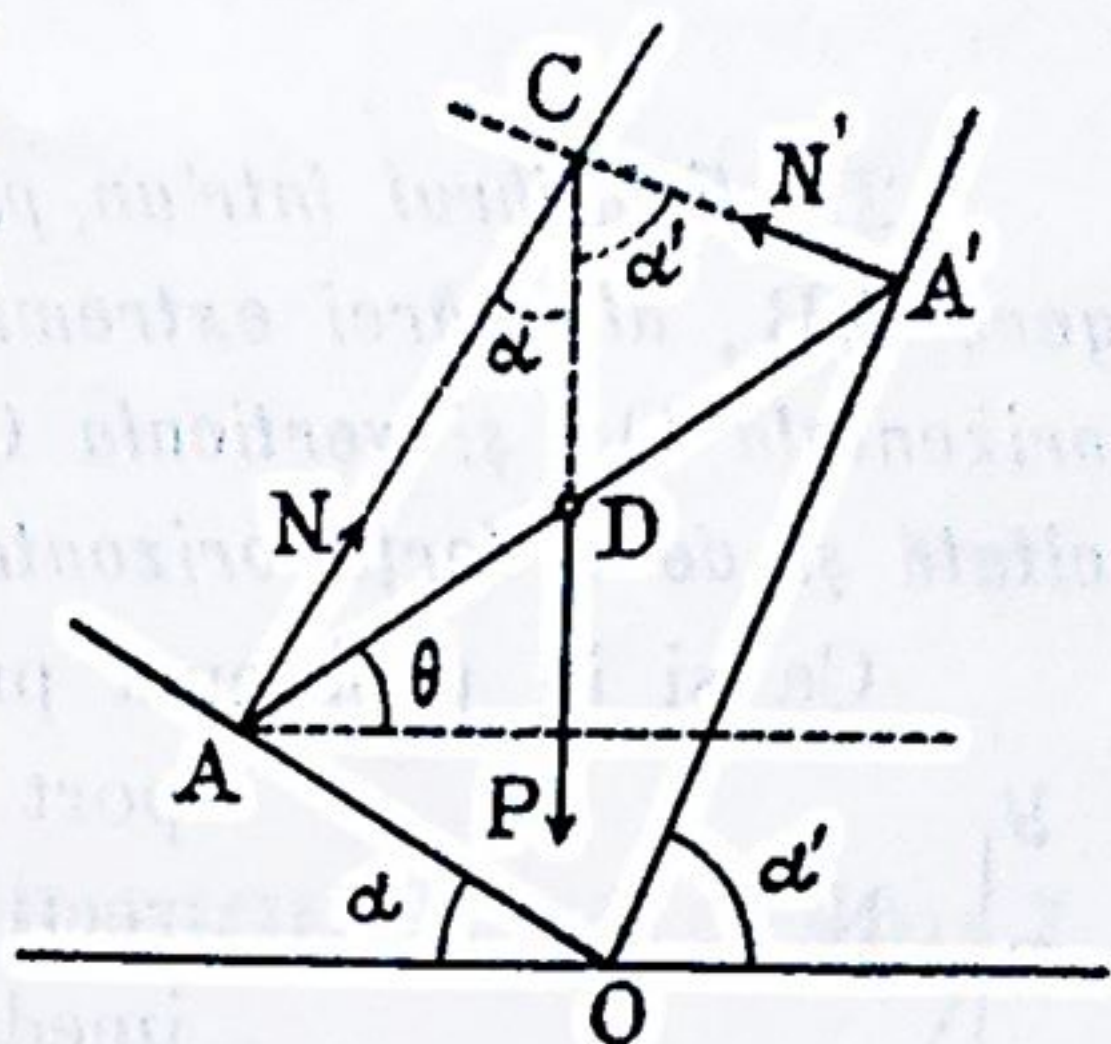


Fig. 112

de  $C$  nu mai figurează atunci în ecuația momentelor. Condiția de echilibru este deci ca momentul forței  $P$  în raport de  $C$  să fie nul, adică direcția forței  $P$  să treacă prin  $C$ , după cum arată figura de mai sus. Avem atunci

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta\right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CD}{A'D} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha' + \theta\right)}{\sin \alpha'} = \frac{\cos(\alpha' - \theta)}{\sin \alpha'}$$

și, cum  $AD = A'D$ , obținem egalitatea

$$\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\alpha' - \theta)}{\sin \alpha'}$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \alpha'}.$$

Încât privește pe  $N$  și  $N'$ , valorile lor se pot obține scriind proporționalitatea dintre cele 3 forțe  $P$ ,  $N$ ,  $N'$  și sinusurile unghiurilor cuprinse între ele. Figura ne dă

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{N}{\sin(\pi - \alpha')} = \frac{N'}{\sin(\pi - \alpha)}$$

sau

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{N}{\sin \alpha'} = \frac{N'}{\sin \alpha}$$



de unde rezultă

$$N = \frac{P \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')}, \quad N' = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')}.$$

2). Echilibrul într'un plan vertical al unei bare grele și omogene AB, ale cărei extremități A și B se reazădă respectiv pe orizontala Ox și verticala Oy, extremitatea A a barei fiind soliciată și de o forță orizontală F îndreptată spre O.

Ca și în problema precedentă, vom lua momentele în raport de punctul C unde se întâlnesc direcțiile celor 2 acțiuni N și N'. Obținem imediat

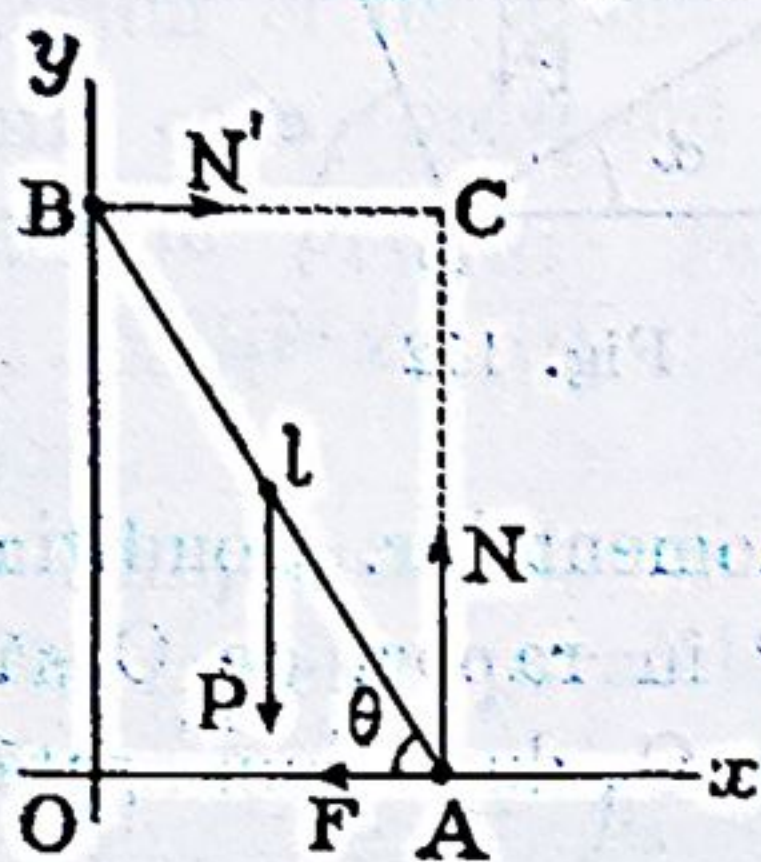


Fig. 113

$$Fl \sin \theta - P \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

de unde

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{2F}.$$

Oy ne dau

$$N' - F = 0, \quad N - P = 0$$

deci

$$N' = F, \quad N = P.$$

Rezultă, că sistemul celor 4 forțe P, F, N, N' formează 2 cupluri (P, N) și (F, N') care își fac echilibrul.



### III. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FIGURĂ VARIABILĂ COMPUSE DIN MAI MULTE SOLIDE INVARIABILE.

#### I. CONDIȚIUNI DE ECHILIBRU.

1. Să considerăm un sistem de solide, cu diferite legături între ele și supuse la diferite forțe și diferite obligațiuni.

Când există echilibru, fiecare dintre solide se găsește separat în echilibru sub acțiunea a 3 feluri de forțe:

1<sup>o</sup> forțele ce-i sunt direct aplicate,

2<sup>o</sup> forțele care reprezintă acțiunile celorlalte solide asupra sa, potrivit legăturilor existente,

3<sup>o</sup> forțele care reprezintă obligațiunile particulare ce sunt impuse solidului (de a avea unul sau două puncte fixe, de a se sprijini pe un plan fix, etc.).

Vom scrie deci pentru fiecare dintre solide cele 6 ecuațiuni de echilibru, ținând socoteală de egalitatea dintre diversele acțiuni și reacțiuni din sistem, apoi, eliminăm între ecuațiunile obținute forțele dela No. 2<sup>o</sup> și 3<sup>o</sup> în general necunoscute; ne vor rămâne atunci una sau mai multe ecuații care vor reprezenta condițiile de echilibru ale sistemului.

Bine înțeles, că dacă sistemul este în echilibru, vom putea să-l considerăm ca solidificat și să aplicăm direct întregului sistem cele 6 ecuații generale de echilibru ale solidului invariabil. Aceste ecuații nu vor reprezenta însă nimic nou, ele putându-se deduce din sistemul total de ecuații de care am vorbit mai sus.



2. Câteva exemple explicative. 1). Două sfere grele și omogene  $O$  și  $O'$ , coprinse între două planuri fixe și înclinate  $IA$  și  $IA'$  cu intersecție orizontală, se găsesc în echilibru.

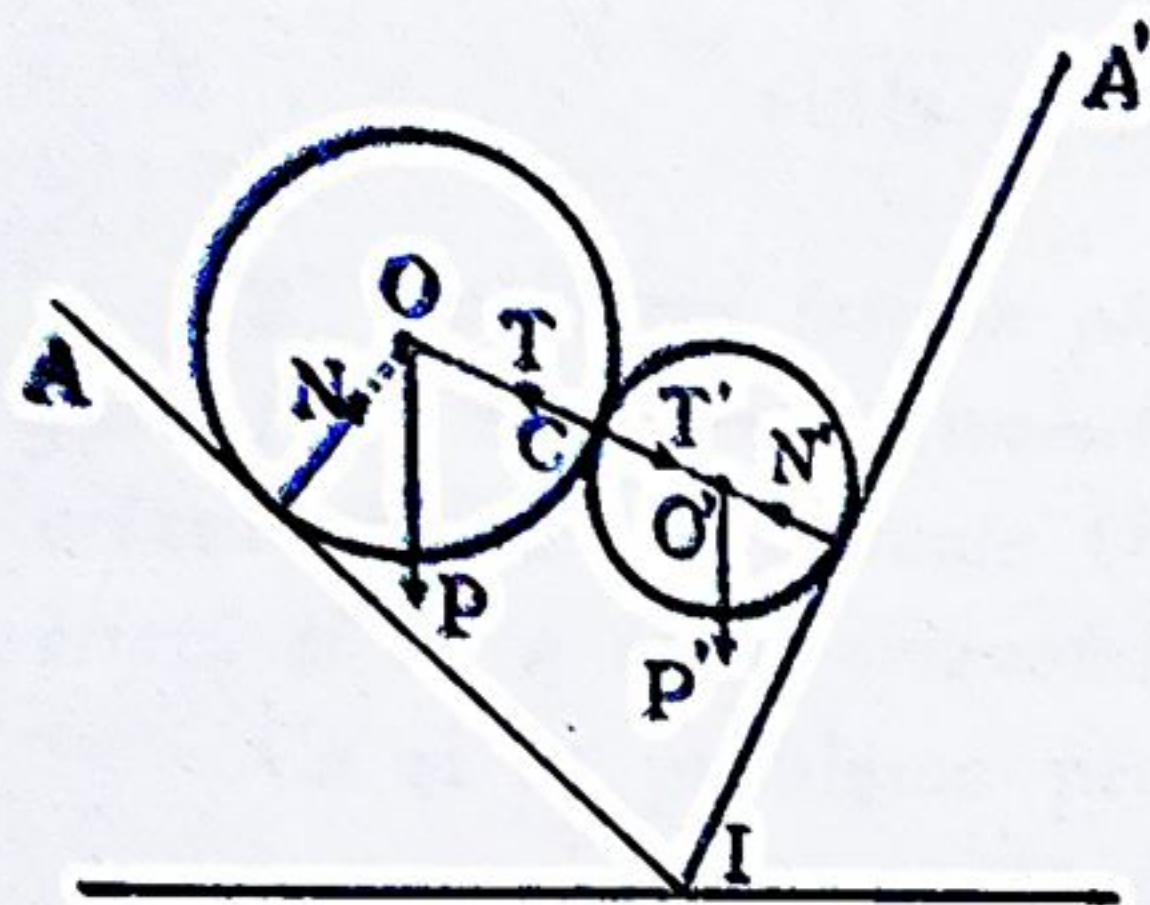


Fig. 114

Forțele direct aplicate sunt greutatea  $P$  și  $P'$ , aplicate în centrele  $O$  și  $O'$  ale sferelor.

Acțiunea sferei  $O'$  asupra sferei  $O$  este o forță de compresiune  $T$ , îndreptată dela  $C$  spre  $O$ , iar acțiunea sferei  $O$  asupra sferei  $O'$  este o forță  $T'$  egală și direct opusă lui  $T$ , în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii.

Însfârșit, obligația impusă sferelor de a se sprijini pe planurile înclinate  $IA$  și  $IA'$  se reprezintă prin forțele  $N$  și  $N'$  normale planurilor în punctele de contact.

2) Două bare  $AB$  și  $BC$ , articulate în punctul  $B$  și supuse la diferite forțe, se găsesc în echilibru.

În punctul de articulație  $B$ , bara  $BC$  acționează asupra barei  $AB$  cu o forță  $T$  iar bara  $AB$  reacționează asupra barei  $BC$  cu o forță  $T'$  egală și direct opusă lui  $T$ .

Vom scrie deci ecuațiile de echilibru pentru fiecare bară în parte, ținând seama de forța  $T$  aplicată barei  $AB$  și de forța  $T'$  aplicată barei  $BC$ .

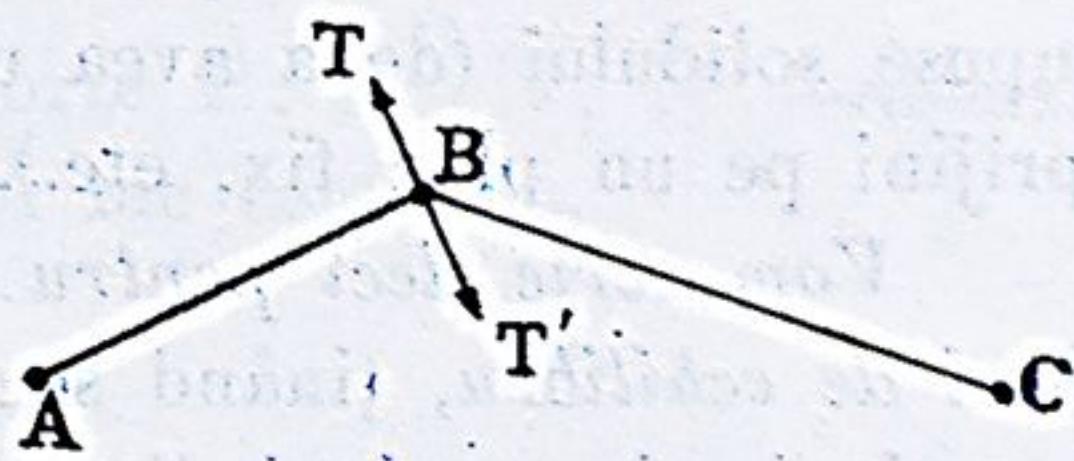


Fig. 115

3). Două solide  $S$  și  $S'$ , articulate între ele printr-o vergea rigidă  $AB$  și supuse unui sistem de forțe, se găsesc în echilibru.

Presupunem că între extremitățile  $A$  și  $B$  ale vergelii nu lucrează nici o forță. Vergea fiind în echilibru, trebuie ca acțiunile solidelor  $S$  și  $S'$  asupra ei să fie două forțe  $T$  și  $T'$  egale și direct opuse aplicate în punctele  $A$  și  $B$ . Invers, acțiunile ver-



gelii asupra solidelor sunt 2 forțe  $T_1$ ,  $T_1'$  egale și direct opuse celor dintâi.

Așa dar, fiecare dintre solide va fi în echilibru sub acțiunea forțelor ce-i sunt direct aplicate și a acțiunilor  $T_1$ ,  $T_1'$  ale vergelii asupra lui. — Vergeana poate de altfel să fie supusă din partea solidelor fie la o tracțiune, fie la o compresiune.

4). Două solide în echilibru, legate printr'un fir flexibil însă inextensibil. Dacă există echilibru, extremitățile firului sunt supuse din partea solidelor la două eforturi de tracțiune  $T$ ,  $T'$ , egale și direct opuse, aplicate la extremitățile A și B ale firului. Se va raționa deci ca mai sus, forțele direct aplicate solidelor trebuind însă să aibe ca efect de a întinde firul, ceea ce constituie o condiție particulară de echilibru.

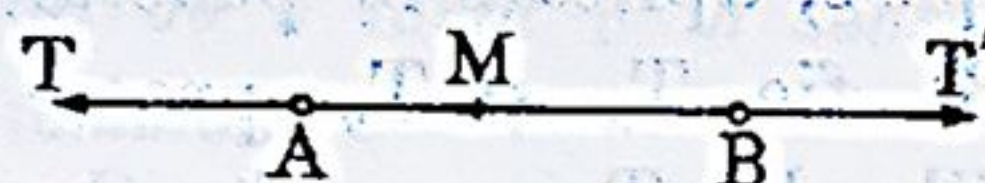


Fig. 117

Să considerăm un punct M al firului. Acțiunea porțiunii de fir MB asupra porțiunii MA, este egală cu forța  $T'$  aplicată în M, căci dacă suprimăm porțiunea MB, trebuie să aplicăm în punctul M o forță egală cu  $T'$  pentru a menține echilibrul. Invers, acțiunea porțiunii MA asupra porțiunii MB este o forță egală cu  $T$ , aplicată în M. Așa dar în fiecare punct, acțiunile reciproce ale celor două porțiuni de fir corespunzătoare sunt egale și direct opuse, intensitatea lor comună fiind egală cu aceea a forțelor care își fac echilibru la extremitățile firului. Acțiunea unei porțiuni de fir asupra celeilalte, aplicată în M, se numește *tensiune*.

Dacă firul trece printr'un inel fix, în interiorul căruia poate aluneca fără frecare, trebuie, pentru ca echilibrul să existe, ca acțiunile  $T$ ,  $T'$  dela extremitățile firului să fie tot egale între

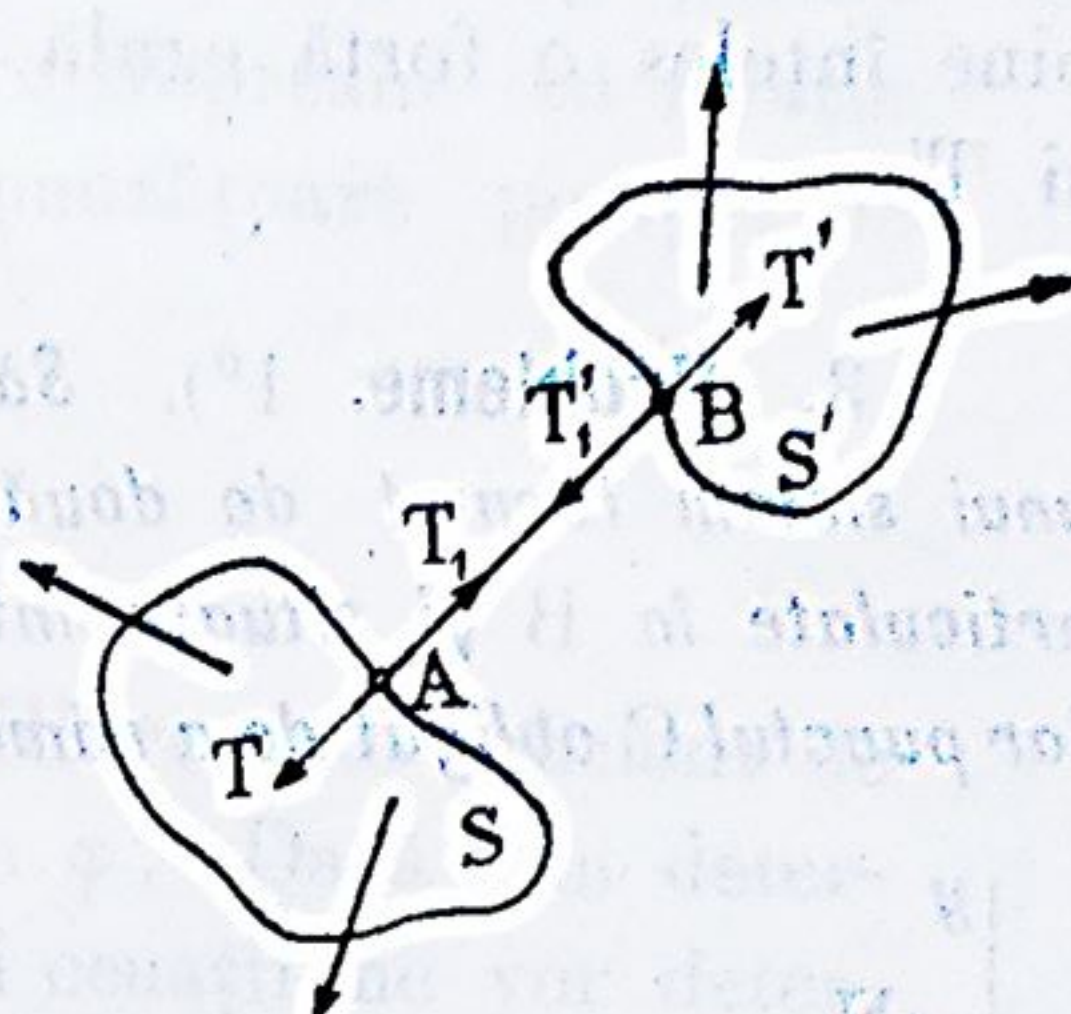


Fig. 116

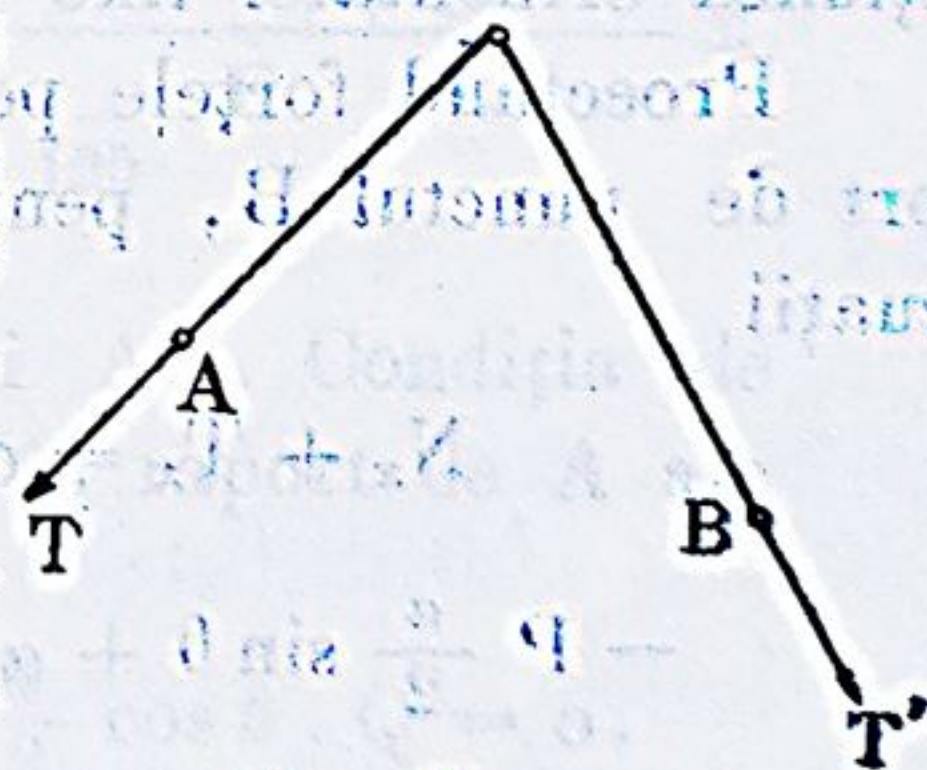


Fig. 118



ele, și tensiunea în fiecare punct al firului are ca valoare tot  $T$  sau  $T'$ . Acțiunea inelului asupra firului, în punctul de contact este bine înțeles o forță egală și direct opusă rezultantei forțelor  $T$  și  $T'$ .

3. Probleme. 1<sup>o</sup>). Să se determine poziția de echilibru a unui sistem format de două bare grele și omogene  $AB$  și  $BC$ , articulate în  $B$  și situate într'un plan vertical, punctul  $A$  fiind fix, iar punctul  $C$  obligat de a rămâne pe orizontala  $Ox$  și supus unei forțe  $F$ .

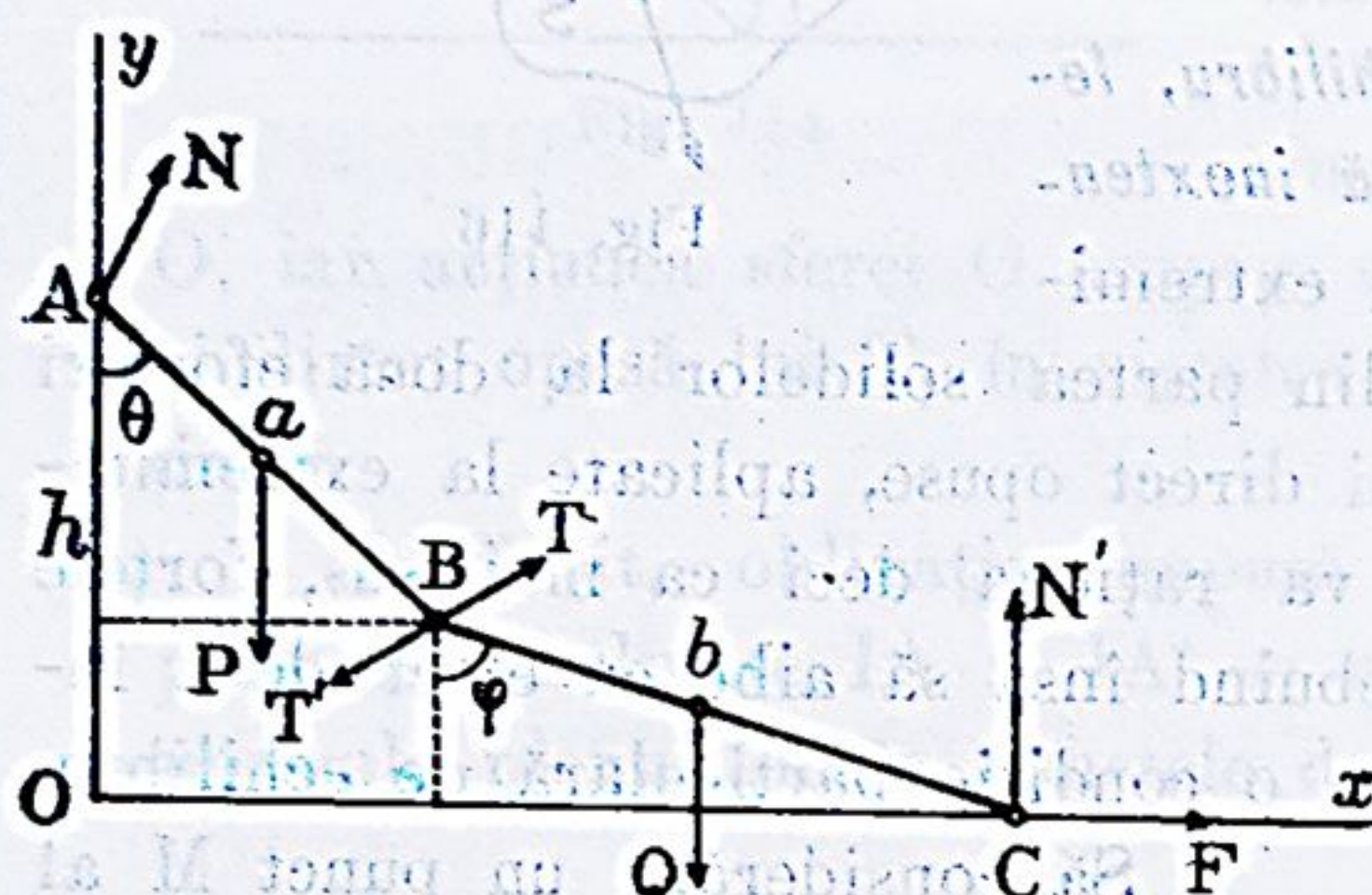


Fig. 119

Forțele direct aplicate sunt greutatea  $P$  și  $Q$  ale barelor, aplicate în mijloacele lor, și forța  $F$ .

În poziția de echilibru, acțiunile reciproce ale barelor sunt două forțe  $T$  și  $T'$  egale și direct opuse, aplicate în punctul  $B$ ; fie  $T_x$  și  $T_y$  proiecțiile lui  $T$  pe axele  $Ox$

și  $Oy$ ,  $T$  fiind acțiunea barei  $BC$  asupra barei  $AB$ .

Fie deasemenea  $N_x$  și  $N_y$  proiecțiile acțiunii  $N$  a punctului fix  $A$  asupra sistemului și  $N'$ , perpendiculară pe  $Ox$ , acțiunea orizontalei fixe  $Ox$  asupra punctului  $C$ .

Proiectând forțele pe  $Ox$  și  $Oy$ , și luând momentele în raport de punctul  $B$ , pentru fiecare din bare, obținem cele 6 ecuații

$$\begin{aligned} N_x + T_x &= 0, & N_y - P + T_y &= 0, \\ -P \frac{a}{2} \sin \theta + a \sin \theta \cdot N_y + a \cos \theta \cdot N_x &= 0; \\ F - T_x &= 0, & N' - Q - T_y &= 0, \\ Q \frac{b}{2} \sin \varphi - N' b \sin \varphi - F b \cos \varphi &= 0 \end{aligned}$$

cu relația dintre unghiurile  $\theta$  și  $\varphi$ :

$$(a) \quad h = a \cos \theta + b \cos \varphi,$$



Avem deci 6 ecuații între cele 5 necunoscute  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $N'$ ; eliminarea lor ne va da o ecuație în  $\theta$  și  $\varphi$  care va reprezenta condiția de echilibru și care împreună cu relația (α) vor determina valorile  $\theta$  și  $\varphi$  corespunzătoare poziției de echilibru a sistemului.

Efectuarea acestei eliminări ne dă

$$(P + Q) \sin \theta \cdot \sin \varphi = 2 F \sin (\varphi - \theta).$$

Pentru determinarea poziției de echilibru este suficient de a cunoaște fie numai pe  $\theta$ , fie numai pe  $\varphi$ . Dacă am determinat spre exemplu pe  $\theta$ , cele cinci dintâi ecuații ne vor determina pe  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ , și  $N'$ .

2<sup>o</sup>). Fie sistemul articulat ABC constituit din două bare AB, BC articulate în B. Punctul A este fix, iar punctul C poate aluneca fără frecare pe dreapta orizontală Ax. Bara AB este grea și omogenă, bara BC nu are greutate. În sfârșit, punctul B este solicitat de o forță orizontală P în sensul Ax, iar punctul C este solicitat de o forță F în sensul CA. Se cere condiția de echilibru a sistemului.

Cum în punctul de articulație B lucrează o forță, vom considera sistemul ca fiind constituit din cele 2 bare date și un solid concentrat în punctul B, forța P lucrând asupra acestui solid.

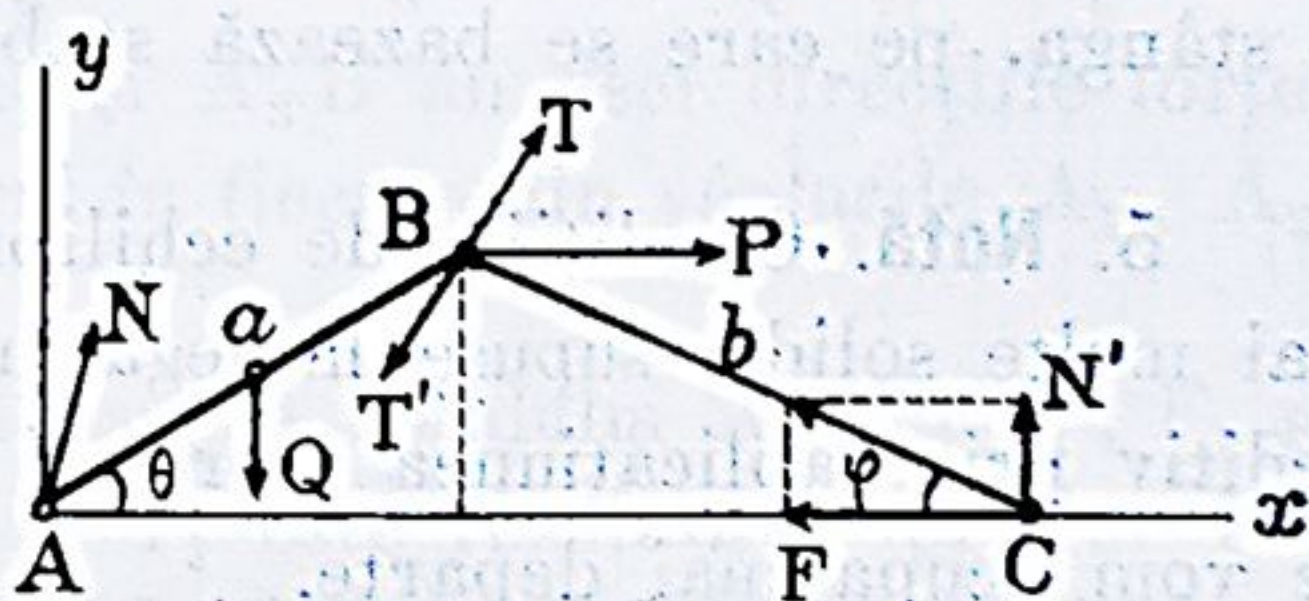


Fig. 120

Fie T acțiunea solidului asupra barei AB. Condiția de echilibru a barei AB este, luând momentele în raport de A ale forțelor T și Q,

$$(1) \quad -a \cos \theta \cdot T_y + a \sin \theta \cdot T_x + \frac{a}{2} \cos \theta \cdot Q = 0.$$

Acțiunea barei AB asupra solidului din B este o forță  $T'$  egală și direct opusă lui T. Pe de altă parte, pentru ca bara BC să fie în echilibru, trebuie ca forțele care lucrează la capetele ei să fie egale și direct opuse. Deci, rezultanta forțelor  $N'$  și F are direcția OB iar acțiunea solidului asupra barei BC



este o forță egală și direct opusă acestei rezultante. Solidul este prin urmare în echilibru sub acțiunea forțelor  $T'$ ,  $P$  și a rezultantei forțelor  $F$  și  $N'$  transportată în  $B$ . Condițiile de echilibru ale solidului sunt atunci

$$-T_x + P - F' = 0, \quad -T_y + N' = 0 \quad \text{cu } N' = F \operatorname{tg} \varphi.$$

Eliminând pe  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $N'$  între aceste ecuații și ecuația (1) găsim ca condiție de echilibru pentru sistemul celor două bare

$$2F \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2(P - F) \sin \theta + Q \cos \theta$$

cu relația

$$a \sin \theta = b \sin \varphi.$$

*Caz particular.* Dacă  $Q = 0$  și  $a = b$ , condiția se reduce la  $P = 2F$ , ori care ar fi  $\theta$ .

**4. Observație.** Să se observe bine, în aplicații, că dacă în aceeași egalitate utilizăm pentru evaluarea momentelor atât formula analitică  $xY - yX$ , cât și formula geometrică  $F \cdot d$ , să se ia pentru cea din urmă tot sensul de rotație dela dreapta la stânga, pe care se bazează stabilirea celei dintâi<sup>1)</sup>.

**5. Notă.** Condițiile de echilibru ale unui sistem format din mai multe solide supuse la legături, se obțin în mod mai expeditiv prin aplicațiunea teoremei travaliului virtual, de care ne vom ocupa mai departe.

## II. POLIGON FUNICULAR.

**1. Definiție și condiții de echilibru.** Să considerăm un fir flexibil și inextensibil susținut la extremitățile sale  $A$  și  $B$  de două forțe  $P$  și  $Q$  și solicitat în diferite alte puncte  $A_1, A_2, \dots$  de diferite forțe  $F_1, F_2, \dots$ . Dacă firul este în echilibru sub acțiunea forțelor ce-i sunt aplicate, el ia forma unui poligon deschis, zis *poligon funicular*. Să determinăm con-

<sup>1)</sup> *Oinematica*, pag. 22.



dițiile de echilibru ale acestei figuri, pe care să o presupunem pentru simplitate ca coprinzând numai 5 puncte  $A, A_1, A_2, A_3, B$ .

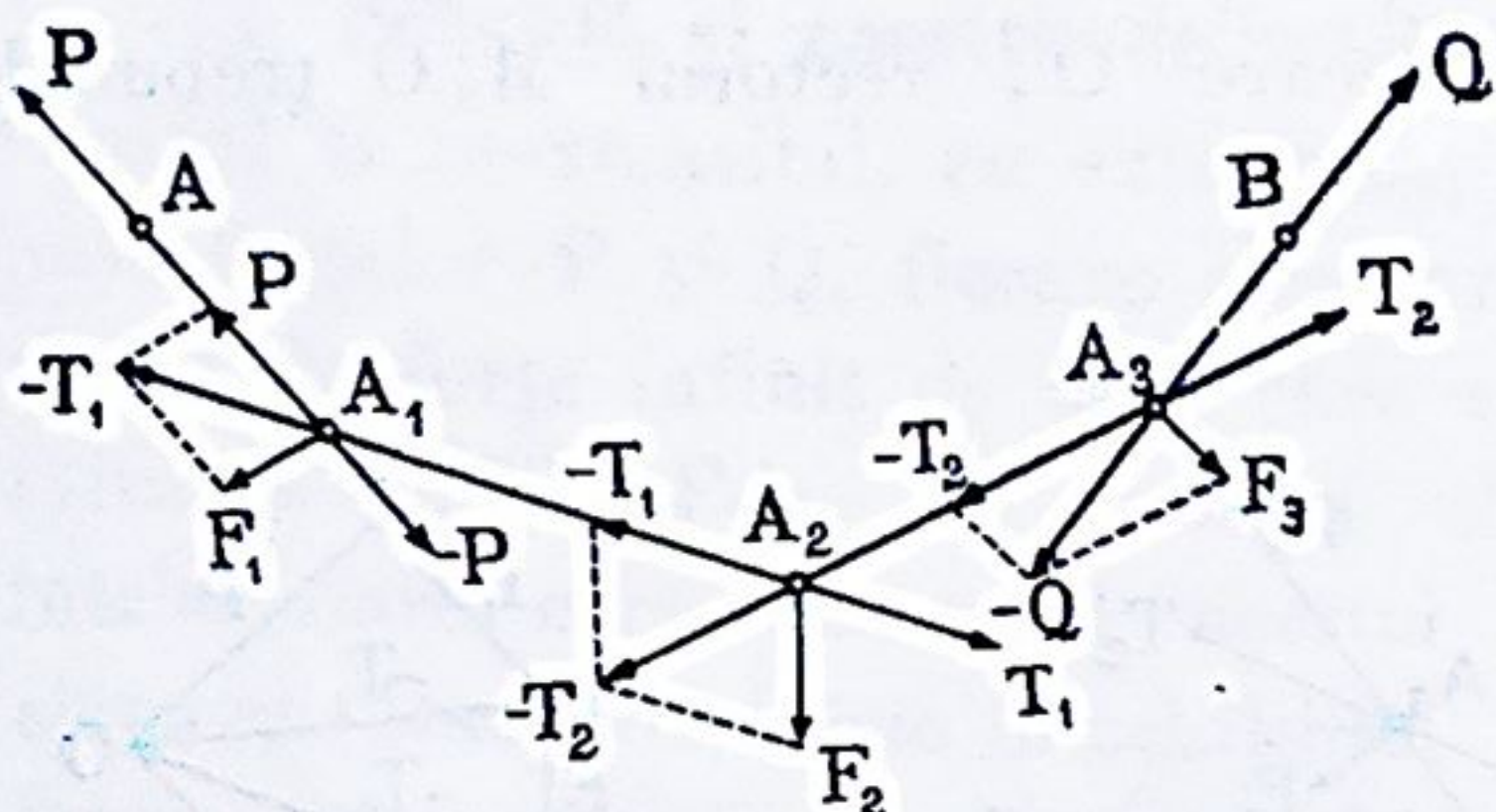


Fig. 121

Pentru aceasta, nu vom avea decât să considerăm poligonul ca fiind format dintr'un sistem de solide invariabile  $A, A_1, A_2, A_3, B$  reduse la câte un simplu punct material și legate între ele prin lungimile de fir  $AA_1,$

$A_1A_2, A_2A_3, A_3B$ . Aducem astfel studiul chestiunii de față la cele studiate mai înainte

Diversele lungimi de fir se vor găsi în echilibru potrivit următorului tablou:

Firul	$AA_1$	sub acțiunea tensiunilor	$P$ și $-P$
"	$A_1A_2$	" " "	$-T_1$ „ $T_1$
"	$A_2A_3$	" " "	$-T_2$ „ $T_2$
"	$A_3B$	" " "	$-Q$ „ $Q$ .

Porțiunile de fir  $AA_1$  și  $A_3B$  au deci direcțiile forțelor  $P$  și  $Q$ . Să cercetăm echilibrul în fiecare din vârfurile  $A_1, A_2, A_3$  ale poligonului.

Forțele care lucrează asupra solidului  $A_1$  sunt  $P, F_1$  și  $T_1$ . Cum ele își fac echilibru,  $-T_1$  este rezultanta forțelor  $P$  și  $F_1$  care sunt cunoscute. Tot astfel :

$-T_2$  este rezultanta forțelor  $-T_1$  și  $F_2$ ;  
 $-Q$  „ „ „ „  $-T_2$  „  $F_3$ .

Aceasta fiind stabilit, să luăm un punct  $O$  prin care să ducem vectorul  $OM$  echipolent forței  $P$ , apoi vectorul  $MM_1$  echipolent forței  $F_1$ . Rezultanta  $OM_1$  va reprezenta atunci pe  $-T_1$ , iar direcția  $M_1O$  va fi direcția porțiunii de fir  $A_1A_2$ . De asemenea, luând  $M_1M_2$  echipolent cu  $F_2$ , vectorul  $OM_2$  va reprezenta pe  $-T_2$ , rezultantă a forțelor  $P, F_1, F_2$ , iar direcția  $M_2O$  va fi aceea a porțiunii de fir  $A_2A_3$ . În sfârșit, luând  $M_2M_3$  echipolent cu  $F_3$ , vectorul  $OM_3$  va reprezenta pe  $-Q$ , rezultantă a forțelor  $-T_2$  și  $F_3$ , adică a forțelor  $P, F_1, F_2,$



$F_3$ , iar direcția  $M_3 O$  va fi aceea a porțiunii de fir  $A_3 B$ . Deci, poligonul în chestiune, zis *poligonul lui Varignon*, trebuie să se închidă în punctul de plecare  $O$ , vectorul  $M_2 O$  trebuind să fie echipolent forței  $Q$ .

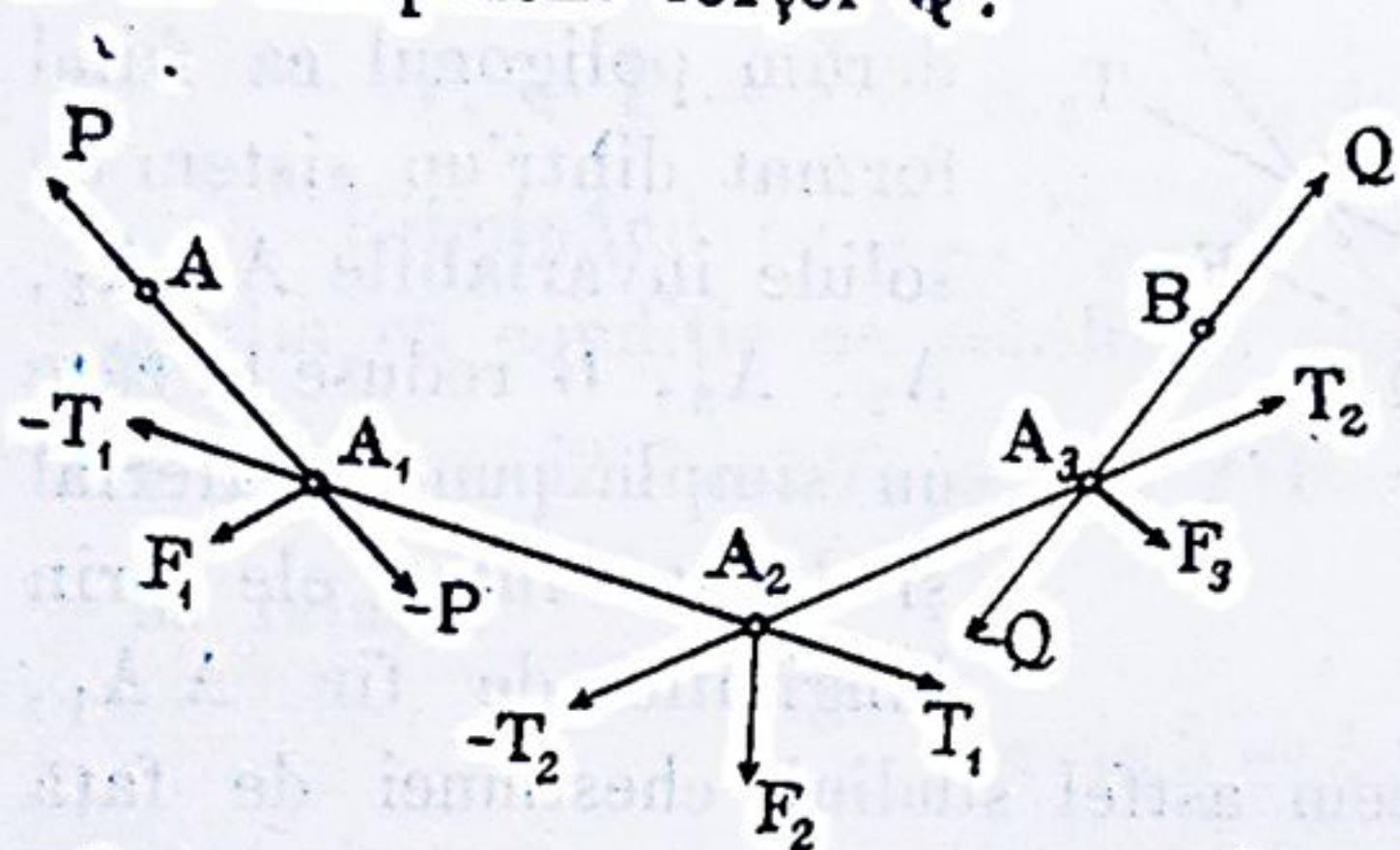


Fig. 122

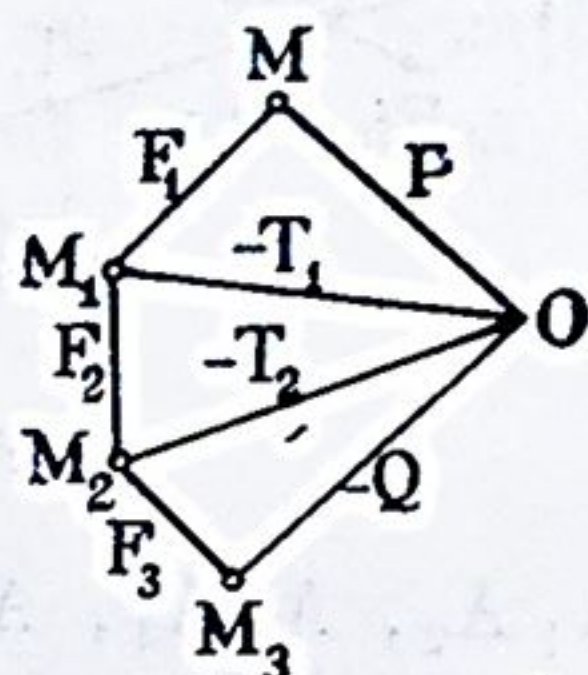


Fig. 123

De aci următoarea regulă: Pentru echilibrul unui *poligon funicular*, este necesar și suficient, ca:

- 1° *poligonul lui Varignon să se închidă,*
- 2° *direcțiile porțiunilor de fir  $AA_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3B$  să coincidă cu direcțiile vectoarelor  $MO$ ,  $M_1 O$ ,  $M_2 O$ ,  $M_3 O$ .*

În asemenea condiții, valorile tensiunilor intermediare  $T_1$  și  $T_2$  sunt egale cu lungimile diagonalelor  $M_1 O$  și  $M_2 O$ .

**2. Cazuri particulare.** Dacă forțele  $P$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $Q$  sunt toate paralele unui același plan, poligonul lui Varignon este o figură plană și poligonul funicular va forma și el, în consecință, o figură tot plană.

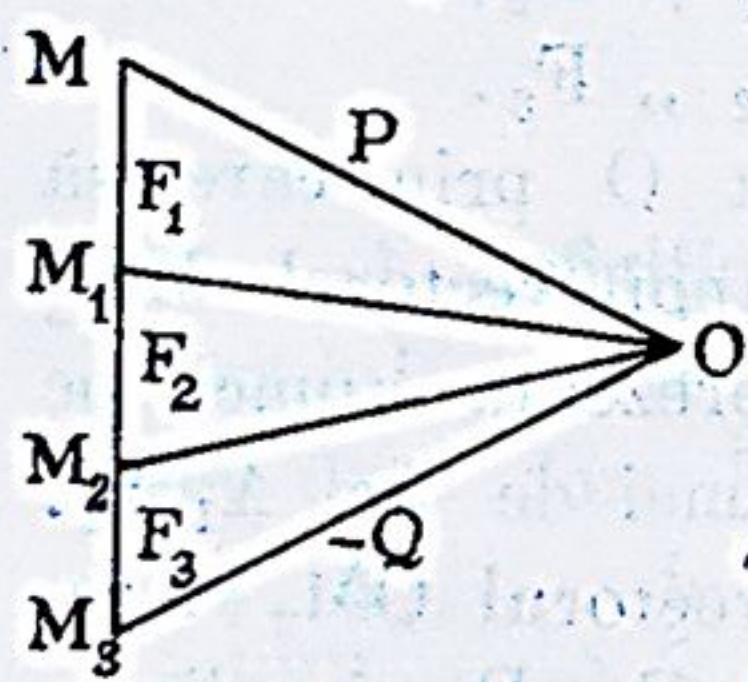


Fig. 124

Dacă forțele intermediare  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  sunt paralele unele cu altele, poligonul lui Varignon se reduce la un triunghi; el formează deci o figură plană, ori care ar fi direcțiile forțelor  $P$  și  $Q$  dela extremitățile firului. Poligonul funicular va fi și el tot plan și anume coprins într'un plan paralel cu acela al triunghiului.



### III. CURBĂ FUNICULARĂ.

4. **Definiție și condiții de echilibru.** Să considerăm un fir flexibil și inextensibil, cu extremitățile A și B fixate, sau supuse forțelor P și Q, fiecare element MM' al firului fiind acționat de forțe infinit de mici care vom presupune că au o rezultantă unică  $Fds$ , de ordinul elementului MM', aplicată într'un oare care punct al acestui element. Dacă firul este în echilibru, forma pe care o prezintă este zisă *curbă funiculară*.

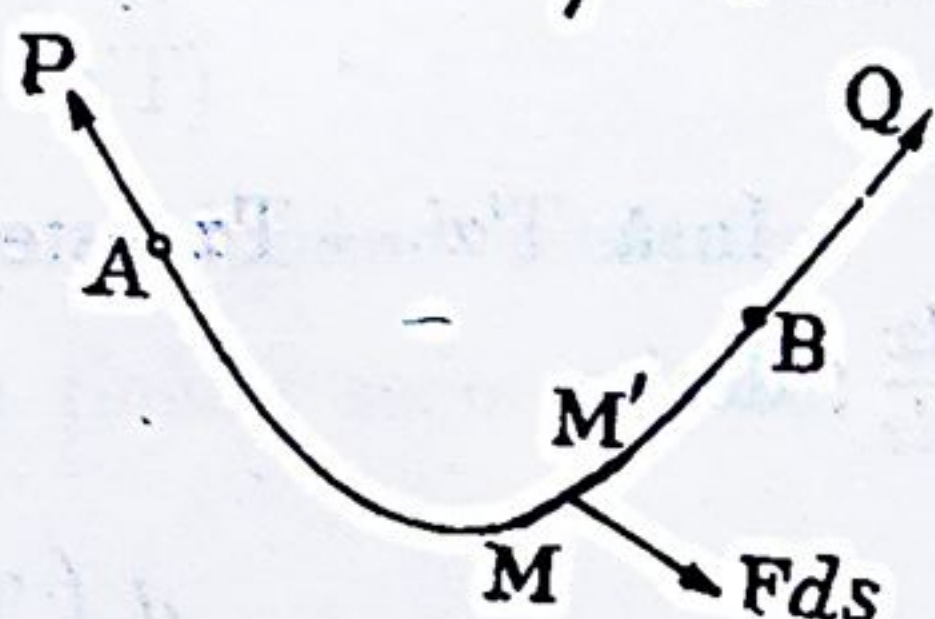


Fig. 125

Să presupunem echilibrul ca existând. Dacă atunci, tăiem firul în M și suprimăm porțiunea MB, va trebui pentru menținerea echilibrului, să aplicăm în M, în sensul ultimului element al curbei AM, adică tangențial curbei, o forță convenabilă T. Invers, dacă tăind firul în M suprimăm porțiunea MA, va trebui, în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii, să aplicăm în M, pentru menținerea echilibrului, o forță  $-T$ ; egală și direct opusă lui T. Aceste două forțe iau numele de *tensiuni în punctul M*.

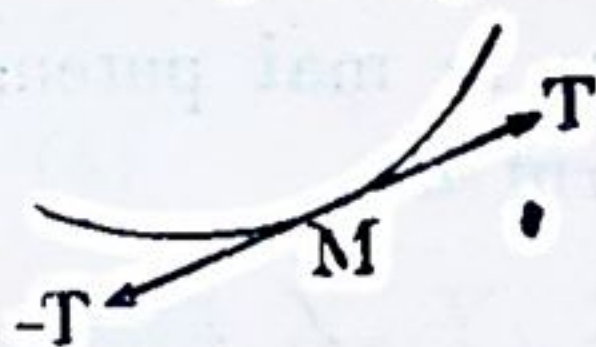


Fig. 126

Să considerăm acum un element de arc MM' și să tăem firul atât în M cât și în M'. Pentru menținerea echilibrului, va trebui să aplicăm în M o forță  $-T$  și în M' o forță T', amândouă tangente firului. Fie K punctul de aplicație al forței  $Fds$ , zisă *forță motrice*. Putem asimila figura arcului elementar MKM' cu aceea a unui poligon funicular cu 2 laturi MK și KM'. Condiția de echilibru va fi ca tensiunea T să fie rezultanta forței  $Fds$  și a tensiunii T'. Să exprimăm aceasta în mod analitic, față de un sistem de axe coordonate dreptunghiulare.

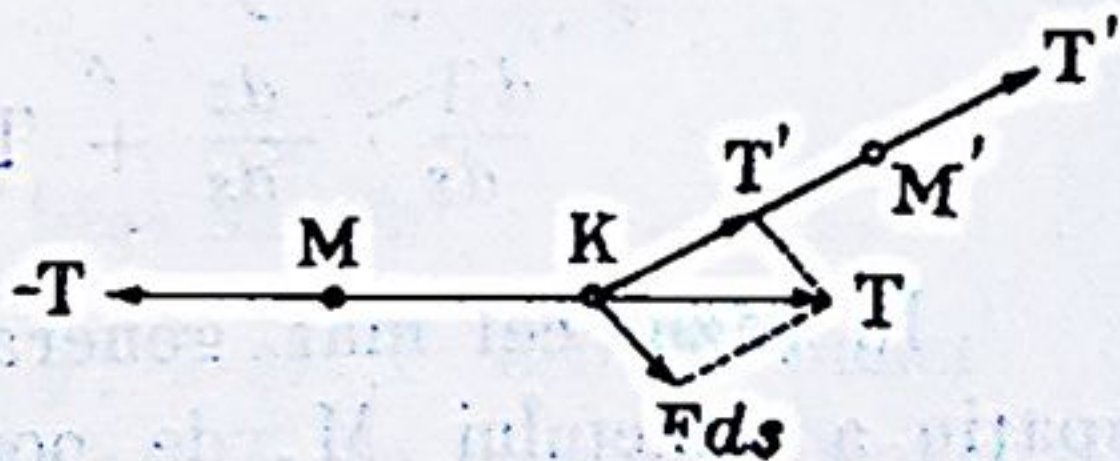


Fig. 127

Fie:  $s$  lungimea firului socotită pozitiv cu începere dela



punctul A;  $x, y, z$  cordonatele punctului M;  $X, Y, Z$  proec-  
țiile pe axe ale forței F, care este forța motrice raportată la  
unitatea de lungime;  $\alpha, \beta, \gamma$  cosinusurile directoare ale ten-  
siunei T și  $\alpha', \beta', \gamma'$  cosinusurile directoare ale tensiunei T'.  
Potrivit condiției de echilibru, avem în proecție pe axul Ox:

$$T\alpha = T'\alpha' + X ds$$

de unde

$$(T'\alpha' - T\alpha) + X ds = 0.$$

Insă  $T'\alpha' - T\alpha$  este diferențiala lui  $T\alpha$ , iar  $\alpha$  este egal cu  
 $\frac{dx}{ds}$ ; deci

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0$$

și, în mod analog,

$$(1) \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0.$$

Acestate sunt ecuațiile de echilibru, pe care le mai putem  
serie, efectuând diferențierea și suprimând factorul  $ds$ ,

$$\frac{dT}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + T \frac{d^2x}{ds^2} + X = 0$$

$$(2) \quad \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + T \frac{d^2y}{ds^2} + Y = 0$$

$$\frac{dT}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} + T \frac{d^2z}{ds^2} + Z = 0.$$

În cazul cel mai general, forța F depinde de poziția în  
spațiu a punctului M, de poziția punctului M pe fir, adică de  
 $s$ , și de orientarea în spațiu a elementului  $MM'$ ; componentele  
 $X, Y, Z$  sunt deci în general funcții de  $x, y, z; s; \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds},$   
 $\frac{dz}{ds}$ . Alăturând sistemului de ecuații (2), relația

$$(3) \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$



avem în total 4 ecuații diferențiale de primul ordin în raport de  $T$  și de al doilea ordin în raport de  $x, y, z$ , care ne vor da pe  $x, y, z$ , și  $T$  în funcție de  $s$  și de 6 constante arbitrare.

Dacă, spre exemplu, extremitățile  $A$  și  $B$  ale firului sunt fixe, cele 6 constante se determină scriind că pentru  $s = 0$  și  $s = l$  ( $l$  fiind lungimea firului) cordonatele  $x, y, z$  devin respectiv identice cu cordonatele punctelor  $A$  și  $B$ .

**2. Cazul când forța  $F$  admite o funcție.** Adunând ecuațiile (2) înmulțite respectiv cu  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  și ținând socoteală de relația (3) și de cea următoare:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

se obține egalitatea

$$\frac{dT}{ds} + X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0$$

adică

$$(4) \quad dT + X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Dacă  $X, Y, Z$  sunt derivatele parțiale ale unei funcții de cordonate,  $f(x, y, z)$ , egalitatea (4) devine

$$dT + df = 0$$

și, integrând,

$$T + f(x, y, z) = T_0 + f(x_0, y_0, z_0)$$

$x_0, y_0, z_0$  și  $T_0$  fiind valorile lui  $x, y, z$  și  $T$  într'un punct determinat. Se vede, că în cazul considerat,  $T$  nu depinde decât de  $f(x, y, z)$ . Înlocuind pe  $T$  prin expresiunea sa în ecuațiile (2), două oare care dintre aceste ecuații, împreună cu relația (3), ne vor face cunoscută figura firului.

**3. Consecințele ecuațiilor de echilibru.** Fie:  $\alpha, \beta, \gamma$  cosinusurile directoare ale tangentei din  $M$  la fir;  $l, m, n$  cosinu-



surile directoare ale normalei principale și  $R$  raza de curbura în  $M$ . — Se știe că avem

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$l = R \cdot \frac{d^2x}{ds^2}, \quad m = R \cdot \frac{d^2y}{ds^2}, \quad n = R \cdot \frac{d^2z}{ds^2}$$

Ecuatiile (2) se pot deci scrie

$$\alpha \frac{dT}{ds} + l \frac{T}{R} + X = 0$$

$$\beta \frac{dT}{ds} + m \frac{T}{R} + Y = 0$$

$$\gamma \frac{dT}{ds} + n \frac{T}{R} + Z = 0.$$

Aceste egalități exprimă că forța motrice  $F$ , luată în sens contrariu, este rezultanta:

1° a unei forțe  $\frac{dT}{ds}$  îndreptată pe tangentă,

2° a unei forțe  $\frac{T}{R}$  îndreptată pe raza de curbură.

De aci următoarele două consecințe:

1°) forța motrice este, în fiecare punct, situată în planul osculator al firului;

2°) dacă însemnăm prin  $F_1$  și  $F_2$  proiecțiile forței  $F$  pe tangentă și pe normala principală, avem

$$\frac{dT}{ds} = -F_1$$

$$\frac{T}{R} = -F_2.$$

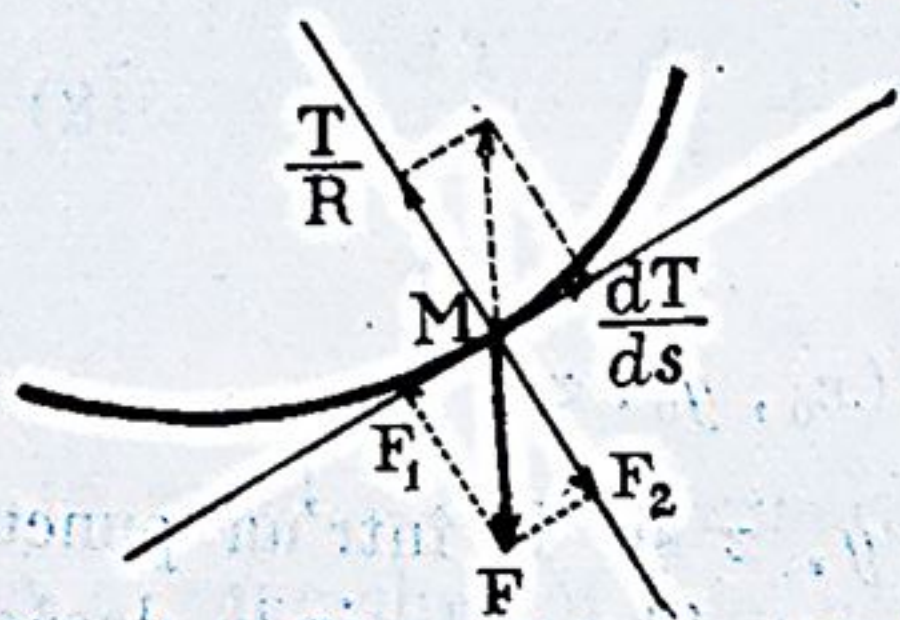


Fig. 128

**4. Echilibrul unui fir întins pe o suprafață.** Când un fir întins pe o suprafață prin efectul celor două forțe dela extremitățile sale, se găsește în echilibru, forța  $F$  face echilibru acțiunii normale a suprafeței. Componenta tangențială  $F_1$  este deci



nulă și prin urmare  $\frac{dT}{ds} = 0$  adică  $T = \text{const.}$  Așa dar, tensiunea este aceeași pe toată lungimea firului<sup>1)</sup>.

Pe de altă parte, cum direcția forței  $F$  este și normală suprafeții și conținută în planul osculator al firului, rezultă că planul osculator al curbei formată de fir este în fiecare punct normal suprafeții. Această curbă este deci o linie geodezică a suprafeții, adică o linie de lungime minimă.

Însfârșit, relația  $F_2 = -\frac{T}{R}$ , în care  $T$  este o constantă, arată că presiunea suprafeții asupra firului este în fiecare punct invers proporțională cu raza de curbura.

**5. Aplicațiuni.** 1<sup>o</sup>) *Lănțișorul.* Se numește lănțișor figura de echilibru a unui fir care, având extremitățile sale fixate, nu este supus decât acțiunii greutății. Toate forțele fiind paralele, curba firului va fi coprinsă în planul vertical care trece prin cele două puncte fixe  $A$  și  $B$ . Să luăm în acest plan două axe dreptunghiulare, axul  $Oy$  fiind vertical și îndreptat în sus.

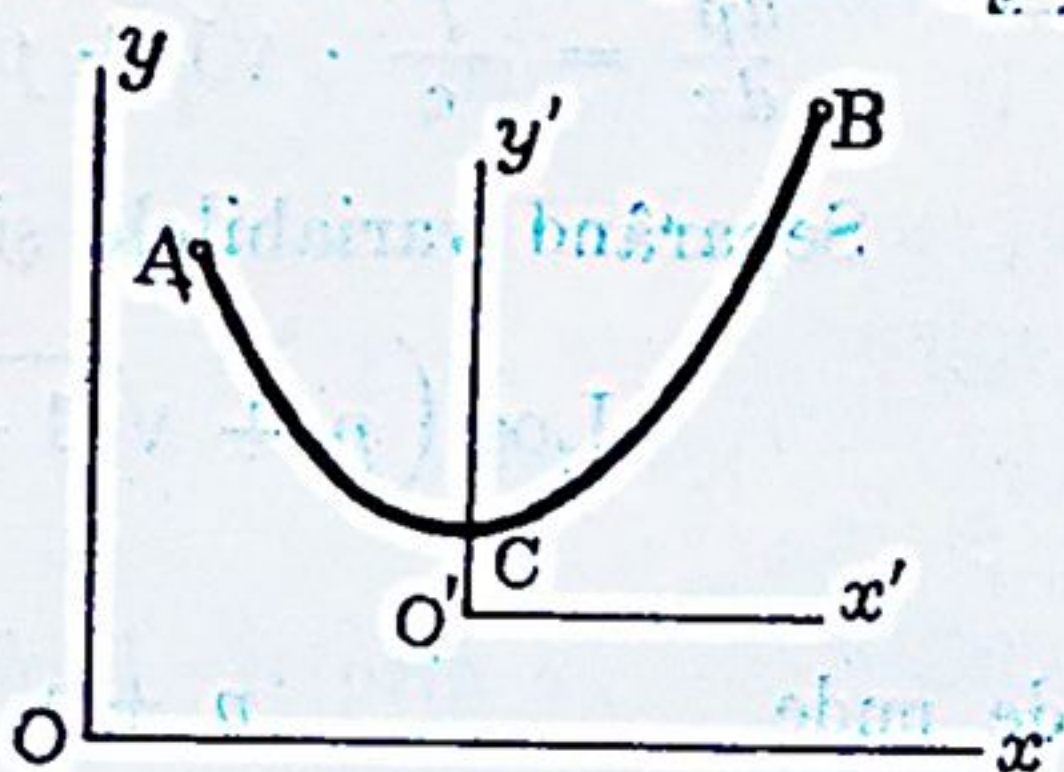


Fig. 129

Presupunând firul omogen, să însemnăm prin  $f$  greutatea sa pe unitatea de lungime; forța motrice va fi deci  $f ds$  și vom avea

$$X = 0, \quad Y = -f.$$

Aplicația ecuațiilor (1) ne dă

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = f ds$$

și integrând

$$T \frac{dx}{ds} = c, \quad T \frac{dy}{ds} = fs + cc'$$

<sup>1)</sup> Forțele care lucrează la extremitățile firului sunt deci egale, căci ele reprezintă tensiunile limite.



de unde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fs}{c} + c'.$$

Prima dintre aceste relații arată că *componenta orizontală a tensiunii este aceeași în toate punctele*. Relația a treia ne permite de a determina forma curbei. Deducem din ea, prin derivare,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{f}{c}$$

adică

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f}{c} \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{f}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sau încă

$$\frac{dp}{dx} = \frac{f}{c} \cdot \sqrt{1 + p^2}, \quad \text{punând } \frac{dy}{dx} = p.$$

Separând variabilele și integrând, obținem

$$\text{Log} \left( p + \sqrt{1 + p^2} \right) = \frac{f}{c} x + \alpha,$$

de unde

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{fx}{c} + \alpha}.$$

Rezolvind apoi în raport de  $p$  și înlocuind pe  $p$  prin  $\frac{dy}{dx}$ , găsim

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{fx}{c} + \alpha} - e^{-\frac{fx}{c} - \alpha} \right]$$

și printr'o nouă integrațiune

$$(2) \quad y = \frac{c}{2f} \left[ e^{\frac{fx}{c} + \alpha} + e^{-\frac{fx}{c} - \alpha} \right] + c_1.$$

Aceasta este ecuația lăntişorului. Relația de la care am plecat, ne dă, înlocuind în ea pe  $\frac{dy}{dx}$  prin expresia (1):

$$s = \frac{c}{2f} \left[ e^{\frac{fx}{c} + \alpha} - e^{-\frac{fx}{c} - \alpha} \right] - \frac{cc'}{f}.$$



Cele 4 constante  $c, c', \alpha, c_1$  se determină exprimând că, pentru  $s = 0$  și  $s = l$ , cordonatele  $x$  și  $y$  ale curbei devin identice cu cordonatele punctelor date A și B.

Ecuția (2) a lăntșorului ia o formă mult mai simplă dacă mutăm axele paralel cu ele însăși într'un anumit punct  $O'$ , situat pe verticala punctului celui mai de jos, C, al curbei.

Pentru punctul C avem  $\frac{dy}{dx} = 0$  și prin urmare, potrivit ecuației (1):

$$\frac{fx}{c} + \alpha = -\frac{fx}{c} - \alpha \quad \text{de unde } x = -\frac{c\alpha}{f}$$

Să considerăm punctul  $O'$  de cordonate  $x_1 = -\frac{c\alpha}{f}$  și  $y_1 = c_1$ . Mutând axele paralel cu ele însăși în acest punct, ecuația lăntșorului va deveni, înlocuind în (2) pe  $y$  prin  $y' + c_1$  și pe  $x$  prin  $x' - \frac{c\alpha}{f}$ ,

$$y' = \frac{c}{2f} \left[ e^{\frac{fx'}{c}} + e^{-\frac{fx'}{c}} \right]$$

sau, încă mai simplu, însemnând raportul  $\frac{c}{f}$  prin  $\alpha$ ,

$$y' = \frac{\alpha}{2} \left[ e^{\frac{x'}{\alpha}} + e^{-\frac{x'}{\alpha}} \right].$$

Lăntșorul este, după cum se vede, o curbă simetrică în raport de verticala punctului C.

2<sup>o</sup>) *Cablul podurilor suspendate.* Să ne propunem de a determina figura de echilibru a unui fir, care are extremitățile sale fixate și este supus la forțe elementare verticale, proporționale cu proiecțiile orizontale ale elementelor de arc.

Așa dar prin ipoteză,

$$X = 0, \quad Y ds = -k dx, \quad k \text{ fiind o constantă.}$$

Cu asemenea date, ecuațiile de echilibru devin:

$$d \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad d \left( T \frac{dy}{ds} \right) = k dx$$



și deducem prin integrațiune,

$$T \frac{dx}{ds} = c, \quad T \frac{dy}{ds} = kx + cc'$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx}{c} + c'$$

$c$  și  $c'$  fiind două constante arbitrare.

Prima ecuație exprimă că și în cazul de față, *componenta orizontală a tensiunii este constantă*.

Integrând pe cea din urmă și luând ca origină pe unul din punctele fixe, vom avea,

$$y = \frac{k}{2c} x^2 + c'x.$$

Figura de echilibru este deci o parabolă, al căreia ax este vertical.

Constantele  $c$  și  $c'$  se determină exprimând că curba trece prin celălalt punct fix și că lungimea ei are o valoare determinată.

Acest caz este acela al cablurilor care susțin podurile zise suspendate, când se consideră ca infinit apropiate unele de altele barele verticale ce susțin tablierul podului și când se neglijează greutatea cablului.

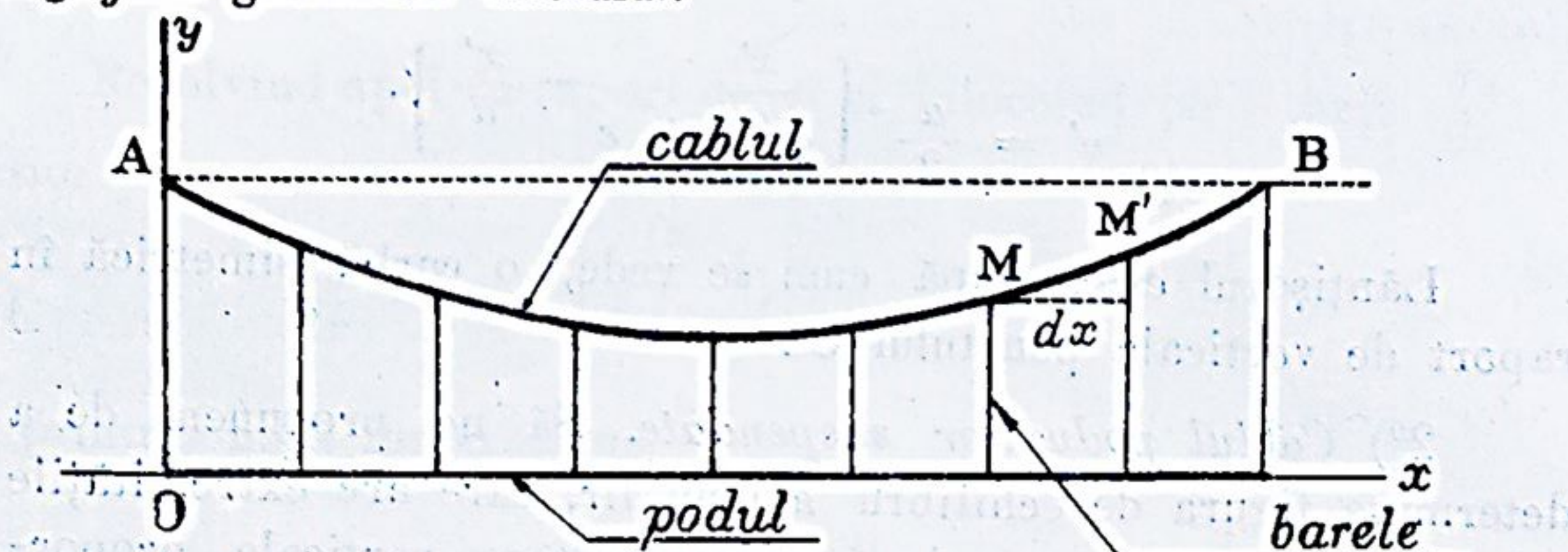


Fig. 130.

În realitate, în podurile suspendate, forțele nu sunt repartizate cu continuitate pe toată întinderea cablului ci sunt aplicate într'un număr finit de puncte, ale căroră proiecții orizontale sunt echidistante. Avem atunci un poligon funicular și se demonstrează că vârfurile acestui poligon se bucură de proprietatea remarcabilă de a fi situate pe o aceeași parabolă.



## IV. ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE.

### I. CONDIȚII DE ECHILIBRU PRIN CONSIDERAȚIA TRAVALIULUI VIRTUAL.

1. **Definiție.** Se numește sistem material un ansamblu de puncte materiale. Potrivit principiilor Dinamice, două puncte oarecare ale sistemului exercită unul asupra celuilalt acțiuni egale și direct opuse, zise *forțe interioare*, spre deosebire de *forțele zise exterioare* care emană dela alte sisteme materiale.



Fig. 131

Forțele interioare sunt deci egale două câte două. Vectorul lor rezultat, ca și momentul lor în raport de un punct, sunt în consecință nuli.

Travaliul lor nu este însă nul decât în cazul particular când distanțele dintre puncte rămân invariabile. Fie în adevăr  $A'$  și  $B'$  pozițiile pe care le iau 2 puncte  $A$  și  $B$ , după un timp infinit de mic, sub efectul forțelor interioare și exterioare care lucrează în  $A$  și  $B$ . Să calculăm pentru deplasările  $AA'$  și  $BB'$  travaliul datorit forțelor interioare.

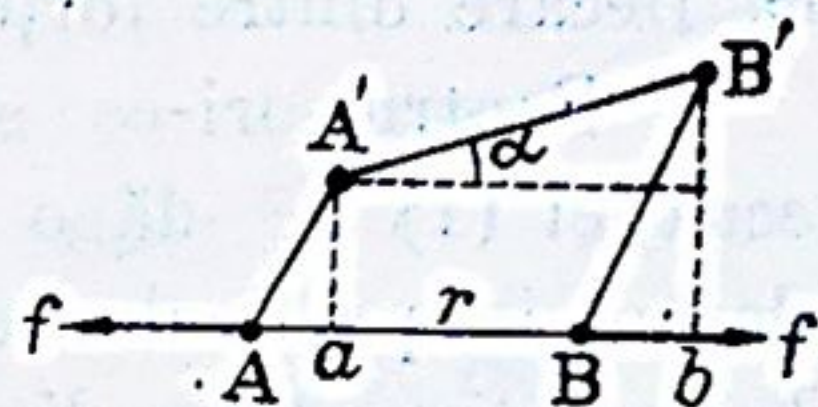


Fig. 132

Avem

$$d\mathcal{C} = -f \cdot Aa + f \cdot Bb = f(Bb - Aa).$$

Însă

$$Bb - Aa = (Bb + aB) - (Aa + aB) = ab - AB$$



deci

$$d\mathcal{E} = f(ab - AB).$$

Pe de altă parte însă,  $ab$  fiind egal cu  $A'B' \cos \alpha$  și  $\cos \alpha$  diferind de unitate printr'un infinit mic de ordinul al doilea, avem, păstrând numai infiniții mici de ordinul I<sup>u</sup>:  $ab = A'B' = AB + dr$ , însemnând prin  $dr$  creșterea elementară a lungimei  $AB$ . Așa dar

$$d\mathcal{E} = f dr.$$

Se vede astfel că trawaliul celor două forțe interioare nu este nul decât dacă avem  $dr = 0$ , adică  $r = AB = \text{const.}$

Forțele interioare și exterioare care lucrează asupra unui punct, dau împreună o rezultantă  $F$ , zisă *forță direct aplicată*.

**2. Sistem material liber.** Când punctele sistemului nu sunt supuse la nici un fel de obligațiuni, *sistemul este zis liber*. Condiția necesară și suficientă pentru echilibru este atunci ca fiecare punct în parte să fie în echilibru, deci ca fiecare forță direct aplicată să fie nulă.

Mai putem zice, că pentru echilibru, este necesar și suficient ca trawaliurile forțelor direct aplicate să dea o sumă nulă pentru orice deplasare virtuală a punctelor:

$$(1) \quad \delta\mathcal{E} = \sum F \delta s \cos(F, \delta s) = 0.$$

În adevăr, dacă există echilibru, avem  $F = 0$  pentru fiecare din puncte și prin urmare  $\delta\mathcal{E} = 0$ , iar dacă avem  $\delta\mathcal{E} = 0$ , ori care ar fi diferenții  $\delta s$  și deci diferenții  $\delta s \cos(F, \delta s)$ , trebuie ca fiecare dintre forțele  $F$  să fie nulă.

Pentru ori-ce sistem de deplasări imaginate, aplicația ecuației (1) ne dă o condiție *necesară* de echilibru. Să considerăm în particular deplasările acelea care păstrează invariabilitatea distanțelor dintre puncte. Sistemul este atunci un solid invariabil și aplicația ecuației (1) nu ne poate conduce decât la cele 6 ecuații de echilibru cunoscute<sup>1)</sup>. Aceasta rezultă de altfel în mod direct din faptul că dacă un sistem material este

<sup>1)</sup> Vom stabili aceasta la capitolul următor.



în echilibru, nimic nu ne împiedecă de a-l considera ca fiind și solidificat în poziția lui de echilibru. În cele 6 ecuații de echilibru, nu vor figura însă forțele interioare, căci atât proiecțiile lor pe 3 axe cât și momentele lor în raport de un punct sunt nule. De aci următoarea teoremă:

**Teoremă.** *Pentru ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru, este necesar ca forțele exterioare care lucrează asupra punctelor sistemului, să verifice cele 6 ecuații de echilibru ale solidelor invariabile.*

**3. Sisteme materiale cu legături.** Se numesc astfel sistemele în care unele dintre puncte pot fi supuse la obligațiunea de a rămâne fixe, altele la obligațiunea de a păstra între ele o distanță invariabilă, altele la condiția de a rămâne pe anumite curbe sau anumite suprafețe, și în sfârșit altele, formând solide invariabile, care să fie obligate de a rămâne în contact, toate aceste categorii de obligații putând a fi și combinate între ele. Exemplu: două puncte materiale obligate de a păstra între ele o distanță invariabilă și obligate de a rămâne unul pe o curbă și altul pe o suprafață determinate.

Diversele obligații impuse punctelor pot fi înlocuite prin forțe de direcții și intensități convenabile.

Astfel, obligația de fixitate a unui punct poate fi înlocuită printr-o forță aplicată punctului care să echilibreze pe toate forțele ce lucrează asupra lui.

Dacă două puncte A și B sunt obligate de a păstra între ele o distanță invariabilă, putem realiza această condiție aplicând în A și B două forțe egale și direct opuse  $F$ ,  $F'$  de intensitate convenabilă și îndreptate după cum arată figura sau în sens contrariu<sup>1)</sup>.

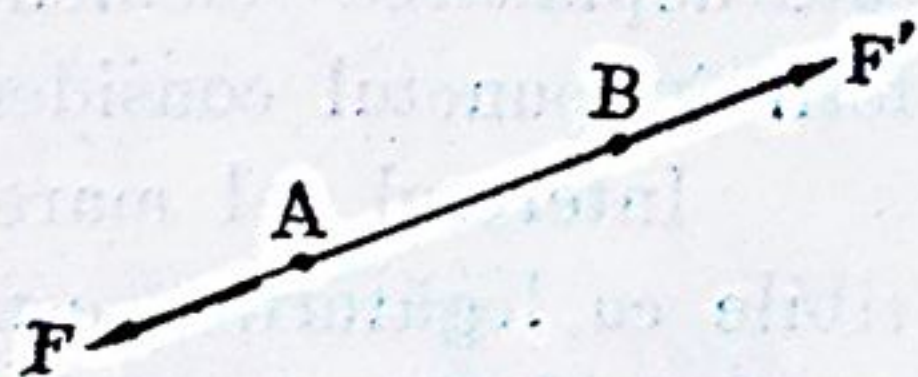


Fig. 133

<sup>1)</sup> Putem în adevăr a ne imagina că între punctele A și B am intercalat o linie materială rigidă AB, care împiedecă punctele de a se apropia sau de a se depărta unul de altul. Forțele  $F$  și  $F'$  vor reprezenta atunci acțiunile liniei AB asupra celor 2 puncte.



Dacă un punct este obligat de a rămâne pe o curbă sau pe o suprafață, știm că putem înlocui această condiție prin introducerea unei forțe normale suprafeții sau curbei, care reprezintă acțiunea curbei sau suprafeții asupra punctului.

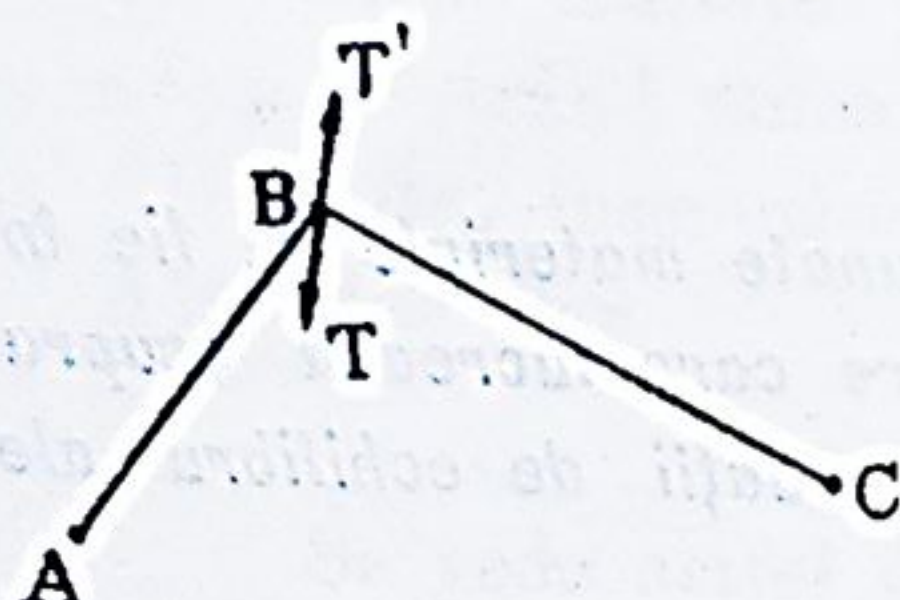


Fig. 134

Dacă două solide, cum spre exemplu, două bare AB și BC sunt obligate de a rămâne în contact în punctul B, aceasta revine a zice că ele sunt articate în punctul B și articulația revine, după cum s'a mai spus, la două forțe T și T', egale și direct opuse, aplicate celor 2 bare la extremitățile lor din B.

Dacă, înșfârșit, două solide S și S' sunt în contact tangențial unul cu altul, acest contact poate fi menținut prin introducerea a două forțe N și N' normale planului tangent comun, egale și direct opuse, aplicate în punctul de contact, și lucrând, una asupra unuia dintre solide, iar cealaltă asupra celuilalt solid.

Toate aceste forțe, prin care se pot înlocui obligațiile impuse punctelor, sunt zise *forțe de legătură*.



Fig. 135

**Deplasări compatibile cu legăturile.** Se numesc astfel, deplasările elementare care țin seama de obligațiunile impuse punctelor. Astfel, deplasarea compatibilă cu legătura, a unui punct M obligat de a rămâne pe o suprafață S, este deplasarea elementară a lui M în planul tangent suprafeții în punctul considerat.

Interesul cel mare pe care-l prezintă deplasările compatibile cu legăturile, este, că în aceste deplasări, *travaliul forțelor de legătură este nul*.

În adevăr:

a) Dacă un punct este fix, *travaliul forței de legătură aplicată în acel punct este evident nul*.

b) Dacă două puncte A și B trebuie să rămână la o distanță invariabilă unul de altul, *travaliul celor două forțe de legătură într-o deplasare elementară compatibilă cu legătura,*



adică într'o deplasare în care lungimea  $AB$  rămâne constantă, este nul, potrivit formulei  $d\mathcal{G} = f dr$  în care  $r = AB = \text{const.}$

c) Știm de asemenea că în deplasarea elementară a unui punct pe o curbă sau pe o suprafață, traviul acțiunii curbei sau suprafeții asupra punctului este tot nul.

d) Dacă două solide, cum spre exemplu două bare  $AB$  și  $BC$  sunt articulate în  $B$ , traviul forțelor de legătură  $T$  și  $T'$ , amândouă aplicate la extremitățile barelor din punctul  $B$ , este nul, în orice deplasare în care  $B$  rămâne punct de contact, forțele  $T$  și  $T'$  fiind egale și direct opuse.

e) Să considerăm înșfârșit cazul când două solide invariabile  $S$  și  $S'$  sunt obligate de a rămâne în contact tangențial unul cu altul. Fie  $A$ , punctul de contact actual,  $N$  și  $N'$  reacțiunile normale egale și direct opuse ale solidelor,  $A_1$  și  $A'_1$  pozițiile ce ocupă punctul  $A$  după o deplasare elementară când solidele vin în  $S_1$  și  $S'_1$  și se ating atunci în punctul  $B$ . Neglijând infiniții mici de ordinul al II-lea, punctele  $A_1$  și  $A'_1$  pot fi considerate ca fiind situate amândouă în planul tangent din  $B$ . Ori, pe de altă parte, cele două planuri tangente din  $A$  și din  $B$  fac între ele un unghi infinit de mic, așa că, în definitiv, punctele  $A_1$  și  $A'_1$  pot fi considerate ca situate amândouă în planul tangent din  $A$ . Însă în asemenea condiție, proiecțiile deplasărilor  $AA_1$  și  $AA'_1$  pe direcția comună a forțelor  $N$  și  $N'$  este fiecare nulă și prin urmare traviul acestor forțe este și el nul<sup>1)</sup>.

**Condiții de echilibru.** Dacă înlocuim obligațiile prin forțe putem zice, ca și pentru sistemele materiale libere, că condiția necesară și suficientă pentru echilibru, este ca suma traviurilor tuturor forțelor care lucrează asupra sistemului să fie nulă, pentru ori ce deplasare virtuală a punctelor sale. Sub această

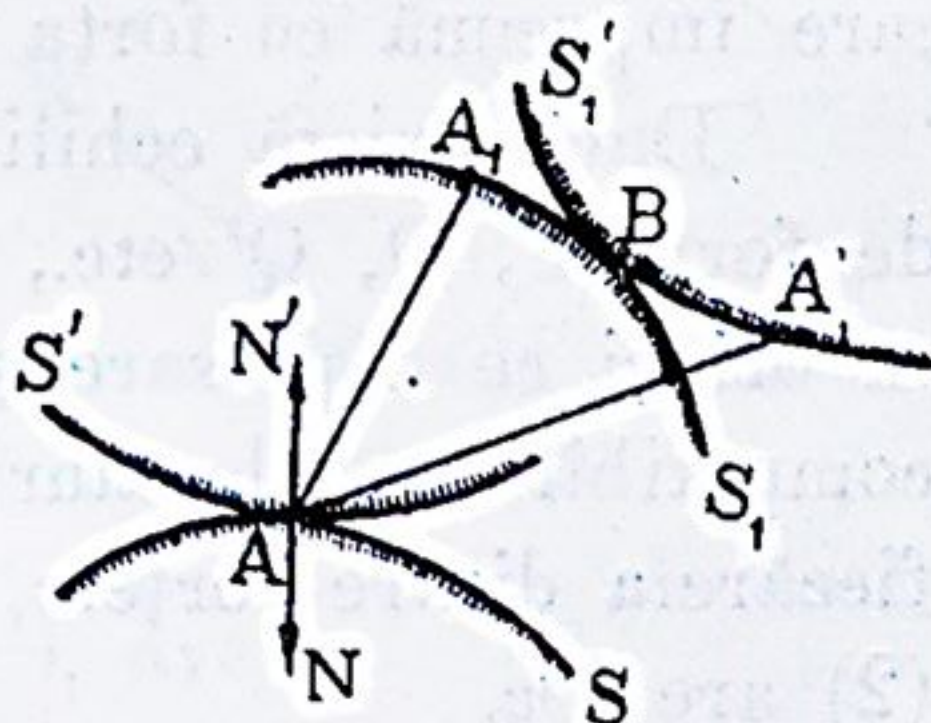


Fig. 136

<sup>1)</sup> Când se evaluează traviul elementar, se urmărește deplasarea elementară a punctului material de aplicație al forței, iar nu a punctului geometric care devine succesiv punct de aplicație.



formă, teorema travaliului virtual nu ne-ar fi însă de nici un folos, căci nu se cunosc valorile forțelor de legătură. Teorema care elimină forțele de legătură și ne dă condiția de echilibru este cea următoare:

**Teoremă.** *Condiția necesară și suficientă pentru echilibrul unui sistem material cu legături, este ca suma travaliurilor forțelor direct aplicate, în deplasările virtuale ale sistemului, compatibile cu legăturile, să fie nulă, adică*

$$(2) \quad \delta \mathcal{C} = \sum F \delta s \cos (F, \delta s) = 0$$

în care  $F$  reprezintă numai forțe direct aplicate și  $\delta s$  deplasările virtuale compatibile cu legăturile.

*Necesar.* În adevăr, fie,  $Q, Q', \text{ etc.}$ , forțele de legătură care împreună cu forța  $F$ , lucrează asupra unui punct.

Dacă există echilibru, suma travaliurilor tuturor grupurilor de forțe  $F, Q, Q' \text{ etc.}$ , care lucrează asupra punctelor, este nulă în ori și ce deplasare și prin urmare și în deplasările virtuale compatibile cu legăturile. Însă în acestea din urmă, travaliul fiecăreia dintre forțele  $Q, Q', \text{ etc.}$ , este nul. Așa dar egalitatea (2) are loc.

*Suficient.* Să presupunem că egalitatea (2) are loc. Dacă, în asemenea condiție, sistemul, presupus în stare inițială de repaus, nu rămâne în echilibru, el se va pune în mișcare sub acțiunea forțelor ce lucrează asupra punctelor sale. Fie, ca mai sus,  $F, Q, Q' \text{ etc.}$  forțele care lucrează asupra unuia din puncte și  $w$  accelerația pe care o dă punctului rezultanta lor. Cum viteza inițială este nulă,  $w$  este accelerație tangențială. Punctul se va mișca potrivit legăturilor, în direcția lui  $w$ . Pentru a împiedeca mișcarea, va fi suficient să aplicăm punctului o forță —  $m w$ .

Sistemul fiind atunci în echilibru, să-i dăm o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile. În această deplasare, suma travaliurilor tuturor grupurilor de forțe  $F, Q, Q', \text{ etc.}$  și —  $m w$ , care lucrează asupra punctelor sistemului, este nulă. Însă deplasarea fiind compatibilă cu legăturile, travaliul fiecăreia dintre forțele  $Q, Q', \text{ etc.}$  este nul și pe de altă parte și travaliul for-



țelor  $F$  este nul, potrivit ipotezei inițiale (egalitatea (2)). (Rezultă deci că travaliul forțelor —  $m w$  este nul, adică  $\Sigma (-m w \delta s) = 0$ . Cum fiecare termen din  $\Sigma$  este o cantitate negativă, suma lor nu poate fi nulă decât dacă fiecare  $w$  în parte este nul, ceea ce conduce la egalitatea  $v = 0$ , căci  $w$  fiind accelerație tangențială, dacă  $w = 0$  avem  $v = \text{const.}$  adică  $v = 0$  ca la începutul mișcării. Deci punctele nu se mișcă din loc și sistemul este prin urmare în echilibru.

**Aplicații.** 1). Să reluăm problema cu bara  $AB$  sprijinită pe două planuri înclinate (pag. 178).

Mișcarea elementară a barei  $AB$ , compatibilă cu legăturile, este o rotațiune în jurul centrului instantaneu  $C$ . În această rotațiune, punctul  $D$  de la mijlocul barei descrie un element  $DD'$  perpendicular pe raza  $CD$ . Condiția necesară și suficientă pentru echilibru fiind ca travaliul forței  $P$  în deplasarea  $DD'$  să fie nul<sup>1)</sup>, avem

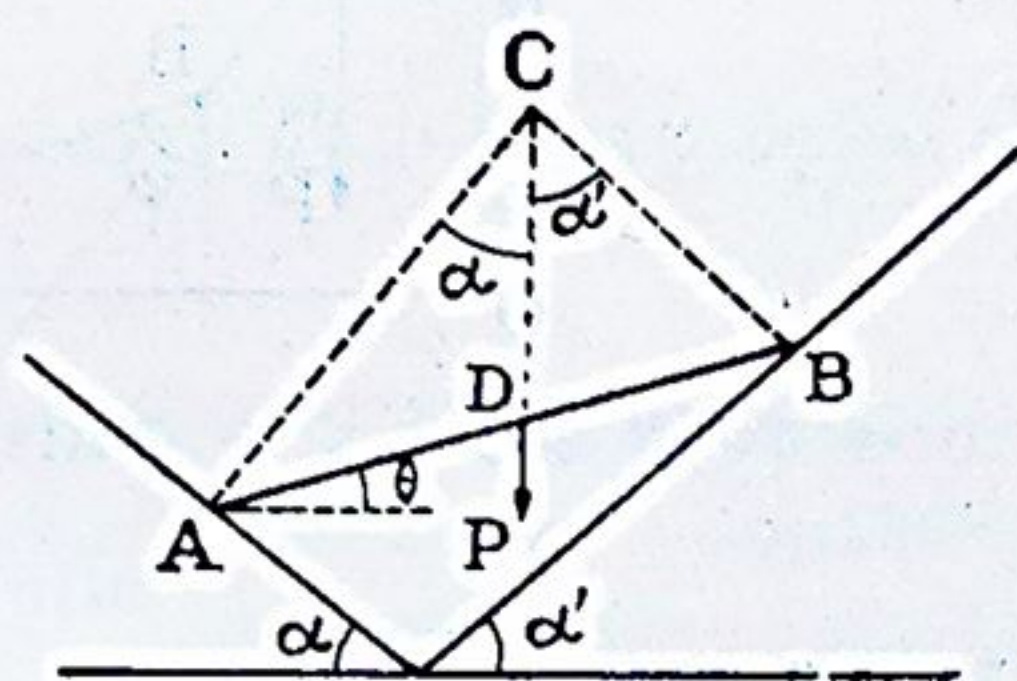


Fig. 137

$$P \cdot DD' \cos (P, DD') = 0$$

de unde

$$\cos (P, DD') = 0$$

deci elementul  $DD'$  trebuie să fie perpendicular pe direcția forței  $P$  și în consecință dreapta  $CD$  să aibă aceeași direcție ca forța. Presupunând aceasta realizat, se obține, ca la pag. 179:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin (\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha'}.$$

Acest exemplu ne arată că teorema travaliului virtual, sub forma ei geometrică, nu ne dă decât condiția de echilibru. Acțiunile din punctele  $A$  și  $B$  ale planurilor înclinate asupra barei, se vor determina prin considerațiile obișnuite asupra

<sup>1)</sup> Forțele interioare dau un travaliu nul, bara fiind un solid de formă invariabilă.



echilibrului sistemelor invariabile, descompunându-se forța  $P$ , strămutată în  $C$ , în două componente pe direcțiile  $CA$  și  $CB$ . Acțiunile  $N$  și  $N'$  vor fi egale și direct opuse acestor componente.

2). Să reluăm și problema dela pag. 184 cu echilibrul celor două bare articulate.

Avem, după cum s'a mai spus:

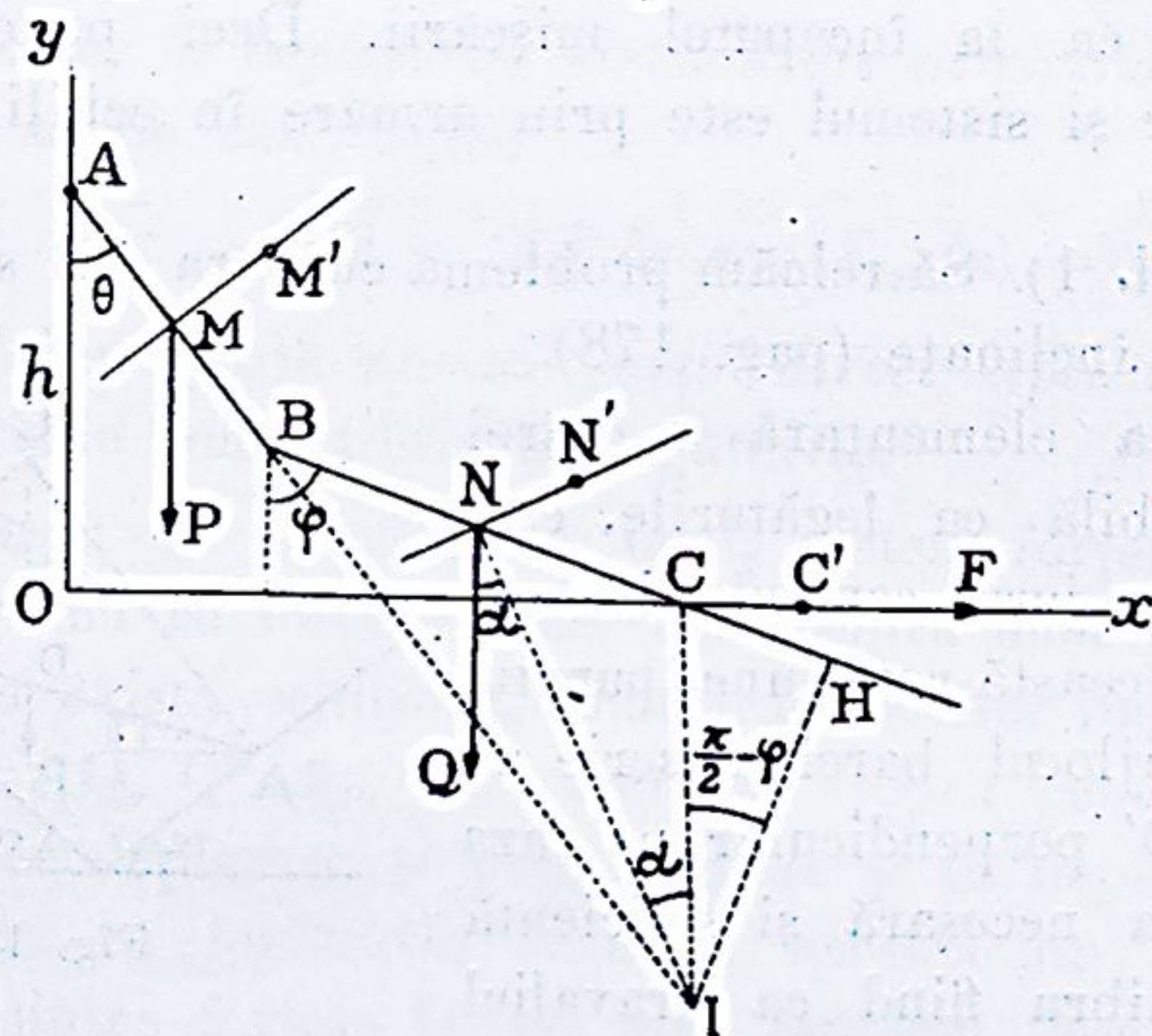


Fig. 138

$$AB = a, \quad BC = b, \quad h = a \cos \theta + b \cos \varphi.$$

Trebue să exprimăm că travaliul forțelor  $P$ ,  $Q$  și  $F$  în deplasările virtuale, compatibile cu legăturile, ale punctelor de aplicație  $M$ ,  $N$  și  $C$  ale acestor forțe, este nul.

Ori, deplasarea  $MM'$  este perpendiculară pe  $AM$  și egală cu  $\frac{a}{2} \delta \theta$ . Deplasarea  $NN'$  este perpendiculară pe  $IN$ , punctul  $I$  fiind centrul instantaneu de rotație al dreptei  $BC^1)$ , și are ca expresie  $IN \cdot \delta \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$  variația de direcție a dreptei  $BC$  fiind egală cu variația de direcție a perpendicularei  $IH$  dusă din  $I$  pe această dreaptă. În sfârșit, deplasarea virtuală  $CC'$  este evident egală cu  $\delta (a \sin \theta + b \sin \varphi)$  adică cu  $a \cos \theta \delta \theta + b \cos \varphi \delta \varphi$ .

<sup>1)</sup> *Cinematica*, pag. 102.



În consecință, condiția de echilibru este:

$$P \cdot \frac{a}{2} \delta\theta \cdot \cos(\overline{MP}, \overline{MM'}) - Q \cdot IN \delta\varphi \cdot \cos(\overline{NQ}, \overline{NN'}) + F \cdot (a \cos \theta \delta\theta + b \cos \varphi \delta\varphi) = 0.$$

Însă, după cum se vede pe figură,

$$\cos(\overline{MP}, \overline{MM'}) = -\sin \theta, \quad \cos(\overline{NQ}, \overline{NN'}) = -\sin \alpha$$

iar pe de altă parte, din triunghiul ICN avem

$$IN \sin \alpha = \frac{b}{2} \sin \varphi$$

așa încât condiția de echilibru devine

$$-P \frac{a}{2} \sin \theta \delta\theta + Q \frac{b}{2} \sin \varphi \delta\varphi + F(a \cos \theta \delta\theta + b \cos \varphi \delta\varphi) = 0$$

sau

$$(1) \quad a(2F \cos \theta - P \sin \theta) \delta\theta + b(Q \sin \varphi + 2F \cos \varphi) \delta\varphi = 0.$$

Între  $\delta\theta$  și  $\delta\varphi$  avem de altfel relația

$$(2) \quad a \sin \theta \delta\theta + b \sin \varphi \delta\varphi = 0$$

care se obține diferențiând pe  $h = a \cos \theta + b \cos \varphi$ .

Eliminând pe  $\delta\theta$  și  $\delta\varphi$  între (1) și (2) găsim

$$(P + Q) \sin \theta \cdot \sin \varphi = 2 F \sin(\varphi - \theta)$$

rezultat cunoscut.

## II. ECUAȚII DE ECHILIBRU.

1. **Generalități.** În mod analitic, legăturile se exprimă prin relațiuni între coordonatele punctelor sistemului.

Fie  $n$  numărul de puncte. Sistemul va fi supus la legături dacă între cele  $3n$  coordonate există  $k$  ecuațiuni:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0.$$

Numărul  $k$  este totdeauna mai mic decât  $3n$ , căci altfel cele  $3n$  coordonate ar fi fixe.

Să punem  $3n - k = r$ . Numărul  $r$  măsoară gradul de libertate pe care legăturile îl lasă sistemului. Sistemul este



complect liber când  $r$  este egal cu  $3n$ ; el este complect fix când  $r$  este egal cu zero. Dacă  $r$  este egal cu 1, adică dacă există  $3n - 1$  ecuații de legătură, se zice că sistemul este cu *legături complete*. În acest caz, cele  $3n$  coordonate se exprimă în funcție de un singur parametru; toate punctele sunt deci obligate de a se mișca pe curbe determinate și mișcarea unuia singur dintre ele determină mișcările tuturor celorlalte. Astfel este cazul mașinilor zise simple, ca: pârghia, scripetele, vârtejul, etc.

**2. Ecuații de echilibru.** Fie  $n$  numărul de puncte al sistemului;  $x, y, z$  coordonatele unuia oarecare dintre puncte;  $X, Y, Z$  componentele pe trei axe dreptunghiulare a rezultantei forțelor ce sunt direct aplicate punctului considerat și

$$(1) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0$$

cele  $k$  ecuații de legătură<sup>1)</sup>.

Condiția necesară și suficientă pentru echilibru este, potrivit capitolului precedent,

$$(2) \quad \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

variațiile coordonatelor trebuind să satisfacă celor  $k$  ecuații:

$$\Sigma \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z \right) = 0$$

$$(3) \quad \Sigma \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z \right) = 0$$

$$\dots$$

$$\Sigma \left( \frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z \right) = 0.$$

Putem trage din cele  $k$  ecuații (3) valorile a  $k$  variații în funcție de celelalte  $3n - k$  și substituind acele valori în ecuația (2) această nu va mai conține decât  $3n - k$  variații, care vor trebui privite ca arbitrare, așa că coeficienții lor vor trebui fiecare în parte egalați cu zero.

<sup>1)</sup> De fapt, legăturile nu pot uneori să fie exprimate prin ecuații, ci prin inegalități. Exemplu: obligația unui punct de a rămâne în interiorul unei suprafețe închise. Noi vom excepta însă asemenea cazuri.



Egalând cu zero acei coeficienți, obținem  $3n - k$  ecuații, care alăturate celor  $k$  ecuații de legătură (1), determină valorile celor  $3n$  coordonate ale punctelor care corespund poziției de echilibru.

*Metoda multiplicatorilor.* Calculele sunt mult mai simetrice prin utilizarea următoarei metode, datorită lui *Lagrange*.

Să adunăm ecuația (2) cu ecuațiile (3) înmulțite respectiv cu factorii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ; obținem

$$\begin{aligned} & \sum \left( X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) \delta x + \\ & \sum \left( Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) \delta y + \\ & \sum \left( Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) \delta z = 0. \end{aligned}$$

Această ecuație trebuie să aibe loc pentru toate deplasările compatibile cu legăturile. Ori, putem profita de nedeterminarea factorilor  $\lambda$  pentru a anula  $k$  din cele  $3n$  variații care intră în această ecuație. Rămân atunci  $3n - k$  variații și aceste variații fiind arbitrare, coeficienții lor trebuie să fie nuli. În definitiv, suntem astfel conduși de a anula pe toți cei  $3n$  coeficienți ai ecuației precedente și obținem prin aceasta un sistem de  $3n$  ecuații, dintre care trei, raportându-se la unul oarecare dintre punctele sistemului, au forma următoare:

$$\begin{aligned} & X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} = 0 \\ (4) \quad & Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} = 0 \\ & Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Cele  $3n$  ecuații împreună cu cele  $k$  ecuații de legătură,

$$(5) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0$$

formează un sistem de  $3n + k$  ecuații la care trebuie, să satisfacă cele  $3n + k$  necunoscute, constituite de cele  $3n$  coordonate și cei  $k$  multiplicatori  $\lambda$ .



**Caloulul forțelor de legătură.** Metoda precedentă ne dă și forțele de legătură. În adevăr, ecuațiile (4) sunt acelea ale echilibrului unui punct liber care ar fi solicitat pe de o parte de forța direct aplicată de componente  $X, Y, Z$  iar pe de altă parte de o forță având drept componente

$$\begin{aligned} X' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \\ (6) \quad Y' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \\ Z' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Expresiunile acestea sunt deci acelea ale forței totale de legătură care lucrează asupra punctului de coordonate  $x, y, z$ . Termenii

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

reprezintă componentele forței de legătură care lucrează asupra punctului considerat, în virtutea legăturii  $f_1 = 0$  și de asemenea pentru termenii următori.

**3. Notă.** Fie ca mai sus  $k + r = 3n$ . Putem să alăturăm celor  $k$  ecuații de legătură

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0$$

un sistem de  $r$  alte ecuații, absolut arbitrare, între coordonatele punctelor,

$$F_1 = q_1, \quad F_2 = q_2, \quad \dots, \quad F_r = q_r$$

și să rezolvăm apoi toate aceste ecuații, în număr de  $k + r = 3n$ , în raport cu cele  $3n$  coordonate ale punctelor. Vom obține atunci expresiuni de forma

$$\begin{aligned} x &= \varphi(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ (7) \quad y &= \theta(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ z &= \psi(q_1, q_2, \dots, q_r). \end{aligned}$$

Dând celor  $r$  parametri  $q_1, q_2, \dots, q_r$  creșteri absolut



oarecare, creșterile care vor rezulta pentru cordonatele  $x, y, z$  vor corespunde totdeauna unei deplasări compatibilă cu legăturile, și vom avea

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \delta q_r$$

$$\delta y = \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial q_r} \delta q_r$$

$$\delta z = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \delta q_r.$$

Purtând aceste valori în ecuația

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

rezultatul se va prezenta sub forma

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_r \delta q_r = 0$$

și această ecuație urmând a fi satisfăcută ori care ar fi variațiile  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$ , va trebui să avem, în același timp,

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_r = 0.$$

Aceste  $r$  ecuații vor determina valorile celor  $r$  parametri  $q$  care corespund poziției de echilibru. Ecuațiile (7) ne vor da apoi valorile respective ale cordonatelor  $x, y, z$ .

**4. Aplicații. a). Echilibrul unui solid liber.** Intr'un solid, legăturile consistă în aceea că distanțele dintre puncte rămân invariabile. Deplasările compatibile cu legăturile sunt deci toate deplasările ce poate lua un solid invariabil. Ori și care dintre aceste deplasări echivalează însă cu o translație identică cu aceea a unuia din punctele solidului, fie acesta  $O$ , și o rotație în jurul unui ax trecând prin punctul  $O$ , pe care îl vom lua ca origină a unui sistem de 3 axe cordonate dreptunghiulare. Translația se poate descompune în 3 translații în lungul axelor cordonate și rotația în 3 rotații în jurul aceluiași axe.

Fie  $\delta a, \delta b, \delta c$  cele 3 translații elementare și  $\delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$  cele trei rotații unghiulare elementare în jurul axelor.

Travaliul forțelor direct aplicate în deplasarea considerată (cu eliminarea forțelor interioare al căror travaliu este nul din cauza invariabilității distanțelor dintre puncte) este egal cu suma travaliurilor din cele 6 deplasări componente. Ori, pentru unul oarecare dintre puncte, travaliul rezultantei forțelor direct apli-



cate  $(X, Y, Z)$  este egal cu  $X \delta a$  în translația paralelă cu  $Ox$ , cu  $Y \delta b$  în translația paralelă cu  $Oy$  și  $Z \delta c$  în translația paralelă cu  $Oz$ .

Știm pe de altă parte, că travaliul elementar al unei forțe într'o rotație este egal cu momentul forței în raport cu axul de rotație multiplicat cu unghiul elementar de rotație<sup>1)</sup>. Deci, cele 3 rotații dau respectiv ca travaliuri:

$$(yZ - zY) \delta \theta, \quad (zX - xZ) \delta \varphi, \quad (xY - yX) \delta \psi.$$

În consecință, condiția necesară și suficientă pentru echilibru va fi

$$\Sigma [X \delta a + Y \delta b + Z \delta c + (yZ - zY) \delta \theta + (zX - xZ) \delta \varphi + (xY - yX) \delta \psi] = 0$$

care se scrie, având în vedere că translațiile  $\delta a, \delta b, \delta c$  și rotațiile  $\delta \theta, \delta \varphi, \delta \psi$  sunt aceleași pentru toate punctele,

$$(8) \quad \delta a \Sigma X + \delta b \Sigma Y + \delta c \Sigma Z + \delta \theta \Sigma (yZ - zY) + \delta \varphi \Sigma (zX - xZ) + \delta \psi \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Această egalitate trebuie să aibe loc ori care ar fi translațiile și rotațiile considerate. Trebuie deci să avem

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0; \\ \Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Regăsim astfel cele 6 condiții de echilibru cunoscute.

b). *Echilibrul unui solid care are un punct fix.* Să luăm punctul fix ca origină a axelor dreptunghiulare. Translațiile fiind nule, nu ne rămân în ecuația (8) decât rotațiile în jurul axelor. Anularea lor ne dă ecuațiile cunoscute

$$\Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

c). *Echilibrul unui solid care are două puncte fixe.* Singura deplasare compatibilă cu legăturile este o rotație în jurul drepte care unește cele două puncte. Luând această dreaptă ca ax  $Oz$  al unui sistem de axe dreptunghiulare, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este, potrivit ecuației (8):

$$\delta \psi \Sigma (xY - yX) = 0 \quad \text{adică} \quad \Sigma (xY - yX) = 0$$

rezultat cunoscut.

<sup>1)</sup> Pag. 25.



## V. ECHILIBRUL SOLIDELOR NATURALE.

Solidele naturale nu sunt absolut rigide. Ele se deformează sub acțiunea forțelor la care sunt supuse, însă, în majoritatea cazurilor, deformațiunile sunt ca și neglijabile și atunci solidele naturale pot fi asimilate solidelor invariabile de care se ocupă Mecanica rațională.

Ceeace nu se poate totuși niciodată neglija, sunt reacțiunile particulare ce se produc în contactul solidelor naturale, unele cu altele. Studiul acestor reacțiuni conduce la noțiunile *frecării de alunecare* și *rezistenței la rostogolire*, de care ne vom ocupa în capitolul de față.

### I. FRECAREA DE ALUNECARE.

1. Fie un corp greu, prezentând o față plană, așezat pe o masă orizontală. Reacțiunea mesei asupra corpului este o forță  $P'$ , egală și direct opusă greutateii  $P$  a corpului, aplicată în centrul său de greutate  $G$ . Dacă n'ar fi vorba de solide naturale, atunci o forță orizontală  $F$  oricât de mică, aplicată în  $G$ , ar determina punerea în mișcare a corpului, care ar fi o alunecare pe suprafața mesei.

Experiența arată însă, că corpul nu se pune în mișcare decât atunci când intensitatea  $F$  atinge o anumită valoare. Să considerăm momentul particular când corpul este pe punctul de a eși din starea de repaus.

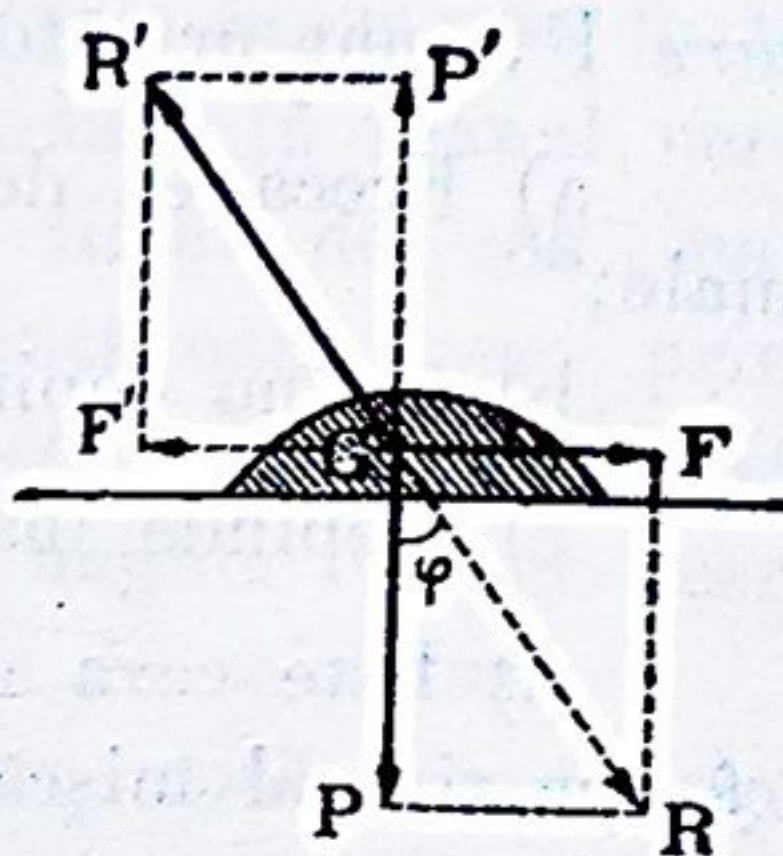


Fig. 139



În acest moment, există echilibru între forțele  $P$ ,  $F$  și reacțiunea  $R'$  a mesei asupra corpului. Această reacțiune este deci egală și direct opusă rezultantei  $R$  a celor două forțe  $P$  și  $F$ . Ea are o componentă orizontală  $F'$ , egală și direct opusă forței  $F$ , datorită asperităților pe care le prezintă cele două suprafețe în contact și care pătrunzând unele în altele se opun mișcării de alunecare.

Această componentă orizontală a lui  $R'$  se numește *frecare de alunecare*. Unghiul corespunzător  $\varphi$ , ia numele de *unghi de frecare*.

În mod mai general, să presupunem corpul sollicitat de o forță  $Q$  înclinată de un unghi  $\theta$  pe orizontală. Corpul nu va tinde să iasă din starea sa de repaus decât atunci când

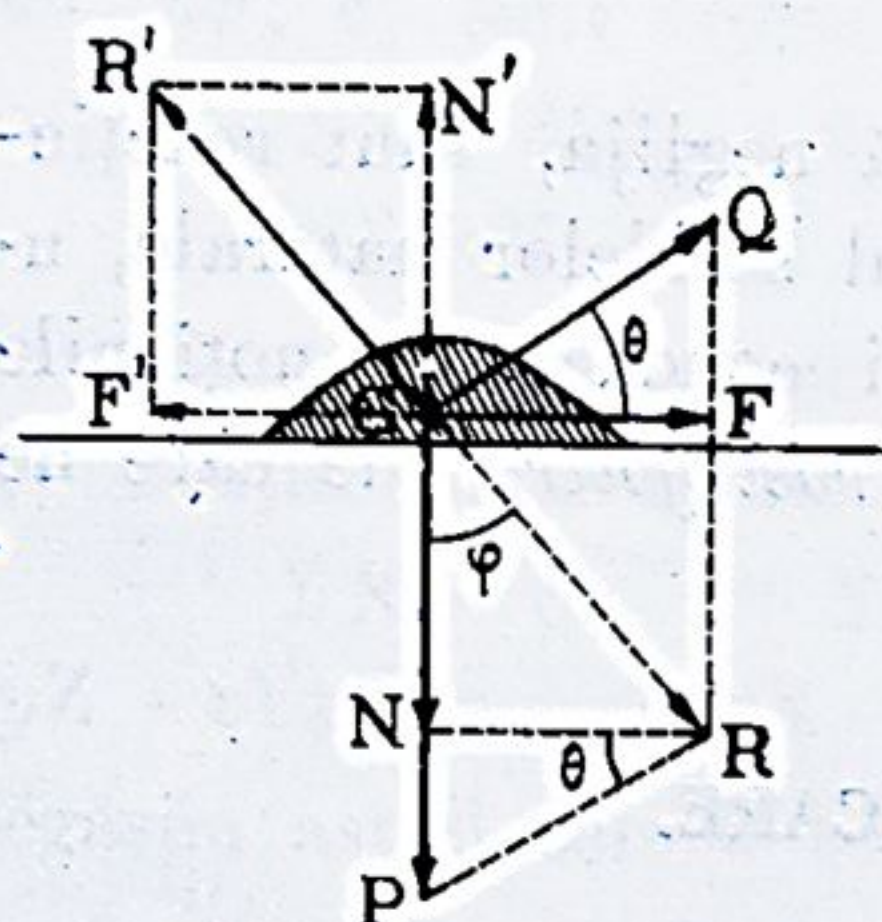


Fig. 140

proiecția orizontală a forței  $Q^1)$  va deveni egală cu  $F$ . Reacțiunea  $R'$  a planului va avea în acel moment o componentă orizontală  $F'$ , egală și direct opusă lui  $F$ , și o componentă verticală  $N'$  egală cu  $P - Q \sin \theta$ . Forța  $N$ , egală și direct opusă lui  $N'$ , reprezintă în cazul de față *presiunea normală* a corpului asupra mesei.

Experiența a stabilit, că *legile după care variază frecarea de alunecare*  $F$ , sunt următoarele:

- Frecarea de alunecare este proporțională presiunii normale;
- Ea nu depinde de mărimea suprafețelor în contact;
- Depinde însă de natura acestor suprafețe;
- Este ceva mai mare la eșirea din starea de repaus decât pe timpul mișcării efective;
- Nu depinde de viteza mișcării, afară numai de cazul când viteza devine foarte mare; atunci frecarea se micșorează.

<sup>1)</sup> Proiecție egală de altfel cu aceea a rezultantei  $R$  a forțelor  $P$  și  $Q$ .



Potrivit acestor legi, avem egalitatea

$$F = f \cdot N$$

factorul de proporționalitate  $f$  depinzând de natura suprafețelor în contact. Acest factor, zis *coeficient de frecare*, este de altfel egal cu  $\operatorname{tg} \varphi$ , de oare ce după cum arată figura avem

$$F = N \operatorname{tg} \varphi.$$

Când suprafețele în contact sunt destul de netede experiența dă pentru  $f$  următoarele valori mijlocii, în dreptul cărora am însemnat și valorile corespunzătoare ale unghiurilor  $\varphi$ .

Natura corpurilor		Valori $f$	Valori $\varphi$
Lemn pe lemn	<i>sec</i>	0,50	26° 30'
	<i>uns</i>	0,20	11° 20'
Metal pe metal	<i>sec</i>	0,19	10° 50'
	<i>uns</i>	0,10	5° 40'
Lemn pe metal	<i>sec</i>	0,60	30° 50'
	<i>uns</i>	0,12	6° 50'

2. **Aplicații.** 1). *Echilibrul unui punct pe un plan înclinat.* Fie un corp greu natural, asimilat pentru simplitate unui punct

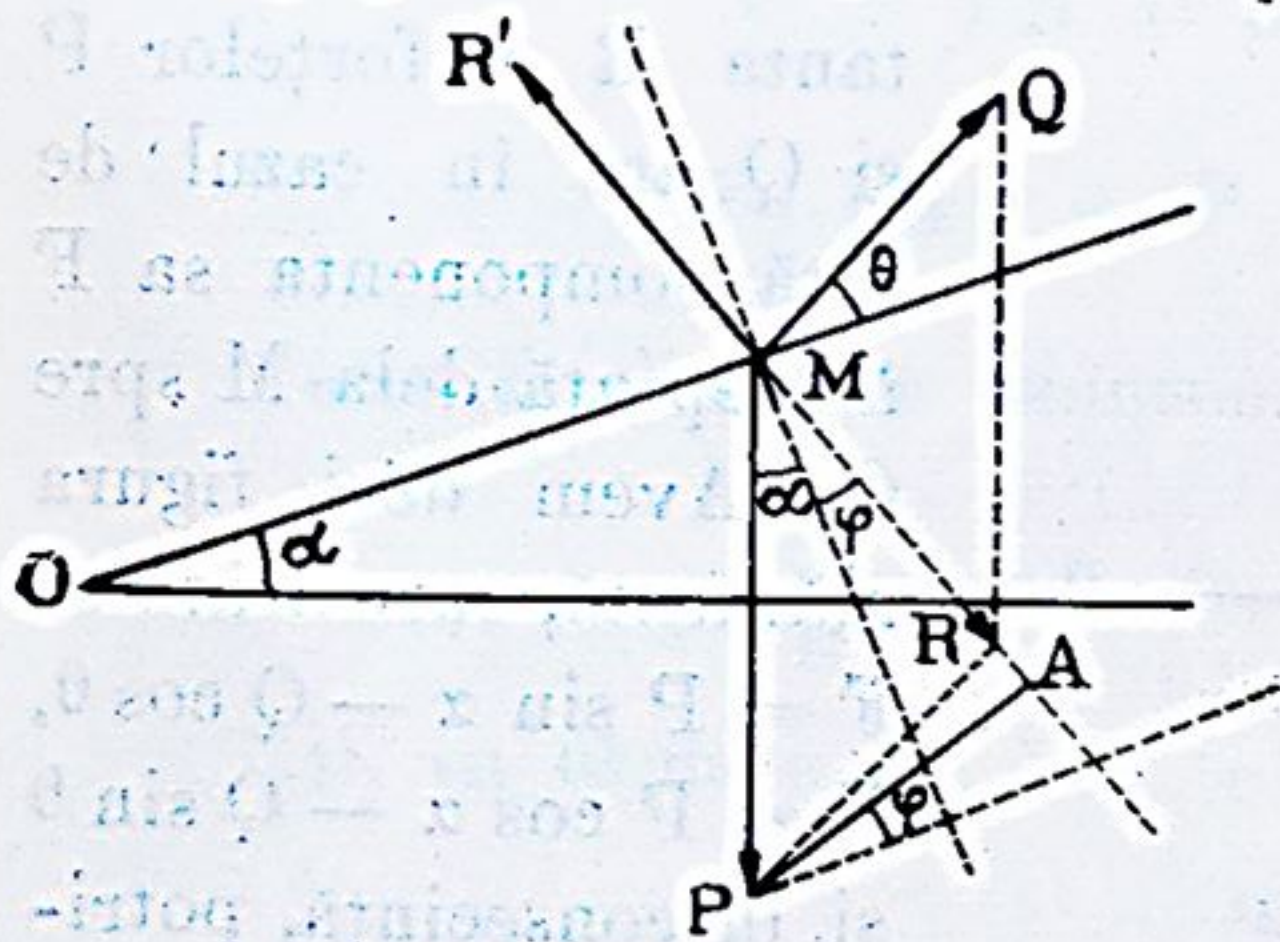


Fig. 141

material  $M$ , așezat pe un plan înclinat pe orizont de unghiul  $\alpha$  și supus unei forțe  $Q$ , conținută în planul vertical al liniei de cea mai mare pantă care trece prin  $M$ , cu care linie forța  $Q$  face un unghi  $\theta$ . Se cer condițiile de echilibru.

Sunt două. limite de echilibru de considerat:

1° Forța  $Q$  este pe punctul de a determina suirea punctului  $M$ ;

2° Forța  $Q$  este pe punctul de a permite coborârea punctului  $M$ .



Să luăm cazul întâi. Ruperea echilibrului va avea loc când proiecția pe direcția OM a rezultantei R a forțelor P și Q va atinge valoarea frecărei de alunecare F. Vom avea atunci

$$F = fN.$$

Ori,

$$F = Q \cos \theta - P \sin \alpha \quad \text{și} \quad N = P \cos \alpha - Q \sin \theta$$

deci

$$Q \cos \theta - P \sin \alpha = f(P \cos \alpha - Q \sin \theta)$$

de unde deducem

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \theta + f \sin \theta}$$

și, dacă înlocuim pe  $f$  prin  $\operatorname{tg} \varphi$ ,

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)}$$

Aceasta este condiția de echilibru. Se vede din ea că minimumul lui Q corespunde cazului când  $\cos(\theta - \varphi) = 1$ , adică  $\theta = \varphi$ . Pe figură, cum direcția MR este invariabilă, minimumul lui Q, egal cu minimumul segmentului PR, corespunde perpendicularei PA coborâtă pe direcția MR, și PA face cu OM un unghi egal cu  $\varphi$ .

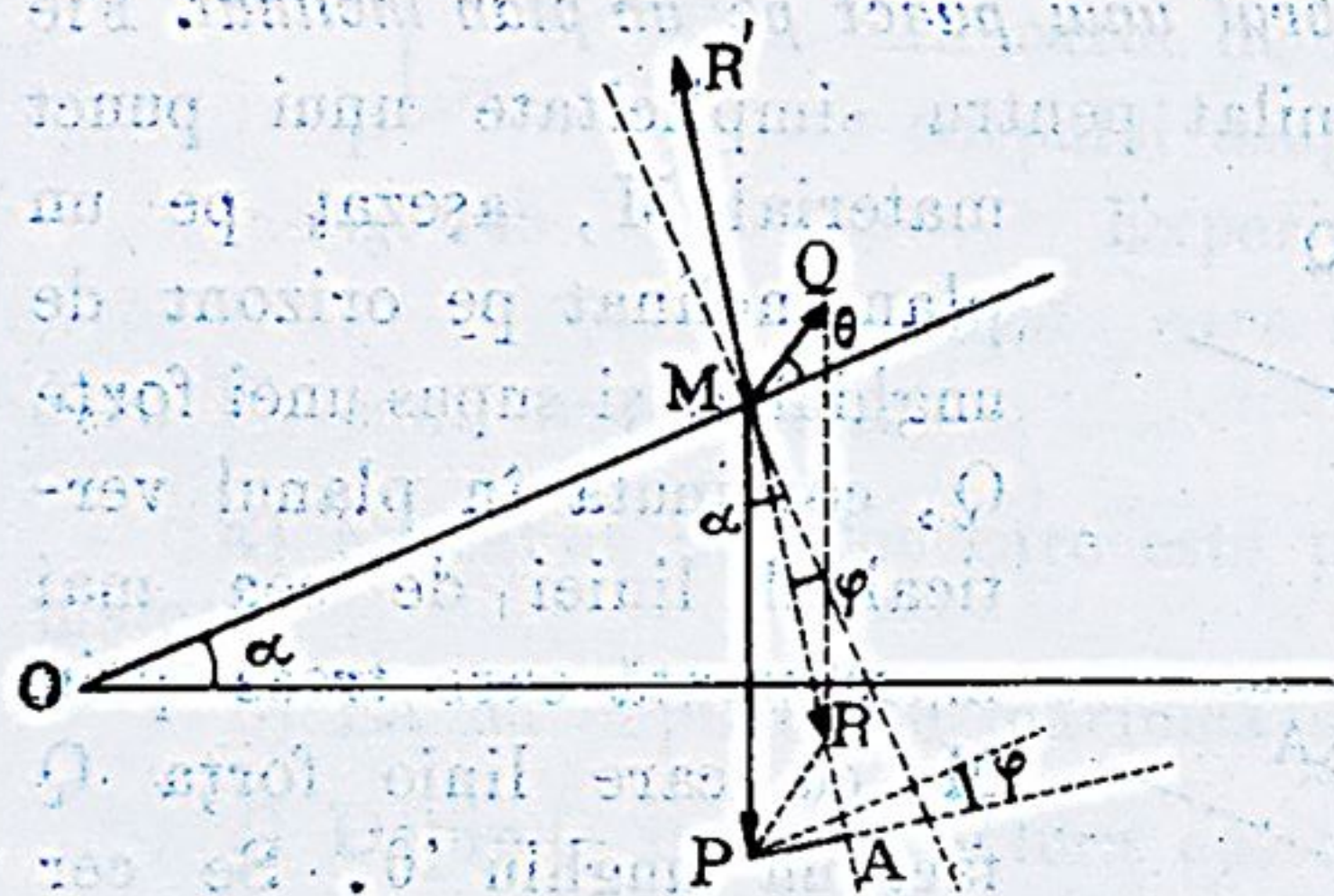


Fig. 142

Să luăm acum cazul al doilea. Rezultanta R a forțelor P și Q are în cazul de față componenta sa F îndreptată dela M spre O. Avem deci figura alăturată, care arată că  $F = P \sin \alpha - Q \cos \theta$ ,  $N = P \cos \alpha - Q \sin \theta$  și, în consecință, potrivit legii  $F = fN$ :

$$P \sin \alpha - Q \cos \theta = f(P \cos \alpha - Q \sin \theta)$$

de unde rezultă

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \theta - f \sin \theta} \quad \text{sau} \quad \frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\theta + \varphi)}$$



minimul lui  $Q$  corespunzând unghiului  $\theta = -\varphi$  (pe figură, lungimea perpendicularei  $PA$  coborâtă pe  $MR$ ).

2). *Echilibrul unei scări.* Chestiunea echilibrului unei scări răzemată pe o dușumea orizontală și pe un perete vertical, revine la aceea a echilibrului unei bare de lungime  $l$  și de greutate  $P$ , egale cu acelea ale scării, răzemată pe două axe dreptunghiulare  $Ox$  și  $Oy$ , dintre care  $Oy$  vertical și îndreptat în sus.

Fiind vorba de solide naturale, reacțiunile  $R$  din  $A$  și  $R'$  din  $B$  sunt oblice și au ca componente corespunzătoare frecărilor:  $F = fN$ ,  $F' = f'N'$ , de direcții opuse mișcărilor ce tind a se produce și care corespund bine înțeles căderii scării.

Condiția de echilibru fiind aceea ca forța  $P$  să fie egală și direct opusă rezultantei forțelor  $R$  și  $R'$ , avem, potrivit teoriei generale, proiectând pe axele  $Ox$ ,  $Oy$  și luând momentele în raport de  $O$ :

$$N' - fN = 0, \quad f'N' - P + N = 0;$$

$$N'l \cos \theta + P \frac{l}{2} \sin \theta - Nl \sin \theta = 0$$

ecuații, din care deducem prin eliminarea lui  $N$  și  $N'$ :

$$\frac{f}{1+ff'} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{1+ff'} \sin \theta = 0$$

și, ca urmare,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2f}{1-ff'}.$$

Coefficienții  $f$  și  $f'$  nu sunt egali decât în cazul când dușumeaua și peretele vertical ar fi constituiți din același material. În asemenea caz particular, avem

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2f}{1-f^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1-\operatorname{tg}^2 \varphi} = \operatorname{tg} 2\varphi$$

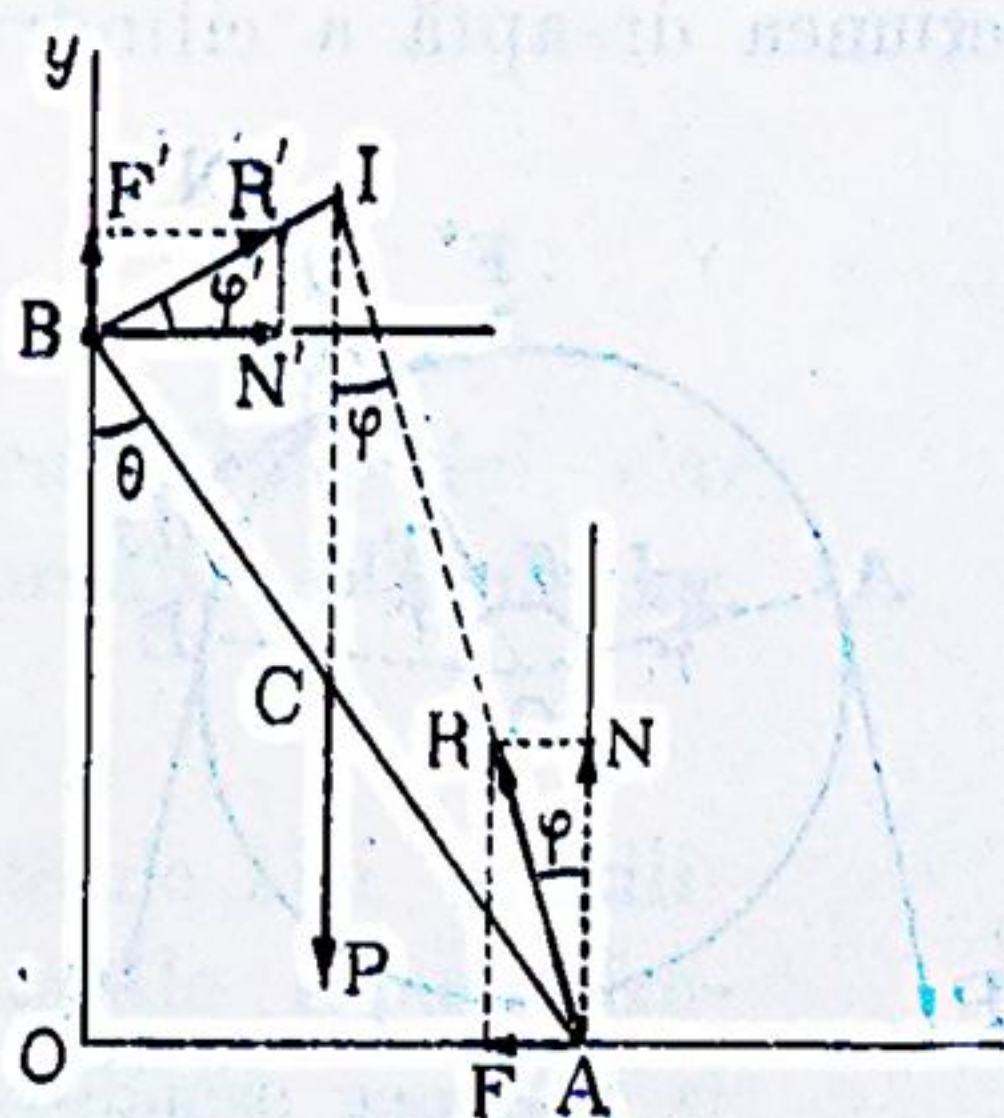


Fig. 148



de unde rezultă  $\theta = 2\varphi$ , după cum se poate constata și în mod geometric observând că dreptele  $AI$  și  $BI$  sunt în cazul considerat perpendiculare una pe alta și lungimele  $CA$  și  $CI$  fiind atunci egale, avem ungh.  $CAI =$  ungh.  $CIA = \varphi$  și prin urmare  $\theta =$  ungh.  $BAN = 2\varphi$ .

3). *Echilibrul unei coarde înfășurată pe un cilindru fix.* Fie, un cilindru de revoluție de rază  $r$  și o coardă înfășurată în secțiunea dreaptă a cilindrului, pe o porțiune de arc  $AB$ , coar-

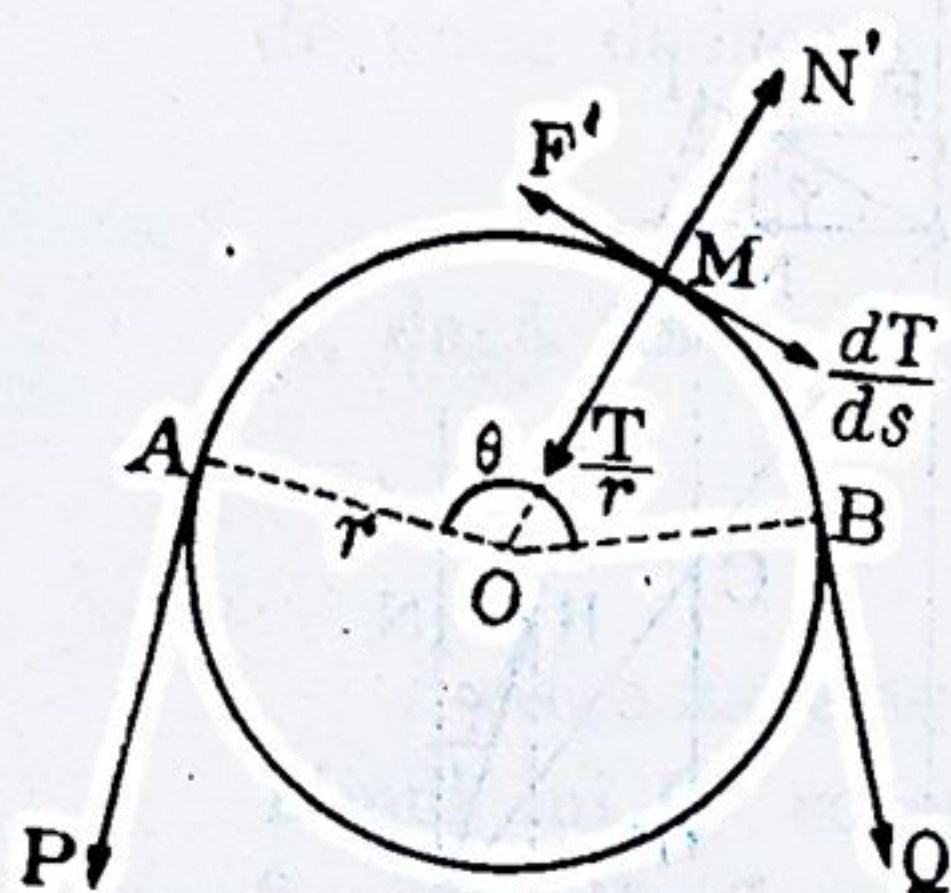


Fig. 144

da fiind solicitată de o forță  $P$  și de o rezistență  $Q$ . Să considerăm momentul când rezistența  $Q$  este pe punctul de a învinge acțiunea forței  $P$  combinată cu aceea a frecării coardei pe cilindru.

În acel moment, dacă neglijem greutatea coardei, atunci într'un punct  $M$  există echilibru între reacțiunea  $R'$  a cilindrului, de componente  $F'$

și  $N'$ , și componentele  $\frac{dT}{ds}$  și  $\frac{T}{r}$  îndreptate respectiv pe tangenta din  $M$  și pe direcția  $MO$ <sup>1)</sup>. Deci, și potrivit figurei,

$$\frac{dT}{ds} = -F', \quad \frac{T}{r} = -N'$$

așa că aplicarea legii  $F' = fN'$  ne dă ecuația

$$\frac{dT}{ds} = f \frac{T}{r}$$

Deducem, separând variabilele și integrând,

$$\text{Log } \frac{T}{T_0} = \frac{f}{r} s \quad \text{adică} \quad T = T_0 e^{\frac{f}{r} s}$$

sau, înlocuind pe  $s$  (arcul  $AB$ ) prin  $r\theta$ ,

$$T = T_0 e^{f\theta}.$$

Ori, când  $\theta = 0$ , avem  $T_0 = P$  și când  $\theta = \widehat{AOB}$ , avem  $T = Q$ . Deci, în definitiv,

$$Q = P e^{f\theta}.$$

<sup>1)</sup> A se vedea pag. 192.



Aceasta este condiția de echilibru. Rezultă din ea, că cu o forță  $P$  dată, se poate echilibra o rezistență  $Q$  foarte mare și cu atât mai mare cu cât  $\theta$  și coeficientul de frecare  $f$  sunt mai mari. Așa spre exemplu, admitând  $f = 0,20$  găsim

valori $\theta$	raport $\frac{Q}{P}$
$\pi$ . . .	1,87
$2\pi$ . . .	3,51
$4\pi$ . . .	12,34
$6\pi$ . . .	48,32

Cu o coardă înfășurată de 3 ori în jurul cilindrului, s'ar putea astfel învinge o rezistență  $Q$  de aproape 500 de kg. numai cu o forță  $P$  de 10 kg.

**Notă.** Teorema travaliului virtual nu este de nici o utilitate pentru studiul echilibrului sistemelor naturale supuse frecărilor, căci printre forțele direct aplicate trebuie socotite și frecările de alunecare  $fN$ , al căror travaliu nu este nul.

Ori, precedând astfel, introducem în ecuații o serie de necunoscute care nu ne permit de a găsi condițiile de echilibru.

## II. REZISTENȚA LA ROSTOGOLIRE.

*Rostogolirea unei perechi de roate cuplate.* Fie două roate de aceeași rază  $r$ , cuplate printr'o osie și putând a se deplasa prin rostogolire pe un sol orizontal rezistent sau pe două șini paralele.

Putem reduce studiul mișcării și echilibrului unui asemenea sistem la acela al mișcării și echilibrului unui cerc vertical de rază  $r$ , care s'ar rostogoli pe un ax orizontal, greutatea  $P$  a cercului fiind egală cu aceea a sistemului de roate.

În stare de repaus, există echilibru între greutatea  $P$  și reacțiunea axului orizontal asupra cercului. Dacă n'ar fi vorba de solide naturale, atunci un efort de tracțiune orizontal, cât de mic, aplicat în  $O$ , ar determina o translație a cercului în direcția efortului. În cazul solidelor naturale, care este acela de



care ne ocupăm, experiența probează că atât timp cât efortul de tracțiune nu atinge o anumită valoare  $F$ , cercul rămâne nemiscat, iar după aceea dobândește o mișcare de rostogolire. Cercul opune deci o rezistență la rostogolirea lui, caracterizată prin valoarea efortului  $F$ .

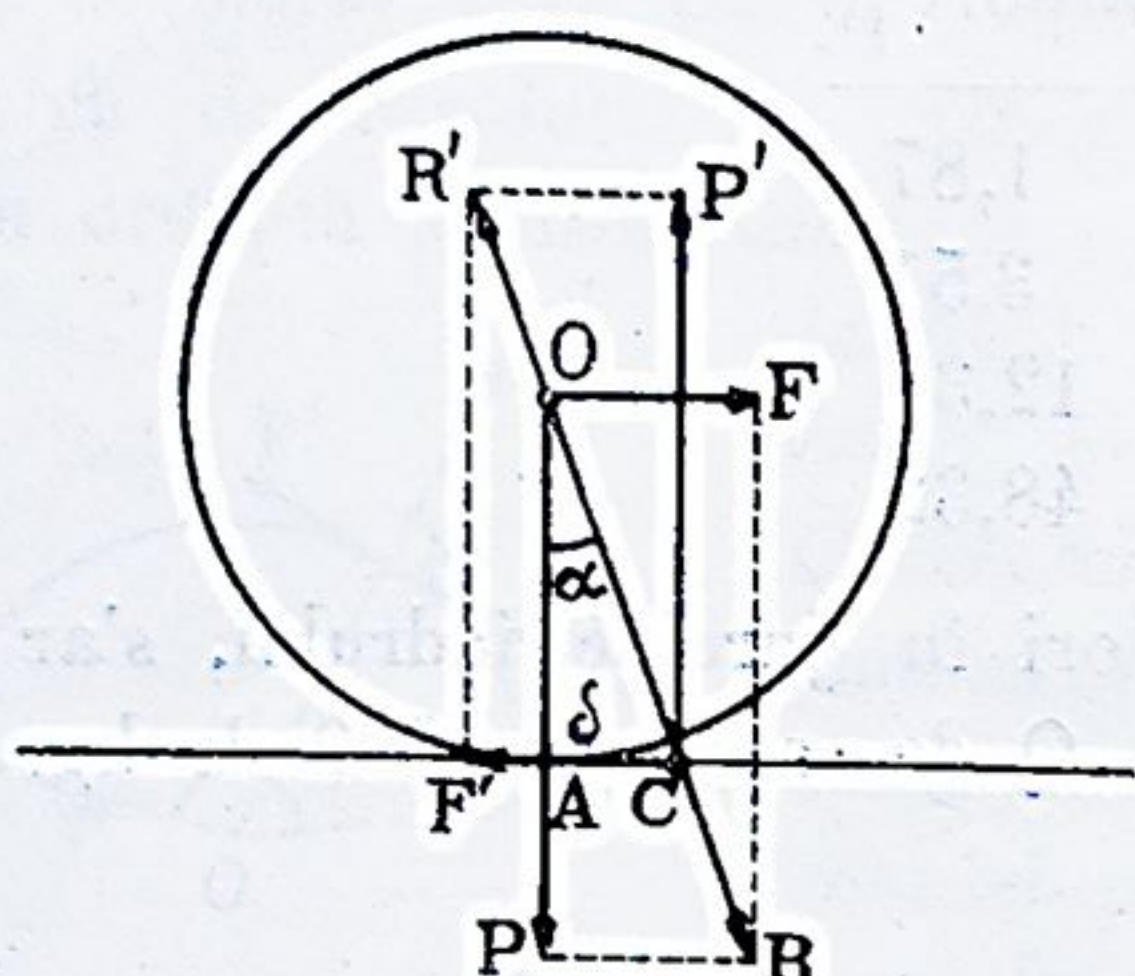


Fig. 145

Să considerăm momentul când cercul este pe punctul de a porni din loc. În acest moment există echilibru între rezultanta  $R$  a forțelor  $P$  și  $F$  și reacțiunea  $R'$  a axului orizontal asupra cercului. Punctul de aplicație al reacțiunii  $R'$  este punctul  $C$  unde  $R$  întâlnește axul orizontal. Aceasta se explică prin aceea că cercul și axul, fiind solide naturale, se deformează, mai mult sau mai puțin, în vecinătatea punctului de contact geometric  $A$ , așa că punctul  $C$  intră în zona de contact a cercului cu axul de rostogolire. Pe toată această zonă au loc reacțiuni a căror rezultantă este  $R'$ .

Punctul  $C$  este zis *punct de contact mecanic*. Reacțiunea  $R'$  se poate descompune în componentele  $P'$  și  $F'$ , egale respectiv cu  $P$  și  $F$  însă de sensuri opuse;  $P$  cu  $P'$  și  $F$  cu  $F'$  formează două cupluri care se echilibrează unul cu altul.

Fie  $AC = \delta$ . Egalitatea momentelor celor două cupluri ne dă

$$P\delta = Fr \quad \text{de unde} \quad (1) \quad F = \frac{P}{r} \delta.$$

Experiența a stabilit că  $\delta$  este independent de mărimea presiunii normale și a razei  $r$  a cercului (presupunând totuși că  $r$  nu este prea mic) și variază numai cu natura solidelor în contact. Rezultă potrivit formulei (1), că efortul de tracțiune orizontal, necesar pornirii din loc (egal de altfel cu acela care este necesar menținerii unei viteze uniforme de mișcare) este, pentru aceeași greutate  $P$ , cu atât mai mic cu cât raza roatelor este mai mare.



Să considerăm acum un efort oblic  $T$ . Cercul se va găsi pe punctul de a eși din starea de repaus, când componenta orizontală  $T \cos \theta$  va atinge valoarea  $F$ . Presiunea normală fiind în cazul de față egală cu  $P - T \sin \theta$ , vom avea potrivit formulei (1):

$$T \cos \theta = \frac{P - T \sin \theta}{r} \delta$$

de unde deducem

$$T = \frac{P \delta}{r \cos \theta + \delta \sin \theta}.$$

Minimul lui  $T$  corespunde perpendicularei  $PH$  coborâtă din  $P$  pe direcția lui  $R$  și această perpendiculară face cu orizontala unghi egal cu unghiul  $\alpha$  din  $O$ , deci minimul considerat are ca expresiune  $P \sin \alpha$ , cu relația  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{r}$ .

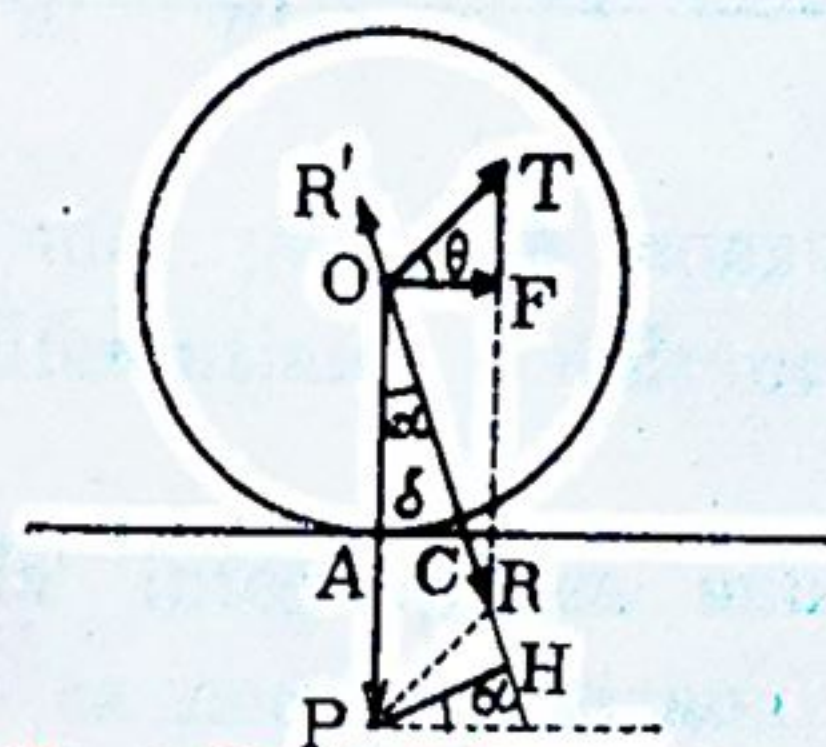


Fig. 146



### PARTEA III.

## MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE.

### I. MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE LIBERE.

#### I. ECUAȚIILE GENERALE ALE MIȘCĂRII UNUI SISTEM DE PUNCTE LIBERE.

1. **Ecuatiile diferențiale ale mișcării.** Punctele unui sistem material pot să fie libere sau supuse la legături. Le vom considera deocamdată ca fiind toate libere. Fie:

$n$  numărul de puncte,

$m_1, m_2, \dots, m_n$  masele lor,

$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n$  coordonatele lor.

Fiecare punct poate fi considerat ca solicitat de o forță unică, rezultând din compunerea forțelor ce-i sunt aplicate, atât exterioare cât și interioare.

Fie:

$X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots; X_n, Y_n, Z_n$

cele trei proiecții ale fiecăreia din aceste forțe.

Ecuatiile mișcării unuia oarecare dintre puncte sunt:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned} \quad (1)$$

și în total avem  $3n$  asemenea ecuații.



Componentele  $X, Y, Z$  vor fi privite ca fiind în general funcții:

- 1° de cordonatele  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots;$
- 2° de vitezele  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}; \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}; \dots;$
- 3° de timpul  $t$ .

În asemenea condiții, problema cea mai generală constă în integrațiunea unui sistem de ecuații diferențiale simultanee de ordinul al doilea, în număr de  $3n$ .

Putem aduce rezolvirea problemei la integrațiunea unui sistem de  $6n$  ecuații de ordinul 1<sup>u</sup>, luând ca necunoscute auxiliare componentele  $x', y', z'$  ale vitezei fiecăruia din punctele sistemului. Cele 3 ecuații ale mișcării punctului de masă  $m$ , pot astfel să fie înlocuite prin următoarele șase:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', & m \frac{dx'}{dt} &= X \\ \frac{dy}{dt} &= y', & m \frac{dy'}{dt} &= Y \\ \frac{dz}{dt} &= z', & m \frac{dz'}{dt} &= Z. \end{aligned}$$

În total, pentru întregul sistem,  $6n$  asemenea ecuații. Integrațiunea lor ne va da pentru necunoscutele  $x, y, z, x', y', z'$  expresiuni de forma

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= f_1(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ y &= f_2(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ z &= f_3(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ x' &= f'_1(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ y' &= f'_2(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ z' &= f'_3(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \end{aligned}$$

în care  $c_1, c_2, \dots, c_{6n}$  sunt  $6n$  constante arbitrare. Obținem deci o infinitate de mișcări, care satisfac toate, ecuațiilor diferențiale de la care am plecat. — Pentru precizarea unei probleme trebuie să ni se dea condițiile inițiale ale mișcării, adică cordonatele  $a, b, c$  și componentele vitezei  $a', b', c'$  corespunzătoare poziției fiecăruia din puncte, la începutul mișcării. Con-



stantele arbitrare pot fi atunci toate determinate, căci făcând în ecuațiile (3) pe  $t = 0$  și înlocuind pe  $x, y, z$  prin  $a, b, c$ , pe  $x', y', z'$  prin  $a', b', c'$ , etc., obținem un sistem de  $6n$  ecuații între cele  $6n$  necunoscute  $c_1, c_2, \dots, c_{6n}$ . Acest sistem de ecuații nu va putea fi nici incompatibil, nici nedeterminat. Dacă unul din aceste cazuri se prezintă, vom avea prin aceasta proba că nu s'a obținut soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale.

**2. Integralele unei probleme de Dinamică.** Să rezolvăm sistemul de ecuații (3) în raport de  $c_1, c_2, \dots, c_{6n}$ . Vom obține expresiuni de forma:

$$(4) \begin{cases} c_1 = \varphi_1(t; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_1', y_1', z_1'; \dots) \\ c_2 = \varphi_2(t; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_1', y_1', z_1'; \dots) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Există deci un număr de  $6n$  funcții  $\varphi$  de coordonatele punctelor, de proiecțiile vitezelor și de timpul  $t$ , care păstrează o valoare constantă pe tot timpul mișcării.

Ori și care dintre ecuațiile (4) se numește *integrală a mișcării*. Dacă le-am cunoaște pe toate, problema ar fi complet rezolvată. Fiecare integrală traduce o proprietate caracteristică a mișcării, independent de celelalte.

Este evident că dacă avem  $\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \dots$ , atunci și o funcție arbitrară de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  păstrează tot o valoare constantă, însă ecuația  $\psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = \text{const.}$ , nu constituie decât o consecință a celor dintâi, iar nu o integrală nouă.

În capitolul următor vom stabili *teoremele generale* care în unele cazuri pot să procure *integrale de ale mișcării*.

## II. TEOREME GENERALE ASUPRA MIȘCĂRII UNUI SISTEM DE PUNCTE LIBERE.

Fie:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

ecuațiile diferențiale ale mișcării unui punct dintr'un sistem material.



1. **Teorema cantităților de mișcare proiectate pe un ax.**  
Dacă scriem pentru toate punctele ecuațiile diferențiale ale mișcării și adunăm pe cele ce se referă la axul  $Ox$ , apoi pe cele ce se referă la axul  $Oy$  și înstârșit la axul  $Oz$ , obținem cele 3 ecuații următoare:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sum m \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X \\ \sum m \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y \\ \sum m \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z. \end{aligned}$$

Forțele interioare dispar, căci ele fiind două câte două egale și de semne contrarii dau proiecții nule pe ori ce ax.

Putem pune ecuațiile (1) sub forma

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum X \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = \sum Y \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} = \sum Z. \end{cases}$$

Rezultă următoarea teoremă: *Derivata sumei proiecțiilor cantităților de mișcare pe un ax oarecare, este egală cu suma proiecțiilor forțelor exterioare pe același ax.*

Fie  $OA$  vectorul rezultat al cantităților de mișcare și  $OB$  vectorul rezultat al forțelor exterioare. Ecuațiile (2) mai exprimă că *derivata geometrică a vectorului  $OA$ , și deci viteza punctului  $A$ , este egală cu vectorul  $OB$ .*

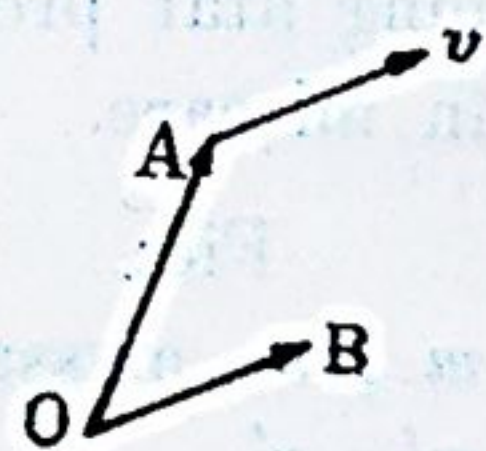


Fig. 147

**Corolarii.** 1) Să presupunem că vectorul rezultat al forțelor exterioare rămâne neconținut perpendicular unei direcții fixe. Luând axul  $Ox$  paralel cu această direcție, avem  $\sum X = 0$ <sup>1)</sup> și prin urmare

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = 0$$

<sup>1)</sup> Axele cordonate vor fi presupuse totdeauna dreptunghiulare.



de unde deducem

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c.$$

Obținem deci o integrală a mișcării.

2) Dacă vectorul rezultat al forțelor exterioare rămâne neconținut paralel unei direcții fixe, atunci luând axul  $Oz$  paralel acestei direcții, avem  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  și obținem în consecință două integrale ale mișcării:

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c, \quad \sum m \frac{dy}{dt} = c'.$$

3) Dacă presupunem înșfârșit că vectorul rezultat al forțelor exterioare este nul, sau că nu există forțe exterioare, atunci, oricare ar fi axele cordonate, avem  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum Z = 0$  și în consecință

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c, \quad \sum m \frac{dy}{dt} = c', \quad \sum m \frac{dz}{dt} = c''.$$

deci, trei integrale de ale mișcării.

*Aplicație.* Fie o țeavă de tun, coprinzând o încărcătură de pulbere și un proiectil, așezată pe un plan orizontal pe care ea poate aluneca fără frecare. Când se dă foc, gazele pulberii împing atât proiectilul cât și țeava, așa că întregul sistem intră în mișcare.

Fie:

$m$ ,  $v$  masa și viteza unui punct al țevii,  
 $m'$ ,  $v'$  " " " " " " " proiectilului,  
 $m''$ ,  $v''$  " " " " " " " gazelor pulberii.

În mișcarea orizontală, până în momentul când proiectilul iese din gura țevii, nu există nici o forță exterioară, forțele dezvoltate de gaze fiind forțe interioare. În acest interval de timp, pe un ax  $Ox$  paralel axului țevii, avem

$$\sum (m v + m' v' + m'' v'') = 0$$

căci la începutul mișcării sistemul a fost în repaus, așa că valoarea constantei  $c$  este nulă.

Cum  $v$  și  $v'$  sunt respectiv aceiași pentru toate punctele



țevii și proiectilului, deducem, însemnând prin  $M$  masa țevii și prin  $M'$  masa proiectilului:

$$Mv + M'v' + \Sigma m''v'' = 0.$$

Dacă am neglija termenul al treilea, ar rămâne

$$Mv + M'v' = 0$$

egalitate care ar exprima că țeava și proiectilul dobândesc viteze de semne contrarii și invers proporționale cu masele ce au fiecare. În realitate termenul în chestiune nu poate fi neglijat, așa că viteza de recul a țevii este ceva mai mare decât arată egalitatea precedentă.

**2. Teorema mișcării centrului de greutate.** Considerația centrului de greutate al sistemului, ne permite de a da ecuațiilor (1) o altă formă.

Fie  $a, b, c$  cordonatele centrului de greutate și  $M$  masa totală a sistemului. Avem, după cum se știe,

$$Ma = \Sigma mx, \quad Mb = \Sigma my, \quad Mc = \Sigma mz$$

deci, derivând de două ori și potrivit ecuațiilor (1),

$$(3) \quad \begin{cases} M \frac{d^2a}{dt^2} = \Sigma X \\ M \frac{d^2b}{dt^2} = \Sigma Y \\ M \frac{d^2c}{dt^2} = \Sigma Z. \end{cases}$$

Ori, acestea sunt ecuațiile mișcării unui punct de masă  $M$ . De aci, următoarea teoremă: *Centrul de greutate se mișcă întocmai ca și cum masa sistemului ar fi concentrată întrînsul și i s'ar aplica în mod echipolent toate forțele care lucrează asupra sistemului.*

Să nu se creadă că ecuațiile (3) sunt suficiente pentru determinarea mișcării centrului de greutate. Ele ar fi suficiente numai în cazul cu totul particular când  $\Sigma X, \Sigma Y$  și  $\Sigma Z$  ar depinde numai de cordonatele  $a, b, c$ , de derivatele lor și de timpul  $t$ .



*Corolarium.* Să presupunem că vectorul rezultat al forțelor exterioare este nul, sau că nu există forțe exterioare. În asemenea caz, ecuațiile (3) ne dau

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2b}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2c}{dt^2} = 0$$

și deducem

$$a = h + kt, \quad b = h' + k't, \quad c = h'' + k''t.$$

De aci, următoarea propozițiune cunoscută sub numele de *principiul conservării mișcării centrului de greutate*: Când un sistem nu este supus la nici o forță exterioară, sau când vectorul rezultat al forțelor exterioare este nul, centrul de greutate rămâne în repaus sau se mișcă cu o mișcare rectilină și uniformă.

Astfel, dacă admitem că stelele, din cauza depărtării lor, n'au nici o acțiune asupra sistemului solar, centrul de greutate al acestui sistem nu poate avea decât o mișcare rectilină și uniformă și această mișcare n'a fost modificată când, după o ipoteză în general admisă, planeta dintre Marte și Jupiter s'a spart și a dat naștere la asteroizii care populează aceea regiune a sistemului.

Forțele dezvoltate de mușchii noștri fiind forțe interioare, nu au, dacă lucrează numai ele singure, nici o acțiune asupra modificării de poziție a centrului de greutate. Un om în repaus izolat în spațiu și sustras acțiunii gravitației, n'ar putea prin mișcări de mâini și de picioare să schimbe poziția inițială a centrului său de greutate, deși prin asemenea mișcări el ar putea isbuti să se învâртеască în jurul acestui centru.

Așezat în picioare pe un plan orizontal, perfect alunecos, un om, supus greutății, n'ar putea înainta, căci centrul său de greutate n'ar fi solicitat de nici o forță orizontală. Numai frecarea procură o asemenea forță, așa că fără această frecare nici o mișcare de înaintare la suprafața pământului n'ar fi posibilă. Greutatea  $P$  egală cu  $Mg$  și reacțiunea  $N$  a planului sunt egale numai în cazul când omul stă nemișcat. Dacă el coboară centrul său de greutate cu o accelerație oarecare, lăsându-se pe vine, reacția  $N$  devine mai mică decât greutatea  $P$ . În adevăr,



potrivit formulelor precedente, dacă proiectăm mișcarea pe o verticală Oz îndreptată în jos, avem  $Mc = Mg - N$ , de unde  $N = M(g - c)$  și vedem că  $N$  devine cu atât mai mic cu cât accelerația  $c$  a centrului de greutate este mai mare. Pe de altă parte, cum reacția  $N$  nu poate deveni negativă, mai vedem că cea mai mare valoare pe care o poate dobândi  $c$  este egală cu  $g$ , când  $N = 0$ . Dacă din potrivă, stând pe vine, omul își asvârlă corpul în sus, accelerația  $c$  fiind atunci negativă, valoarea reacției  $N$  devine mai mare decât greutatea  $P$ .

**3. Teorema momentelor cantităților de mișcare; (teorema momentelor cinetice).** Știm, că din cele 3 ecuații diferențiale ale mișcării unui punct, putem deduce

$$m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = yZ - zY$$

care se poate scrie

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = yZ - zY$$

și alte două ecuații analoage. Dacă facem suma tuturor acestor ecuații, pentru fiecare din axe, obținem

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum (yZ - zY) \\ \frac{d}{dt} \sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum (zX - xZ) \\ \frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum (xY - yX). \end{cases}$$

Membrii ai doilea nu conțin forțele interioare, căci acestea, luate două câte două, fiind egale și direct opuse dau un moment nul în raport de ori ce ax.

Sistemul de axe dreptunghiulare fiind absolut oare care, ecuațiile (4) dau loc următoarei teoreme: *Derivata sumei momentelor cantităților de mișcare (sau a momentului cinetic) în raport de un ax, este egală cu suma momentelor forțelor exterioare în raport de același ax.*



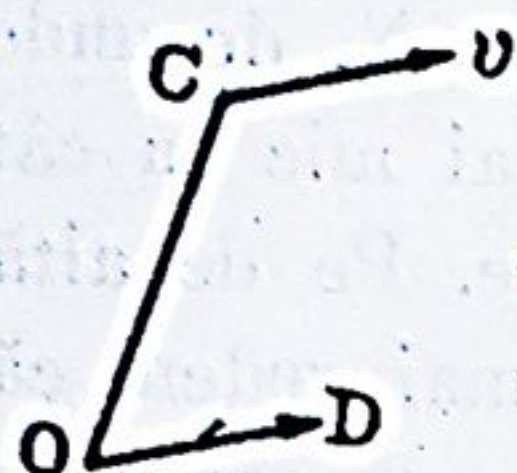


Fig. 148

Fie OC momentul resultant al cantităților de mișcare, sau momentul cinetic, în raport cu origina axelor, și OD momentul resultant al forțelor exterioare. Ecuațiile (4) mai exprimă că *derivata geometrică a vectorului OC, și deci viteza punctului C, este egală cu vectorul OD.*

**Corolarii.** 1) Să presupunem că față de un ax fix, suma momentelor forțelor exterioare este nulă. Luând acel ax drept ax Ox, vom avea

$$\frac{d}{dt} \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

și prin urmare

$$\sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c$$

deci o integrală a mișcării.

2) Să presupunem că forțele exterioare, compuse ca și cum ar lucra asupra unui solid invariabil, dau o resultantă unică, care trece printr'un punct fix. Luând acel punct ca origină a unui sistem de trei axe dreptunghiulare, vom avea

$$\sum (yZ - zY) = 0, \quad \sum (zX - xZ) = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0$$

și prin urmare

$$(5) \quad \begin{cases} \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c \\ \sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c' \\ \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c'' \end{cases}$$

Se obțin deci 3 integrale de ale mișcării.

3) Să presupunem în sfârșit că nu există forțe exterioare. Atunci ecuațiile (5) vor avea loc ori care ar fi origina aleasă pentru axele cordonate.

4. **Teorema arilor.** Printr'un punct O să ducem 3 axe cordonate dreptunghiulare și să unim punctul O cu un punct M al sistemului. Proiecțiile razei vectoare OM pe planurile yOz,



$z O x$ ,  $x O y$  vor descrie respectiv ariile  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$  și vom avea, după cum se știe <sup>1)</sup>,

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = 2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = 2 \frac{d\omega'}{dt}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 \frac{d\omega''}{dt}$$

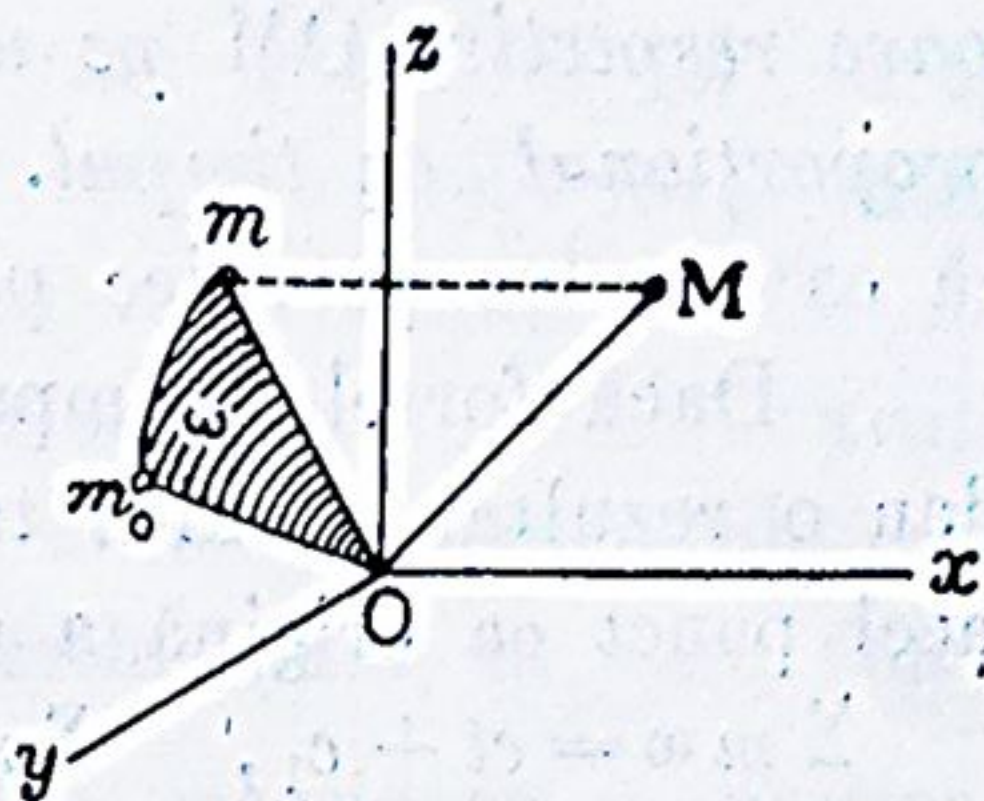


Fig. 149

Dacă înmulțim aceste ecuații cu  $m$  și le însumăm pentru toate punctele sistemului, punând pentru prescurtare,

$$\lambda = \sum m \omega, \quad \lambda' = \sum m \omega', \quad \lambda'' = \sum m \omega''$$

obținem

$$\sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = 2 \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = 2 \frac{d\lambda'}{dt}$$

$$\sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 2 \frac{d\lambda''}{dt}$$

asa că ecuațiile (4) devin

$$(6) \quad \begin{cases} 2 \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \sum (yZ - zY) \\ 2 \frac{d^2\lambda'}{dt^2} = \sum (zX - xZ) \\ 2 \frac{d^2\lambda''}{dt^2} = \sum (xY - yX) \end{cases}$$

Să presupunem că suma momentelor forțelor exterioare în raport de un ax este nulă. Atunci luând acest ax drept ax  $Ox$ , prima dintre ecuațiile (6) ne dă

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0 \text{ și prin urmare } \lambda = \sum m \omega = ct + c_1.$$

Așa dar:

Când suma momentelor forțelor exterioare în raport de un ax  $Ox$ , este nulă, suma productelor ce se obțin înmulțind

<sup>1)</sup> *Oînemática*, pag. 79.



masa fiecărui punct  $M$  cu aria descrisă de proiecția razei vectoriale respective  $OM$  pe un plan perpendicular axului, variază proporțional cu timpul. Aceasta este teorema ariilor și se zice că ea are loc pe orice plan perpendicular axului considerat.

Dacă forțele, compuse ca în cazul solidelor invariabile, dau o rezultantă unică trecând printr'un punct fix, atunci luând acel punct ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare, avem

$\Sigma m \omega = ct + c_1$ ,  $\Sigma m \omega' = c't + c'_1$ ,  $\Sigma m \omega'' = c''t + c''_1$   
deci teorema ariilor are loc pe orice plan trecând prin punctul fix.

Dacă, însfârșit, nu există forțe exterioare, teorema ariilor are loc pe orice plan din spațiu.

**5. Teorema forțelor vii.** Știm că variația forței vii a unui punct material, într'un interval de timp oarecare, este egală cu suma travaliurilor forțelor care lucrează asupra punctului, în același interval de timp. Dacă facem suma tuturor ecuațiilor care exprimă acest lucru pentru fiecare din punctele sistemului, și dacă convenim de a numi *forță vie a sistemului de puncte* suma forțelor vii a acestor puncte, obținem teorema următoare:

*Variația forței vii a unui sistem material, într'un interval de timp oarecare, este egală cu travaliul forțelor care lucrează asupra sistemului în același interval de timp.*

Dacă prin urmare însemnăm prin  $T$  forțe vie a sistemului,  $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ , și prin  $\mathcal{E}$  suma travaliurilor forțelor care lucrează asupra punctelor, într'un interval de timp, avem, ca și pentru cazul unui singur punct material (pag. 47)

$$(7) \quad dT = d\mathcal{E}$$

$$(8) \quad \text{și } T - T_0 = \mathcal{E} \text{ sau } \Delta T = \mathcal{E}.$$

Ecuația (7) este ecuația diferențială a forțelor vii. Sub formă mai explicită, ea se scrie:

$$d \Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$$

presupunând axele dreptunghiulare.



Ecuatia (8) este ecuația forțelor vii sub formă finită.

Aici forțele interioare intervin, căci travaliul lor nu este nul. Am văzut că el este egal cu  $\int f dr$ , pentru două forțe interioare repulsive,  $f$  reprezentând intensitatea comună a forțelor, și cu  $-\int f dr$ , pentru două forțe interioare atractive. Travaliul nu este neconținut nul decât în cazul solidelor invariabile, când distanța  $r$  dintre puncte rămânând neschimbată,  $dr$  este nul.

*Integrala forțelor vii.* Dacă forțele exterioare și interioare admit o funcție de forțe, avem

$$\mathcal{E} = U - U_0$$

deci potrivi egalității (8),

$$T - T_0 = U - U_0$$

adică

$$T - U = T_0 - U_0 = \text{const.}$$

Dacă utilizăm potențialul  $V = -U$ , atunci avem

$$(9) \quad T + V = \text{const.}$$

Așa dar: Când forțele, atât interioare cât și exterioare, care lucrează asupra unui sistem, admit un potențial, suma forței vii și a potențialului rămâne constantă tot timpul mișcării.

Avem prin urmare, în asemenea caz, o integrală a mișcării, zisă integrala forțelor vii.

*Conservarea forței vii.* Dacă potențialul este o funcție uniformă de coordonate, atunci, când sistemul revine la aceeași poziție,  $V$  redobândește aceeași valoare și deci și forța vie  $T$ . Prin urmare: Când forțele interioare și exterioare admit un potențial, funcție uniformă de coordonate, forța vie revine la aceeași valoare ori de câte ori sistemul trece prin aceeași poziție.

*Caz particular.* Să presupunem că nu există forțe exterioare și că forțele interioare admit un potențial funcție numai de distanțele  $r$  dintre puncte. În asemenea caz, forța vie  $T$  a sistemului redevine aceeași ori de câte ori sistemul revine la aceeași stare, caracterizată prin distanțele relative dintre punctele sale.



Sistemul solar oferă un asemenea exemplu, căci singurele forțe care acționează soarele, planetele și sateliții lor, considerând toate aceste corpuri ca simple puncte materiale, sunt atracțiunile mutuale dintre ele și acestea fiind supuse legii lui Newton admit un potențial.

În adevăr, însemnând prin  $m$  și  $m'$  masele a două puncte oarecare din sistem și prin  $r$  distanța dintre ele, forța de atracțiune are ca expresie  $f \frac{m \cdot m'}{r^2}$  și traviul elementar al grupului de 2 forțe atractive este atunci egal cu  $- f \frac{m \cdot m'}{r^2} dr$ .

Ori, aceasta este diferențiala funcției  $f \frac{m \cdot m'}{r}$ , așa că sistemul admite ca funcție de forțe

$$U = f \sum \frac{m \cdot m'}{r}$$

și deci ca potențial

$$V = - f \sum \frac{m \cdot m'}{r}.$$

Rezultă, potrivit ecuației (9) că pe tot timpul mișcării există egalitatea

$$T - f \sum \frac{m \cdot m'}{r} = \text{const.}$$

**Traviul greutății.** Să considerăm un sistem de puncte materiale în mișcare, punctele fiind supuse și acțiunii greutății. Ne propunem a evalua traviul greutăților în mișcarea sistemului.

Luând axul  $Oz$  vertical și îndreptat în sus, și aplicând formula generală

$$d\mathcal{E} = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

avem ca expresiune a traviului elementar al greutăților tuturor punctelor

$$d\mathcal{E} = - \sum mg dz.$$

Însă, dacă însemnăm prin  $c$  cota centrului de greutate și prin  $M$  masa sistemului, știm că

$$M c = \sum m z, \quad \text{deci} \quad M dc = \sum m dz$$

și prin urmare



$$(\alpha) \quad d\mathcal{E} = - Mg \cdot dc.$$

Între două cote  $c_0$  și  $c$  travaliul greutateilor va fi

$$\mathcal{E} = Mg (c_0 - c).$$

Așa dar: *In mișcarea unui sistem material, travaliul greutateilor este egal cu greutatea totală înmulțită cu coborîrea verticală a centrului de greutate.*

Din formula  $(\alpha)$  rezultă că greutateile admit o funcție de forțe  $U = - Pc - k$ , sau un potențial  $V = Pc + k$ ,  $P$  fiind greutatea totală iar  $k$  o constantă arbitrară. Dacă luăm  $k = 0$ , atunci potențialul greutateii  $P$  la o cotă oarecare  $c$  va fi egal cu  $Pc$ .

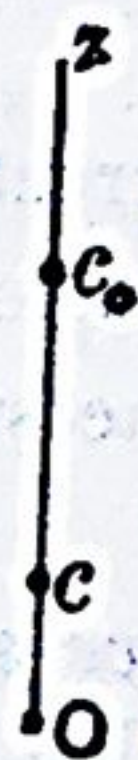


Fig. 150

### Rezumat.

Teoremele generale corespund la 7 ecuații distincte și anume la cele trei ecuații.

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum X \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = \sum Y \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} = \sum Z \end{cases}$$

referitoare teoremei cantităților de mișcare; apoi la cele trei ecuații

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum (yZ - zY) \\ \frac{d}{dt} \sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum (zX - xZ) \\ \frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum (xY - yX) \end{cases}$$

referitoare teoremei momentelor cantităților de mișcare, și în sfârșit la ecuația

$$(3) \quad d \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$



sau mai scurt

$$dT = d\mathcal{E}$$

referitoare teoremei forțelor vii.

Ecuatiile care corespund teoremei mișcării centrului de greutate ca și principiului ariilor, putându-se deduce din sistemele de ecuații (1) și (2), nu constituiesc ecuații distincte de acestea.

Cele 7 ecuații de mai sus, poartă numele de *ecuațiile universale ale mișcării*, pentru motivul că ele se aplică și sistemelor cu legături dacă înlocuim legăturile prin forțele care pot să le reprezinte.

Reamintim că forțele interioare nu figurează decât în ecuația (3) a teoremei forțelor vii.

### III. TEORIA ENERGIEI.

1. Să considerăm un sistem acționat de forțe exterioare și interioare și să presupunem că forțele interioare admit un potențial  $V_i$ .

Insemnând prin  $\mathcal{E}_e$  travaliul forțelor exterioare și prin  $\mathcal{E}_i$  travaliul forțelor interioare, avem, potrivit teoremei forțelor vii,

$$\Delta T = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i.$$

Însă,  $\mathcal{E}_i = -\Delta V_i$ , conform definiției potențialului; deci

$$\Delta T = \mathcal{E}_e - \Delta V_i,$$

sau

$$(1) \quad \Delta (T + V_i) = \mathcal{E}_e.$$

Se numește:

1° *Energie actuală sau energie cinetică* forța vie  $T$  a sistemului;

2° *Energie potențială*, potențialul  $V_i$  al forțelor interioare;

3° *Energie totală*, sau mai pe scurt, *energie*, suma  $T + V_i$  a energiilor cinetică și potențială.

Cu aceste denumiri, rezultatul exprimat prin egalitate (1) se enunță în felul următor: *Intr'un sistem oarecare, când for-*



tele interioare admit un potențial, variația energiei corespunzătoare unei modificări a sistemului, este egală cu trivaliul forțelor exterioare.

**2. Conservarea energiei.** Când nu sunt forțe exterioare, variația energiei este nulă, deci

$$T + V_i = \text{const.}$$

adică: *Energia unui sistem izolat este constantă.*

*Exemplu.* Fie o piatră de greutate  $P$ , lăsată să cadă în vid dela o înălțime  $H$ . Piatra formează împreună cu pământul un sistem material, în care greutatea este o forță interioară; pământul atrage piatra cu o forță egală cu greutatea pietrei, iar piatra atrage pământul cu o forță egală și direct opusă greutateii ei. Cum acțiunea pietrei asupra mișcării pământului este complet neglijabilă, atât energia cinetică cât și energia potențială a sistemului în mișcarea considerată, vor depinde numai de mișcarea pietrei, reducându-se la energia cinetică și energia potențială a acesteia.

La origina mișcării  $M_0$ , energia cinetică a pietrei este nulă iar energia potențială egală cu  $PH$ <sup>1)</sup>. Când piatra atinge pământul, energia ei cinetică este  $\frac{1}{2} \frac{P}{g} V^2$ ,  $V$  fiind viteza în punctul de cădere  $O$ , iar energia potențială devine nulă. Energia totală a rămas astfel aceeași, deoarece avem, după cum se știe,

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} V^2 = PH.$$

Intr'un moment oarecare al căderii, când piatra fiind la o înălțime  $h$  deasupra pământului, viteza sa este  $v$ , energia cinetică este egală cu  $\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$  iar energia potențială egală cu  $Ph$ . Energia totală a rămas însă iarăși aceeași, căci

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = P(H - h)$$

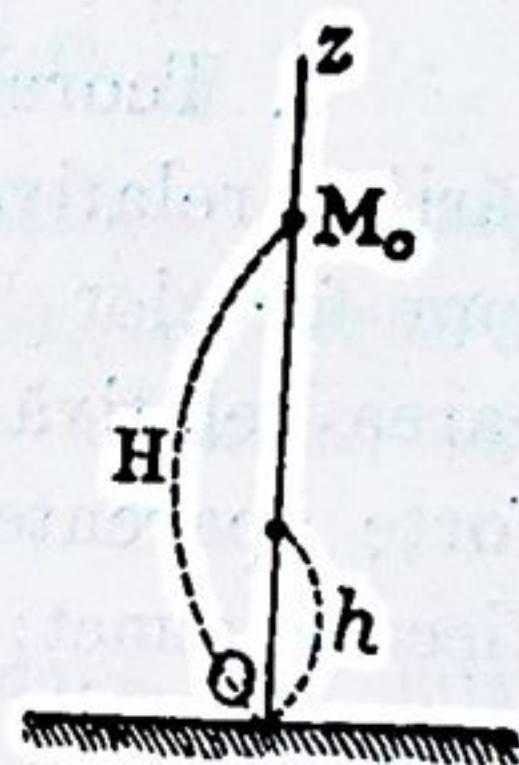


Fig. 151

<sup>1)</sup> Pag. 233.



și prin urmare

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + Ph = PH.$$

Energia potențială se transformă deci progresiv, cu încetare din  $M_0$  și până în  $O$ , în energie cinetică, însă cu respectarea principiului conservării energiei. Dacă piatra și pământul ar fi perfect elastici, piatra odată căzută la pământ ar fi asvârlită din punctul  $O$  în sus, cu viteza  $V$ , și energia ei cinetică ar fi aceea care s'ar transforma progresiv până în punctul  $M_0$  în energie potențială. Așa dar cu toate că de naturi diferite — căci energia cinetică  $\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$  depinde numai de viteza  $v$  a pietrii, pe când energia potențială numai de poziția ei  $h$  pe verticală — aceste două energii se transformă una în alta.

#### IV. EXTINDEREA TEOREMELOR GENERALE LA MIȘCĂRILE RELATIVE.

1. Teoremele generale și consecințele lor se aplică mișcărilor relative ale unui sistem material, cu condiția de a alătura forțelor *reale* forțele *aparente* care permit de a trata mișcarea relativă a fiecărui punct ca o mișcare absolută. Aceste forțe aparente sunt, după cum știm, în număr de două pentru fiecare punct: *forța de inerție de antrenare* și *forța centrifugă compusă*.

Se va observa numai, că în aplicațiunea teoremei forțelor vii la mișcarea relativă a unui sistem, *forțele centrifuge compuse dispar*, căci fiecare dintre ele fiind perpendiculară pe viteza relativă a punctului respectiv, dă un travaliu nul în mișcarea relativă.

2. **Caz particular.** Să considerăm, în particular, mișcarea relativă a unui sistem în raport de axe dreptunghiulare de direcții constante, trecând prin centrul de greutate al sistemului.

Fie:

$a, b, c$ , cordonatele centrului de greutate  $G$  în raport de sistemul fix  $Oxyz$ ;  $x, y, z$  cordonatele unui punct  $M$  al sistemului



în raport de  $Oxyz$ ;  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  cordonatele lui  $M$  în raport de sistemul de axe  $Gx'y'z'$ , paralel sistemului  $Oxyz$ .

Avem, pe de o parte

$$(1) \quad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'$$

iar pe de altă parte

$$(2) \quad \Sigma mx' = 0, \quad \Sigma my' = 0, \quad \Sigma mz' = 0$$

căci cordonatele centrului de greutate  $G$  față de sistemul  $Gx'y'z'$  sunt nule.

Ecuațiile (1) și (2) conduc la extinderea teoremelor generale la mișcarea relativă de care ne ocupăm.

a). *Teorema cantităților de mișcare proiectate pe un ax.* Din ecuațiile (2) deducem pe cele următoare

$$(3) \quad \Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dy'}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dz'}{dt} = 0.$$

Acestea exprimă că suma proiecțiilor cantităților de mișcare pe un ax oarecare este neconținut nulă, sau, că vectorul rezultat al cantităților de mișcare, din mișcarea relativă, este neconținut nul.

b). *Teorema momentelor cantităților de mișcare.* În mișcarea absolută, acestei teoreme îi corespund, după cum s'a văzut, trei ecuații, dintre care cea dintâi a fost

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma (yZ - zY)$$

sau

$$\Sigma m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma (yZ - zY).$$

Să înlocuim în această ecuație pe  $y$  și  $z$  prin valorile lor (1) și să punem  $\Sigma m = M$ . Obținem

$$\Sigma m \left[ (b + y') \left( \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2} \right) - (c + z') \left( \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2} \right) \right] = \Sigma \left[ (b + y') Z - (c + z') Y \right]$$

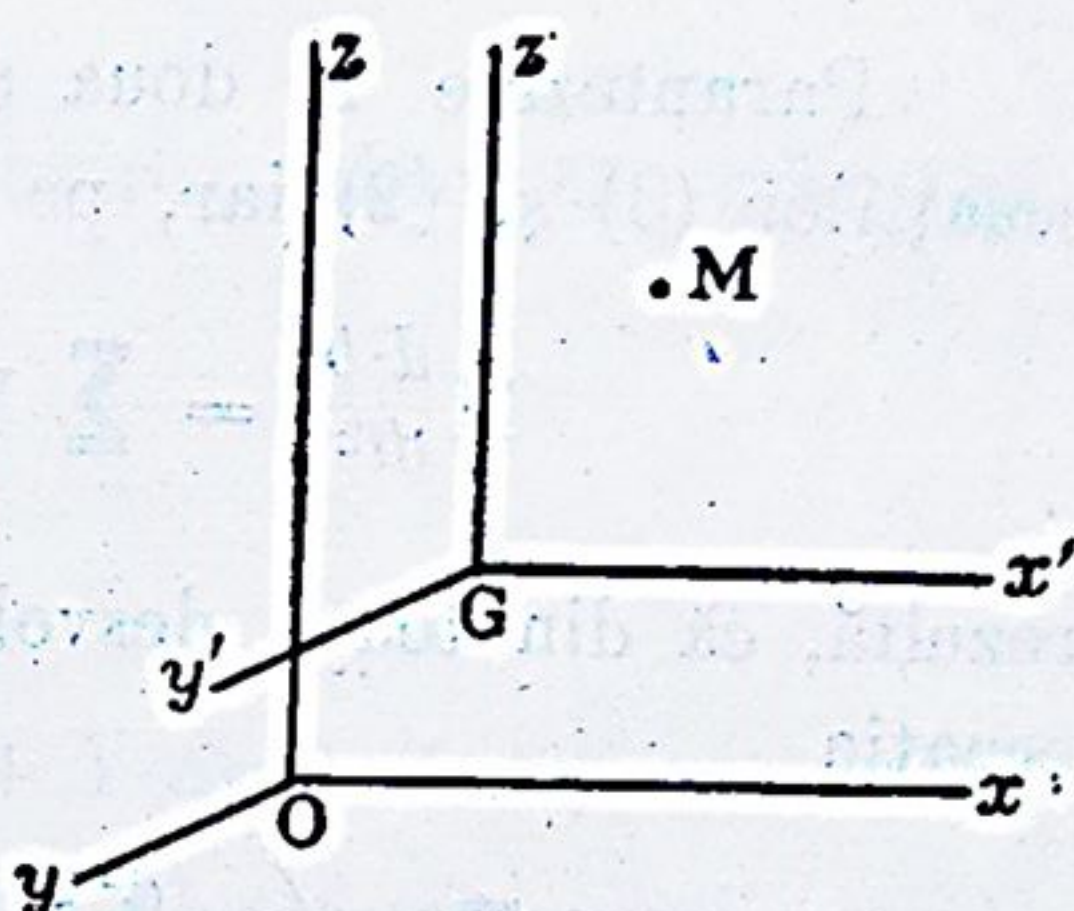


Fig. 152



și, dezvoltând,

$$M \left( b \frac{d^2 c}{dt^2} - c \frac{d^2 b}{dt^2} \right) + \left( b \sum m \frac{d^2 z'}{dt^2} - c \sum m \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) + \left( \frac{d^2 c}{dt^2} \sum m y' - \frac{d^2 b}{dt^2} \sum m z' \right) + \sum m \left( y' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) = \left( b \sum Z - c \sum Y \right) + \sum (y' Z - z' Y).$$

Parantezele a doua și a treia sunt însă nule, potrivit ecuațiilor (3) și (2) iar, pe de altă parte, cum

$$M \frac{d^2 b}{dt^2} = \sum Y \quad \text{și} \quad M \frac{d^2 c}{dt^2} = \sum Z$$

rezultă, că din toată dezvoltarea de mai sus nu rămâne decât ecuația

$$(4) \quad \sum m \left( y' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) = \sum (y' Z - z' Y)$$

sau

$$\frac{d}{dt} \sum m \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) = \sum (y' Z - z' Y).$$

Așa dar *teorema momentelor cantităților de mișcare se aplică, în cazul particular de mișcare relativă ce considerăm, întocmai ca și în mișcarea absolută, fără a fi nevoie de a alătura vre-o forță aparentă, forțelor reale care lucrează asupra sistemului.*

**Notă.** Puteam proceda și altfel pentru găsirea ecuației (4) și anume, alăturând forței reale  $X, Y, Z$  forțele aparente care se reduc la forța de inerție de antrenare, și scriind apoi direct ecuațiile momentelor cantităților de mișcare în sistemul  $G x' y' z'$  considerat ca fix.

Cum accelerația punctului  $G$ , are ca componente  $\frac{d^2 a}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 b}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 c}{dt^2}$ , forța de inerție de antrenare a punctului  $M$  va avea ca componente  $-m \frac{d^2 a}{dt^2}$ ,  $-m \frac{d^2 b}{dt^2}$ ,  $-m \frac{d^2 c}{dt^2}$  (mișcarea sistemului



mobil fiind o mișcare de translație) așa că  $Y$  se va înlocui cu  $Y - m \frac{d^2b}{dt^2}$  și  $Z$  cu  $Z - m \frac{d^2c}{dt^2}$ . Se va scrie deci ecuația

$$\sum m \left( y' \frac{d^2z'}{dt^2} - z' \frac{d^2y'}{dt^2} \right) = \sum \left[ y' \left( Z - m \frac{d^2c}{dt^2} \right) - z' \left( Y - m \frac{d^2b}{dt^2} \right) \right]$$

din care rezultă imediat ecuația (4) dacă ținem socoteală de ecuațiile (2).

c). *Teorema forțelor vii.* În mișcarea absolută, știm că punând

$$T = \sum \frac{1}{2} m v^2$$

avem:

$$(5) \quad dT = \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Să vedem ce devin cei doi membri ai acestei ecuații, când trecem la mișcarea relativă.

Să luăm mai întâi pe  $T$ . Avem

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Înlocuind pe  $x, y, z$  prin expresiunile lor (1), obținem

$$\text{(observând că } \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{dt} \text{ și } \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx'}{dt} \right)^2 + 2 \frac{da}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt}, \text{ etc.)}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m \left[ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left( \frac{db}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum m \left[ \left( \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right] \\ &+ \sum m \left( \frac{da}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{db}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt} \right). \end{aligned}$$

Ori, dacă înseamnă prin

$V$  viteza centrului de greutate,

$M$  masa sistemului,

$T'$  forța vie în mișcare relativă considerată,



vedem că prima paranteză poate fi înlocuită cu  $\frac{1}{2} M V^2$ , iar paranteza a doua cu  $T'$ . Cât despre paranteza a treia, aceasta este nulă, potrivit ecuațiilor (3). Așa dar

$$(6) \quad T = \frac{1}{2} M V^2 + T'$$

egalitate care corespunde următoarei teoreme, cunoscută sub numele de *teorema lui Koenig*: *Forța vie a unui sistem este egală cu forța vie a masei totale concentrată în centrul de greutate, plus forța vie a sistemului în mișcarea raportată la axe paralele axelor fixe, duse prin centrul de greutate.*

Să ne ocupăm acum de membrul al doilea al egalității (5). Transformațiunea de coordonate ne dă

$$\Sigma (X + dx Y dy + Z dz) = da \Sigma X + db \Sigma Y + dc \Sigma Z + \\ \Sigma (X dz' + Y dy' + Z dz').$$

Însă, mișcarea centrului de greutate este aceea a unui punct de masă  $M$ , supus unei forțe ale cărei componente sunt  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$ . Aplicând acestui punct teorema forțelor vii, avem

$$d \frac{1}{2} M V^2 = da \Sigma X + db \Sigma Y + dc \Sigma Z$$

deci

$$(7) \quad \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = d \frac{1}{2} M V^2 + \\ \Sigma (X dx' + Y dy' + Z dz').$$

Înlocuind acum în ecuația (5) pe  $T$  prin expresia (6) și pe  $\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$  prin expresia (7) obținem, ca încheiere,

$$(8) \quad d T' = \Sigma (X dx' + Y dy' + Z dz').$$

Așa dar, *ecuația forțelor vii subsistă în mișcarea relativă ce am considerat, fără a fi nevoie de a introduce vre o forță aparentă pe lângă forțele reale care lucrează asupra sistemului.*

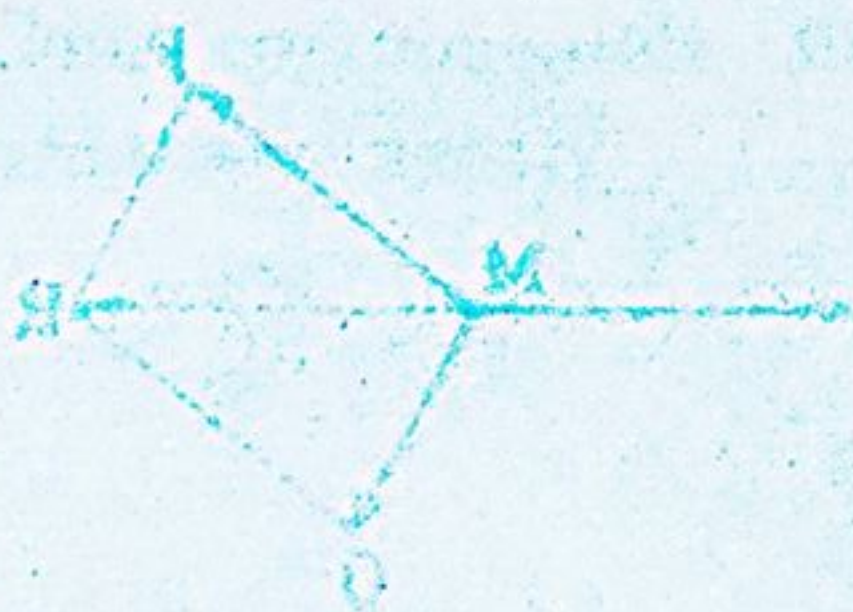
**Notă.** Ca și pentru teorema momentelor cantităților de mișcare, puteam scrie direct ecuația forțelor vii în sistemul



mobil  $G x' y' z'$ , alăturând forței direct aplicate  $X, Y, Z$  forța de inerție de antrenare  $-m \frac{d^2 a}{dt^2}, -m \frac{d^2 b}{dt^2}, -m \frac{d^2 c}{dt^2}$ . Se obține procedând astfel

$$d T' = \sum \left[ \left( X - m \frac{d^2 a}{dt^2} \right) dx' + \left( Y - m \frac{d^2 b}{dt^2} \right) dy' + \left( Z - m \frac{d^2 c}{dt^2} \right) dz' \right].$$

Desvoltând membrul al doilea, și ținând socoteală de ecuațiile (3), dăm imediat peste ecuația (8).





## II. MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE CU LEGĂTURI.

### I. ECUAȚIILE GENERALE ALE MIȘCĂRII PUNCTELOR UNUI SISTEM CU LEGĂTURI.

1. **Aplicațiunea principiului lui d'Alembert.** Să presupunem acum că între punctele sistemului material există anumite legături. Înlocuind legăturile prin forțe, putem considera fiecare

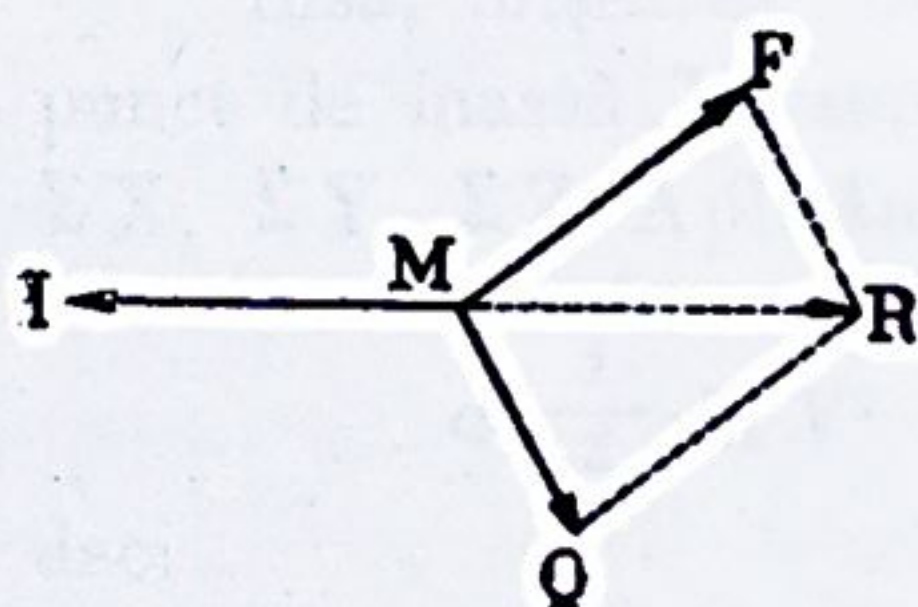


Fig. 153

punct M ca mișcându-se liber sub acțiunea unei singure forțe R, zisă *forță motrice* sau *forță efectivă* și rezultând din compunerea rezultantei F a forțelor direct aplicate cu rezultanta Q a forțelor de legătură.

Ori, potrivit principiului lui *d'Alembert*, dacă în mod fictiv introducem *forța de inerție* I, care este egală și direct opusă rezultantei R a forțelor F și Q, punctul este în echilibru sub acțiunea celor 3 forțe F, Q și I, așa că aplicațiunea teoremei *travaliului virtual* la întregul sistem, pentru deplasările compatibile cu legăturile, ne dă, socotind forțele I ca forțe direct aplicate:

$$(1) \quad \Sigma [F \delta s \cos (F, \delta s) + I \delta s \cos (I, \delta s)] = 0$$

ecuație, în care nu intră forțele de legătură și unde  $\delta s$  reprezintă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile în momentul considerat.



Putem privi ecuația (1) ca conținând în mod implicit toate legile echilibrului și mișcării sistemelor materiale.

Astfel, teorema travaliului virtual, care ne dă toate legile de echilibru, ne permite, asociindu-i principiul lui d'Alembert, să aducem orice chestiune de mișcare la o chestiune de echilibru.

*Exemplu.* Știm că pentru ca un solid care are un ax fix să fie în echilibru, este necesar și suficient ca suma momentelor forțelor direct aplicate, în raport cu axul fix, să fie nulă, și această condiție rezultă din aplicația ecuației generale

$$\sum F \delta s \cos (F, \delta s) = 0.$$

Aplicația ecuației (1) ne va conduce deci la concluzia, că ecuația mișcării solidului în jurul axului fix se va obține, asociând forțelor direct aplicate forțele de inerție și scriind că suma momentelor ambelor categorii de forțe în raport de axul fix este nulă.

Vom da mai jos această ecuație.

**2. Ecuațiile mișcării punctelor.** Cum componentele forței de inerție a unui punct, pe trei axe cordonate, sunt:

$$-m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2z}{dt^2}$$

travaliul ei virtual este

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x - m \frac{d^2y}{dt^2} \delta y - m \frac{d^2z}{dt^2} \delta z$$

asa că avem

$$\sum I \delta s \cos (I, \delta s) = - \sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right).$$

Cum pe de altă parte, însemnând prin  $X, Y, Z$  componentele forței  $F$ , avem egalitatea:

$$\sum F \delta s \cos (F, \delta s) = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

rezultă că ecuația (1) se poate scrie

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right)$$



sau, sub formă mai strânsă,

$$(2) \sum \left[ \left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

$\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  corespunzând la deplasări virtuale compatibile cu legăturile în momentul  $t$ .

Această ecuație, ca și ecuația (1) cu care este echivalentă, poate fi privită ca *ecuația generală a Mecanicii*.

În particular, din ecuația (2) rezultă, că dacă cunoaștem ecuațiile de echilibru ale unui sistem cu legături, obținem imediat ecuațiile mișcării acestui sistem înlocuind în ecuațiile de echilibru componentele  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  prin

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Astfel, revenind asupra exemplului de mai sus, dacă un solid are două puncte fixe, știm, că luând ca ax  $Oz$  dreapta care unește cele două puncte, condiția de echilibru este

$$\sum (xY - yX) = 0.$$

Ecuația mișcării solidului în jurul axului fix, va fi deci

$$\sum \left[ x \left( Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) - y \left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right] = 0$$

care se poate scrie

$$\sum m \left( x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX)$$

semnul  $\Sigma$  din membrul întâi referindu-se absolut la toate punctele sistemului, pe când  $\Sigma$  din membrul al doilea privește numai punctele unde se găsesc aplicate forțe.

Cu privire la ecuația generală (2) este esențial de remarcat că deoarece aplicațiunea teoremei travaliului virtual presupune punctele ca fiind în echilibru în momentul  $t$ , variațiile  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  corespund la deplasările compatibile cu legăturile din momentul  $t$  considerat ca fix. Rezultă, că dacă ecuațiile de legătură conțin în mod explicit pe  $t$ , se va considera  $t$  constant când se diferențiază aceste ecuații în scopul determinării relațiilor dintre variațiile  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .



Fie astfel:

$$(2) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0$$

ecuațiile de legătură, funcții de cele  $3n$  coordonate ale punctelor și de timpul  $t$ .

Diferențierea lor ne dă

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z \right) = 0 \\ \sum \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z \right) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum \left( \frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z \right) = 0. \end{array} \right.$$

Din aceste ecuații, în număr de  $k$ , putem trage valorile a  $k$  variații în funcție de celelalte  $3n - k$ ; substituindu-le în ecuația (2) va rezulta o ecuație coprinzând  $3n - k$  variații arbitrare și coeficienții acestor variații vor trebui egalați cu zero.

Se va obține astfel un număr de  $3n - k$  ecuații, care împreună cu cele  $k$  ecuații (3) vor constitui un grup de  $3n$  ecuații la care trebuie să satisfacă coordonatele punctelor sistemului. Va rămâne să putem integra ecuațiile diferențiale obținute.

**3. Metoda multiplicatorilor.** Putem efectua eliminarea variațiilor prin metoda multiplicatorilor (*Lagrange*).

În acest scop, să înmulțim la rând ecuațiile (4) cu  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  și să adunăm rezultatele astfel obținute cu ecuația (2); obținem

$$\left. \begin{array}{l} \sum \left( X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x \\ + \sum \left( Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y \\ + \sum \left( Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \end{array} \right\} = 0.$$

Ori, putem profita de nedeterminarea celor  $k$  multiplicatori



$\lambda$  pentru a anula coeficienții a  $k$  dintre cele  $3n$  variații care figurează în ecuație. Rămân atunci  $3n-k$  variații și acestea fiind arbitrare, coeficienții lor vor trebui egalați cu zero. În definitiv, suntem conduși de a anula pe toți cei  $3n$  coeficienți ai ecuației de mai sus. Va rezulta astfel un sistem de  $3n$  ecuații, dintre cari trei oarecare au forma următoare:

$$(5) \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \end{cases}$$

Cele  $3n$  ecuații împreună cu cele  $k$  ecuații de legătură (3) formează împreună un sistem de  $3n+k$  ecuații la care trebuie să satisfacă cele  $3n+k$  necunoscute, constituite de cele  $3n$  coordonate și cei  $k$  multiplicatori  $\lambda$ .

**4. Calculul forțelor de legătură.** Metoda multiplicatorilor dă și forțele de legătură. În adevăr ecuațiile (5) sunt acelea ale mișcării unui punct liber supus forței direct aplicate  $X, Y, Z$  și unei forțe având ca componente pe cele 3 axe

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \\ & \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \\ & \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \end{aligned}$$

Aceste expresiuni sunt deci componentele forței totale de legătură care lucrează asupra punctului  $x, y, z$ .

Termenii

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

reprezintă componentele forței de legătură care lucrează asupra punctului considerat în virtutea legăturii  $f_1 = 0$  și deasemenea pentru termenii următori.

**5. Aplicațiunea principiului lui d'Alembert la sistemele de puncte libere.** Plecând dela ecuația generală (2) putem regăsi



toate teoremele pe care le-am stabilit pentru un sistem de puncte libere.

a). Fie în adevăr  $n$  numărul de puncte libere. Ne existând legături, cele  $3n$  variații  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  sunt complet arbitrare, așa că toți coeficienții lor trebuiesc egalați cu zero. Se obțin astfel ecuațiile

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

scrise pentru toate cele  $n$  puncte. Obținem deci ecuațiile diferențiale ale mișcării tuturor punctelor.

b). Să luăm ca deplasare virtuală o translație paralelă cu axul  $Ox$ . Atunci toți  $\delta x$  sunt egali între ei iar  $\delta y$  și  $\delta z$  sunt nuli. Ecuația (2) ne dă în consecință

$$\delta x \sum \left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

adică

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X$$

și aceasta este una din ecuațiile din care rezultă teorema cantităților de mișcare proiectate pe un ax (sau teorema mișcării centrului de greutate).

c). Să luăm ca deplasare virtuală o rotație în jurul axului  $Ox$ .

În această rotație, un punct oarecare  $M$  descrie un arc elementar de cerc, identic cu acela pe care îl descrie proiecția sa  $M'$  pe planul  $yOz$ . Ori, avem pe figură,

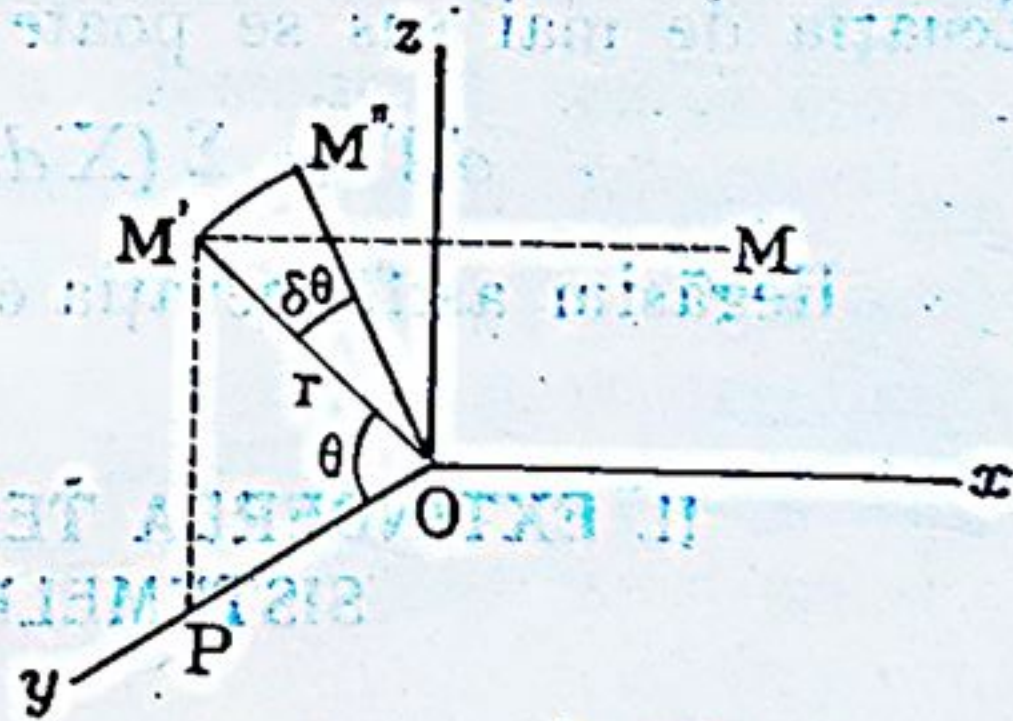


Fig. 154

$$OP = y = r \cos \theta, \quad M'P = z = r \sin \theta$$

deci

$$\delta y = -r \sin \theta \delta \theta = -z \delta \theta, \quad \delta z = r \cos \theta \delta \theta = y \delta \theta$$

$\delta \theta$  fiind deplasarea unghiulară. Înlocuind pe  $\delta y$  și  $\delta z$  prin aceste valori, și cum  $\delta x = 0$ , ecuația (2) devine

$$\delta \theta \sum \left[ \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) (-z) + \left( Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) y \right] = 0$$



adică

$$\sum m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY).$$

Această ecuație este una dintre acelea ce ne-au servit la stabilirea teoremei momentelor cantităților de mișcare (sau a ariilor).

d). Însfârșit să luăm deplasările virtuale  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  egale cu deplasările efective  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Ecuația (2) ne va da

$$\sum m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Ori, dacă însemnăm prin  $T$  forța vie a sistemului, avem

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

și, în consecință, prin diferențiere,

$$dT = \sum m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right) dt = \\ \sum m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right).$$

Ecuația de mai sus se poate deci scrie

$$dT = \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Regăsim astfel ecuația care corespunde teoremei forțelor vii.

## II. EXTINDEREA TEOREMELOR GENERALE LA SISTEMELE CU LEGĂTURI.

1. Când un sistem material este cu legături, putem întotdeauna să înlocuim legăturile prin forțe și să tratăm apoi sistemul ca un sistem de puncte libere. Nimic nu ne împiedecă atunci de a-i aplica cele 3 teoreme generale; este însă interesant de a vedea dacă forțele de legătură vor apărea sau nu totdeauna în aceste teoreme, căci ele sunt în general necunoscute.

În cele două dintâi teoreme, am spus că forțele interioare nu figurează pentru simplul motiv că ele sunt egale două câte două și direct opuse; când se va întâmpla la fel cu forțele de legătură, nici acestea nu vor figura în ecuații. Așa spre exem-



plu dacă unele puncte ale sistemului sunt obligate de a rămâne la distanțe invariabile unele de altele, forțele de legătură sunt două câte două egale și direct opuse și putem aplica cele două teoreme generale fără a ne ocupa de legături.

Însă, dacă va fi vorba de mișcări de puncte pe curbe sau suprafețe, forțele care pot înlocui acțiunile acestor curbe și suprafețe intră în categoria forțelor exterioare obișnuite și trebuie a se ține seama de ele.

Așa dar, în fiecare caz, când voim a aplica unui sistem cu legături cele două dintâi teoreme generale, va trebui să examinăm la ce anume forțe corespund legăturile; dacă aceste forțe intră în categoria forțelor interioare, nu vom ține seama de ele; dacă din potrivă lucrează ca forțe exterioare, le vom introduce în ecuații.

2. Să trecem acum la *teorema forțelor vii*. Potrivit celor văzute la stabilirea teoremei travaliului virtual, suma travaliurilor virtuale a forțelor de legătură este nulă pentru toate deplasările virtuale compatibile cu legăturile în momentul considerat. Dacă prin urmare, deplasarea elementară pe care o ia realmente sistemul, și căreia i se aplică teorema forțelor vii, este în fiecare moment compatibilă cu legăturile, nu vom avea a ține seamă de forțele de legătură în aplicațiunea teoremei. Pentru ca aceasta să aibă însă loc, condiția necesară și suficientă este ca *ecuațiile de legătură să nu conțină în mod explicit timpul  $t$* .

În adevăr, deplasările virtuale  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , compatibile cu legăturile în momentul  $t$ , satisfac ecuațiilor de forma

$$\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \right) = 0$$

care se obțin diferențiând ecuațiile de legătură, în presupunerea că  $t$  rămâne constant, pe când deplasările reale  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  pe care le ia sistemul în timpul  $dt$ , satisfac ecuațiilor de forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = 0.$$



Deplasările elementare reale nu intră deci în categoria deplasărilor virtuale compatibile cu legăturile din momentul  $t$ , decât dacă  $\frac{\partial f}{\partial t}$  este nul ori care ar fi  $t$ , adică dacă ecuațiile de legătură nu conțin pe  $t$  în mod explicit.

Ca exemplu de ecuații de legătură conținând în mod explicit timpul  $t$ , menționăm pe acelea care ar exprima că unele puncte sunt obligate de a rămâne pe linii sau suprafețe care schimbă în fiecare moment de formă sau de poziție, sau de amândouă în același timp. Astfel, cazul unui punct obligat de a rămâne pe un cerc a cărui rază crește neconținut și al căruia centru este fix sau mobil.

Aşa dar, în definitiv: Când legăturile sunt independente de timp, teorema forţelor vii se aplică ţinând socoteală numai de forţele interioare şi exterioare iar nu şi de cele de legătură.

### III. ECUATIILE LUI LAGRANGE.

1. Să considerăm un sistem de  $n$  puncte materiale între coordonatele cărora există  $k$  ecuații de legătură, putând conține pe  $t$ ,

$$(1) \begin{cases} f_1(t; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = 0 \\ f_2(t; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = 0 \\ \dots \\ f_k(t; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = 0 \end{cases}$$

Din aceste ecuații putem trage valorile a  $k$  cordonate în funcție de celelalte  $3n-k$ . Fie  $3n-k = r$ ; să scriem în mod arbitrar  $r$  noi ecuații între cele  $3n$  cordonate,

$$(2) \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = q_1 \\ F_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = q_2 \\ \vdots \\ F_r(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = q_r. \end{cases}$$



Ecuatiile (1) și (2) ne permit a exprima pe cele 3  $n$  coordonate în funcție de  $t$  și de  $r$  parametri arbitrari  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , sub forma:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, q_1, q_2, \dots, q_r) \\ y = \psi(t, q_1, q_2, \dots, q_r) \\ z = \theta(t, q_1, q_2, \dots, q_r). \end{cases}$$

Este evident că ecuațiile de legătură (1) se găsesc identic satisfăcute dacă înlocuim în ele pe  $x, y, z$  prin aceste expresiuni (3).

Dacă am cunoaște expresiunile parametrilor,  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , în funcție de  $t$ , ecuațiile mișcării fiecăruia din puncte ar fi cunoscute și deci problema mișcării sistemului rezolvată.

**Lagrange** a dat o metodă elegantă pentru a forma imediat ecuațiile diferențiale la care satisfac parametrii  $q$ .

**9. Observări preliminare.** În tot ce urmează, trebuie a se deosebi cu atențiune derivatele *totale* de derivatele *parțiale*.

Fie  $x$  o funcție de  $t$  și de parametrii  $q$  considerați ei însăși ca funcții de  $t$ ; vom însemna

1° prin  $x'$  sau  $D_t x$ , derivata totală a lui  $x$  în raport de  $t$ ;

2° prin  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial q_r}$ , derivatele parțiale ale lui  $x$  în raport de cantitățile  $t, q_1, q_2, \dots, q_r$  considerate ca variabile independente.

Cu aceste notațiuni, avem, luând derivatele totale ale cantităților  $x, y, z$  puse sub forma (3):

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_r} q'_r \\ y' = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_r} q'_r \\ z' = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_r} q'_r. \end{cases}$$

În aceste egalități, fiecare din derivatele parțiale ale lui  $x, y, z$  este funcție de  $t, q_1, q_2, \dots, q_r$ . Egalitățile determină în consecință pe  $x', y', z'$  în funcție de

$t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ .



Să stabilim acum două serii de identități de care vom avea nevoie în ceea ce va urma.

În acest scop să însemnăm respectiv prin  $q$  și  $q'$  una oarecare din cantitățile  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ . Ecuațiile (4) ne dau imediat, observând că membrii „ai doilea” sunt funcții lineare de  $q'$ :

$$(5) \quad \frac{\partial x'}{\partial q'} = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q'} = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q'} = \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Acestea constituiesc prima serie de identități ce voiam a stabili.

Tot din ecuațiile (4) deducem

$$\frac{\partial x'}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q} q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_r \partial q} q'_r$$

însă, pe de altă parte, cum  $\frac{\partial x}{\partial q}$  este funcție de  $t, q_1, q_2, \dots, q_r$ , avem direct, după regula generală a derivării,

$$[D_t] \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial q_r} q'_r.$$

Așa dar

$$(6) \quad \frac{\partial x'}{\partial q} = D_t \frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q} = D_t \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q} = D_t \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Acestea constituiesc seria a doua de identități de care vom avea nevoie.

**10. Ecuațiile lui Lagrange.** Metoda multiplicatorilor dă ca ecuații diferențiale pentru mișcarea unui sistem cu legături, ecuații de forma:

$$m D_t x' = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x}$$

$$m D_t y' = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}$$

$$m D_t z' = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}.$$

Să înmulțim respectiv aceste ecuații cu  $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$  și



dând coordonatelor  $x, y, z$  toți indicii dela 1 la  $n$  iar pentru  $q$  considerând unul singur dintre indicii de la 1 la  $r$ , să adunăm toate ecuațiile obținute.

Vom observa, că în rezultat, termenii care conțin în factor pe  $\lambda$  de un indice oarecare, sunt nuli. În adevăr, termenul care se găsește multiplicat spre exemplu cu  $\lambda_1$  este

$$\sum \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) \text{ adică } \frac{\partial f_1}{\partial q}.$$

Ori, ecuația de legătură  $f_1 = 0$  fiind identic satisfăcută când înlocuim în ea coordonatele  $x, y, z$  prin expresiile lor (3), rezultă că  $\frac{\partial f_1}{\partial q}$  este nul, ori care ar fi indicele lui  $q$ .

Dacă punem prin urmare

$$(7) \quad \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

rezultatul în chestiune se reduce la egalitatea

$$\sum m \left( D_t x' \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + D_t y' \cdot \frac{\partial y}{\partial q} + D_t z' \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

care este echivalentă cu cea următoare

$$D_t \sum m \left( x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q} \right) - \sum m \left( x' \cdot D_t \frac{\partial x}{\partial q} + y' \cdot D_t \frac{\partial y}{\partial q} + z' \cdot D_t \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

și aceasta, potrivit identităților (5) și (6) se poate scrie

$$(8) \quad D_t \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right) - \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right) = Q.$$

Să considerăm acum forța vie a sistemului

$$T = \frac{1}{2} \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Înlocuind pe  $x', y', z'$  prin valorile (4),  $T$  devine o funcție de

$$t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r$$



așa că avem

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \sum m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right).$$

Rezultă că ecuația (8) se poate scrie pur și simplu

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Dând lui  $q$  și lui  $q'$  toți indicii dela 1 la  $r$ , obținem următorul sistem de  $r$  ecuații diferențiale

$$(9) \quad \begin{cases} D_t \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ D_t \frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \dots \\ D_t \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \end{cases}$$

la care trebuie să satisfacă necunoscutele  $q_1, q_2, \dots, q_r$ .

*Acestea sunt ecuațiile lui Lagrange.*

Din cele de mai sus rezultă, că pentru a forma aceste ecuații se va proceda în felul următor:

1°. Se vor pune cele  $3n$  coordonate  $x, y, z$  sub forma

$$x = \varphi(t; q_1, q_2, \dots, q_r), \quad y = \psi(t; q_1, q_2, \dots, q_r), \quad z = \theta(t; q_1, q_2, \dots, q_r).$$

2°. Se vor efectua derivările parțiale

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}; \dots; \frac{\partial x}{\partial q_r}, \frac{\partial y}{\partial q_r}, \frac{\partial z}{\partial q_r}.$$

3°. Se vor forma expresiile

$$Q_1 = \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right); \dots; Q_r = \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q_r} + Y \frac{\partial y}{\partial q_r} + Z \frac{\partial z}{\partial q_r} \right).$$

4°. Se vor calcula derivatele totale ale coordonatelor  $x, y, z$  în funcție de timp

$$x' = \varphi'(t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r)$$

$$y' = \psi'(t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r)$$

$$z' = \theta'(t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r)$$



Dacă (ceea ce este mai rar)  $X, Y, Z$  sunt funcții și de  $x', y', z'$ , se vor introduce aceste valori în expresiile  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ .

5°. Se va forma

$$T = \sum \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

obținându-se

$$T = F(t; q_1, q_2, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r).$$

6°. Se va calcula

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q'_r} \text{ apoi } D_t \frac{\partial T}{\partial q'_1}, D_t \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots, D_t \frac{\partial T}{\partial q'_r} \text{ și } \frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_r}.$$

7°. Se vor scrie ecuațiile lui Lagrange, care vor trebui integrate. Valorile:  $q_1, \dots, q_r$  se vor purta în expresiile cordonatelor  $x, y, z$  dela numărul 1°.

**11. Observații finale.** 1) Componentele  $X, Y, Z$  fiind în general funcții de  $t$ , de cele  $3n$  cordonate  $x, y, z$  și cele  $3n$  prime derivate  $x', y', z'$ , devin, prin aplicațiunea formulelor (3) și (4), funcții de  $t$ , de  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ . În consecință, cantitățile  $Q$  definite prin formulele (7) sunt funcții cunoscute de aceleași variabile.

Pe de altă parte, potrivit expresiilor (4), forța vie

$$T = \frac{1}{2} \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

este o funcție de gradul al doilea de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ . Derivata  $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$  este prin urmare o funcție lineară de aceste variabile.

Operația  $D_t$  introduce apoi derivatele de ordinul al doilea  $q''$ .

Așa dar, în definitiv, ecuațiile (9) sunt  $r$  ecuații diferențiale simultanee de ordinul al 2-lea, determinând  $r$  cantități  $q_1, q_2, \dots, q_r$  în funcție de  $t$  și de  $2r$  constante arbitrare.

2) Din egalitatea

$$Q_1 = \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

deducem

$$Q_1 \delta q_1 = \sum \left( X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1.$$

Membrul al doilea al acestei egalități reprezintă **travaliul**



forțelor direct aplicate, într'o deplasare virtuală unde toți parametri  $q$  rămân constanți, afară de  $q_1$ .

Așa dar: Fie care dintre cantitățile  $Q$ , este câtul prin  $\delta q$  respectiv, al travaliului forțelor direct aplicate într'o deplasare virtuală unde nu variază decât  $q$ .

3) Să înmulțim ecuațiile (9) la rând, cu  $\delta q_1, \dots, \delta q_r$  și apoi să le adunăm. Obținem

$$(\alpha) \quad \sum \left( D_t \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q = \sum Q \delta q.$$

Ori,  $\sum Q \delta q$  reprezintă travaliul virtual  $\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$  al forțelor direct aplicate; deci, comparând egalitatea ( $\alpha$ ) cu ecuația generală a Dinamiceii

$$(\beta) \quad \sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

conchidem că ecuația ( $\alpha$ ) reprezintă însăși ecuația ( $\beta$ ) în care s'a înlocuit totul în funcție de cei  $r$  parametri  $q^1$ .

4) Dacă forțele direct aplicate admit o funcție de forțe  $U$ , vom avea

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

și formula (7) devine

$$Q = \sum \left( \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) = \frac{\partial U}{\partial q}.$$

În consecință ecuațiile (9) se scriu

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_1}$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'_2} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_2}$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_r}$$

<sup>1)</sup> Aceasta rezultă de altfel și direct din simpla observație că ori transformăm ecuațiile mișcării puse sub forma multiplicatorilor lui Lagrange, ori transformăm prin același procedeu ecuația generală a Dinamiceii ( $\beta$ ) din care se deduc ecuațiile metodei multiplicatorilor, rezultatul nu poate fi decât același.



#### IV. ECUAȚIILE LUI HAMILTON.

12. Ecuațiile lui Lagrange (9), care sunt de ordinul al 2-lea, pot deveni de ordinul 1<sup>u</sup> dacă se consideră  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$  ca  $r$  noi necunoscute definite prin ecuațiile

$$(10) \quad D_t q_1 = q'_1, \quad D_t q_2 = q'_2, \quad \dots, \quad D_t q_r = q'_r.$$

Se obține atunci un sistem de  $2r$  ecuații diferențiale de ordinul 1<sup>u</sup> cuprinzând primele derivate ale funcțiilor  $q$  și  $q'$ .

Printr'o anumită schimbare de variabile, *Hamilton* a înlocuit acest sistem printr'un sistem de ecuații zise *canonice*, al cărora rol este fundamental în Mecanica analitică.

Vom presupune că *legăturile sunt independente de timp* și că *forțele direct aplicate admit o funcție de forțe*<sup>1)</sup>.

13. Legăturile fiind independente de timp, cordonatele  $x, y, z$  nu mai conțin în mod explicit pe  $t$ . În consecință, expresiile (4) ale derivatelor  $x', y', z'$  au primii lor termeni  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$  nuli și sunt atunci funcții omogene de gradul 1<sup>u</sup> în raport de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$  așa că *forța vie T este funcție omogenă de gradul al 2-lea în raport de aceleași variabile*. Ca urmare, derivatele parțiale  $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q'_r}$  sunt funcții liniare de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ .

Să punem

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$$

și rezolvând acest sistem de ecuații în raport de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$  să purtăm valorile aflate în ecuațiile (10) și (9). Să vedem ce devin aceste ecuații prin asemenea transformare.

Forța vie  $T$  și cantitățile  $Q$  care erau funcții de variabilele

$$\begin{array}{c} q_1, q_2, \dots, q_r \\ q'_1, q'_2, \dots, q'_r \end{array}$$

<sup>1)</sup> Transformarea lui Hamilton presupune că componentele forțelor direct aplicate sunt derivatele parțiale în raport de cordonate ale unei funcții  $U$  de cordonate și de timp, sau că există o funcție de forțe  $U$  care depinde atunci numai de cordonate iar nu și de timp. — Cazul cel mai interesant pentru aplicațiuni este acela când legăturile sunt independente de timp iar forțele direct aplicate admit o funcție de forțe.



vor deveni funcții de

$$q_1, q_2, \dots, q_r \\ p_1, p_2, \dots, p_r.$$

Cum derivatele lui  $T$  în raport de variabilele  $q$  nu sunt aceleași când  $T$  este funcție de  $q$  și  $q'$  sau când este funcție de  $q$  și  $p$ , vom însemna pe cele dintâi prin  $\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)$  iar pe celelalte prin  $\frac{\partial T}{\partial q}$ .

Ori,  $T$  fiind funcție omogenă de gradul al 2<sup>lea</sup> în raport de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ , avem identitatea

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} \cdot q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \cdot q'_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q'_r} \cdot q'_r$$

și prin urmare, potrivit egalităților (11),

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \dots + p_r q'_r$$

ceea ce se poate scrie

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \dots + p_r q'_r - T.$$

Să diferențiem ambii membri ai acestei ecuații, considerând pe  $T$  din membrul al doilea ca funcție de variabilele  $q$  și  $q'$ . Obținem

$$\begin{aligned} dT &= p_1 dq'_1 + p_2 dq'_2 + \dots + p_r dq'_r \\ &+ q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \dots + q'_r dp_r \\ &- \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) dq_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) dq_2 - \dots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right) dq_r \\ &- \frac{\partial T}{\partial q'_1} dq'_1 - \frac{\partial T}{\partial q'_2} dq'_2 - \dots - \frac{\partial T}{\partial q'_r} dq'_r. \end{aligned}$$

Însă, potrivit egalităților (11), termenii liniei a 4<sup>a</sup> distrug pe aceia ai liniei 1<sup>a</sup>; așa dar

$$(12) \quad dT = q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \dots + q'_r dp_r \\ - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) dq_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) dq_2 - \dots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right) dq_r.$$

Pe de altă parte, dacă considerăm pe  $T$  ca funcție de  $p$  și  $q$ , avem

$$(13) \quad dT = \frac{\partial T}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial T}{\partial p_2} dp_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial p_r} dp_r \\ + \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_r} dq_r.$$



Din comparația celor două expresiuni (12) și (13) ale diferențialei totale  $dT$ , rezultă

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q'_1, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q'_2, \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_r} = q'_r$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right), \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right)$$

ecuații ce se pot scrie, prin prescurtare,

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial p} = q' \\ \frac{\partial T}{\partial q} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) \end{cases}$$

Ca concluzie finală, potrivit formulelor (11) și (14), ecuațiile (10) și (9) dobândesc, prin transformarea efectuată, cele două forme

$$(15) \quad \begin{cases} D_t q = \frac{\partial T}{\partial p} \\ D_t p + \frac{\partial T}{\partial q} = Q \end{cases}$$

Dând literilor  $p$ ,  $q$ ,  $Q$ , în același timp, toții indicii de 1 la  $r$ , vom obține un sistem de  $2r$  ecuații diferențiale simultanee la care trebuie să satisfacă cele  $2r$  necunoscute  $p$  și  $q$ .

14. Să presupunem, pe de altă parte, că forțele direct aplicate admit o funcție de forțe  $U$ . Vom avea atunci, după cum s'a arătat la finele capitolului precedent,

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q}$$

asa că a doua din ecuațiile (15) devine

$$D_t p + \frac{\partial (T-U)}{\partial q} = 0.$$

Însfârșit, dacă punem

$$T - U = H$$

și dacă observăm că  $U$  fiind funcție numai de coordonate nu



conține variabilele  $p$ , avem  $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$ , și ecuațiile (15) se vor putea scrie

$$D_t q = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$D_t p = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

ceea ce este echivalent cu

$$(16) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}.$$

Dând literilor  $p$  și  $q$  indicii 1, 2, ...,  $r$  se obține următorul sistem de  $2r$  ecuații:

$$\begin{array}{l|l} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} & \frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_r} \end{array}$$

Aceste ecuații date de *Hamilton* au primit numele de *ecuații canonice ale mișcării*. Ele prezintă sub forma cea mai generală ecuațiile unei probleme de Mecanică, în care integrala forțelor vii își are aplicațiune (legături independente de timp și funcție de forțe). Se vede, că două probleme de acest gen nu diferă una de alta decât prin numărul variabilelor și forma funcției  $H$ .

În mod practic, pentru formarea ecuațiilor lui *Hamilton* se va proceda în felul următor:

1° Se formează

$$T = F(q_1, \dots, q_r; q'_1, q'_2, \dots, q'_r)$$

ca pentru ecuațiile lui *Lagrange*.

2° Se calculează derivatele  $\frac{\partial T}{\partial q'}$  și se scriu ecuațiile

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \dots, \frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$$

care se rezolvă în raport de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ .



3° Valorile  $q'$  astfel determinate se introduc în expresia forței vii  $T$ , care va deveni o funcție de  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și  $p_1, \dots, p_r$ .

4° Se va exprima funcția de forțe  $U$  în funcție de variabilele  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și se va forma diferența  $H = T - U$ .

5° Se vor calcula derivatele

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_r}; -\frac{\partial H}{\partial q_1}, -\dots, -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

și se vor scrie ecuațiile lui Hamilton care se vor integra.

**15. Notă.** Plecând dela ecuațiile (16) putem regăsi integrala forțelor vii. În adevăr, potrivit acestor ecuații, avem

$$\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} = 0.$$

Adunând cele  $r$  asemenea ecuații, ce se obțin dând variabilelor  $p$  și  $q$  indicii  $1, 2, \dots, r$ , găsim

$$D_t H = 0 \text{ adică } H = \text{const.}$$

Ori,  $H = T - U$  sau  $H = T + V$ , însemnând prin  $V$  potențialul. Regăsim astfel următoarea teoremă: *Când legăturile sunt independente de timp și când forțele direct aplicate admit un potențial, suma forței vii și a potențialului rămâne constantă pe tot timpul mișcării.*

## V. TEOREME ASUPRA ECHILIBRULUI SISTEMELOR MATERIALE. <sup>1)</sup>

Teoremele care urmează sunt referitoare la sistemele supuse la legături independente de timp și solitate de forțe care admit o funcție de forțe.

**16. Teorema I.** *Ori ce poziție a sistemului, pentru care funcția de forțe este maximă sau minimă, este o poziție de echilibru.*

Fie, în adevăr,  $U(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n)$  funcția de forțe și  $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_k = 0$  ecuațiile de legătură.

Dacă un sistem de valori  $(x, y, z)$  face pe  $U$  maxim sau

<sup>1)</sup> În mod logic, chestiunile de echilibru ar fi trebuit toate înglobate în Partea II-a a cursului, la capitolul *Echilibrului Sistemelor Materiale*. Chestiunile de față nu puteau fi însă așezate în acel loc, deoarece se bazează pe considerente de Dinamică a sistemelor materiale.



minim, avem după regula analitică cunoscută, pe de o parte

$$dU = 0$$

iar pe de altă parte

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \dots, \quad df_k = 0.$$

Avem, adică, următoarele ecuații la care trebuie să satisfacă variațiile cordonatelor:

$$\sum \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = 0$$

$$\sum \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) = 0$$

$$\sum \left( \frac{\partial f_k}{\partial x} dx + \frac{\partial f_k}{\partial y} dy + \frac{\partial f_k}{\partial z} dz \right) = 0$$

Ori, înlocuind pe  $dx, dy, dz$  prin  $\delta x, \delta y, \delta z$  ecuațiile acestea sunt tocmai acelea pe care le-am obține dacă am exprima că travaliul virtual al forțelor direct aplicate este nul pentru orice deplasare compatibilă cu legăturile. Ele exprimă deci condiția de echilibru a sistemului.

**17. Teorema II.** *Orice poziție a sistemului pentru care funcția de forțe este maximă, este o poziție de echilibru stabil.*

O poziție de echilibru este zisă stabilă, dacă deranjând foarte puțin sistemul din poziția de echilibru și abandonându-l apoi acțiunii forțelor, după ce mai întâi s'au imprimat punctelor sale viteze foarte mici, deplasările punctelor rămân neconținut foarte apropiate de pozițiile lor de echilibru. Cu alte cuvinte se pot determina astfel de pozițiuni vecine de pozițiile de echilibru și astfel de viteze ce să se imprime punctelor, încât deplasările acestora, sub acțiunea forțelor aplicate, să rămână cuprinse între niște limite date, oricât de mici.

Să însemnăm prin literele  $a, b, c$  afectate de indicii dela 1 la  $n$ , cordonatele punctelor în poziția de echilibru și prin literele  $\alpha, \beta, \gamma$  afectate de aceiași indici, creșterile cordonatelor  $a, b, c$ , când se trece dela poziția de echilibru la o altă po-



ziție a sistemului. Pentru această din urmă poziție, valoarea funcției de forțe poate fi pusă sub forma <sup>1)</sup>.

$U(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma; \dots) = U(a, b, c; \dots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots)$   
și, prin ipoteză,  $U(a, b, c; \dots)$  este un maximum.

Vom observa că funcția  $\varphi$  se bucură de proprietățile următoare:

1<sup>o</sup> ea tinde către zero, odată cu  $\alpha, \beta, \gamma; \dots$ ;

2<sup>o</sup> ea rămâne pozitivă când  $\alpha, \beta, \gamma; \dots$  sunt destul de mici și, în particular, când sunt mai mici decât limitele date, pe care le vom însemna prin  $l, m, n, \dots$ , în valoare absolută.

Aceasta stabilit, să deranjăm puțin sistemul din poziția sa de echilibru. Fie  $a + \alpha_0, b + \beta_0, c + \gamma_0; \dots$  noile coordonate ale punctelor și

$$U(a, b, c; \dots) - \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots)$$

noua valoare a funcției de forțe.

În această poziție, considerată ca poziție inițială, să dăm tuturor punctelor viteze foarte mici, abandonând apoi sistemul la acțiunea forțelor ce-i sunt aplicate. Sistemul se pune în mișcare; fie  $a + \alpha, b + \beta, c + \gamma; \dots$  coordonatele punctelor sale după un timp oarecare  $t$  și

$$U(a, b, c; \dots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots)$$

valoarea respectivă a funcției de forțe.

Însemnând prin  $T$  forța lui vie din acel moment și prin  $T_0$  forța vie corespunzătoare poziției inițiale, avem potrivit teoremei forțelor vie:

$$T + \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots) = T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots)$$

sau

$$(1) \quad T = T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots).$$

În funcția  $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots)$  să dăm lui  $\alpha$  valoarea sa limită  $l$  și să variem pe  $\beta, \gamma; \dots$  între limitele lor  $-m$  la  $+m$ ,  $-n$  la  $+n; \dots$  însă fără a atinge aceste limite. Să dăm apoi

<sup>1)</sup> Prin  $U(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma; \dots)$  se va înțelege  $U(a_1+\alpha_1, b_1+\beta_1, c_1+\gamma_1; \dots; a_n+\alpha_n, b_n+\beta_n, c_n+\gamma_n)$  și așa mai departe.



lui  $\alpha$  valoarea  $-l$  și să repetăm aceeași operație. În locul lui  $\alpha$  să luăm acum pe  $\beta$ , oăruia să-i dăm succesiv valorile limită  $+m$  și  $-m$ , variind celelalte litere între limitele lor fără însă a le atinge, și așa mai departe. Fie  $A$  cea mai mică dintre valorile pe care le va lua funcția  $\varphi$  prin asemenea operații.

Să alegem pozițiile inițiale ale punctelor și forța vie inițială  $T_0$  așa fel încât

$$(2) \quad T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots) < A$$

sau

$$(2) \text{ bis} \quad T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots) = A - \varepsilon$$

$\varepsilon$  fiind pozitiv.

Aceasta este totdeauna posibil căci funcția  $\varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots)$  tinde spre zero odată cu creșterile  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \dots$  și forța vie  $T_0$  tinde și ea spre zero odată cu vitezele inițiale date punctelor.

Zic, că dacă condiția (2) este îndeplinită, atunci  $\alpha, \beta, \gamma; \dots$  nu vor putea atinge limitele  $l, m, n; \dots$  luate pozitiv, sau negativ.

În adevăr, dacă una dintre ele ar atinge limita sa respectivă, atunci funcția  $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; \dots)$  ar deveni cel puțin egală cu  $A$  și atunci egalitatea (1), ținând socoteală de egalitatea (2) bis, ne-ar da

$$T = (A - \varepsilon) - A = -\varepsilon$$

adică  $T$  ar fi negativ, ceea ce e imposibil.

În concluziune, condițiile inițiale pot fi determinate așa fel ca deplasările să rămână cuprinse între limitele date, ori cât de mici ar fi acestea, și prin urmare echilibrul este stabil.

Demonstrația de mai sus a fost dată de *Lejeune-Dirichlet*. Dacă în loc de funcția de forțe  $U$ , considerăm potențialul  $V = -U$ , atunci teorema II se enunță în felul următor: *Orice poziție a sistemului pentru care potențialul este minim, este o poziție de echilibru stabil.*

**18. Aplicație la sistemele grele.** Să considerăm un sistem



cu legături independente de timp și să presupunem că acest sistem este supus numai acțiunii greutății.

Dacă  $P$  este greutatea totală și  $z$  înălțimea centrului de greutate deasupra unui plan orizontal de comparație, potențialul este  $Pz$  și toate pozițiile pentru care  $z$  este maxim sau minim sunt poziții de echilibru. În acelea unde  $z$  trece printr'un minimum, echilibrul este stabil.

Ca exemplu, să reluăm problema cu bara sprijinită pe două planuri înclinate.

$D$  fiind mijlocul barei, pozițiile de echilibru vor corespunde maximului și minimului înălțimei  $Dd$ .

Punând:  $AB=2l$ ,  $Dd=H$ ,  $IA=x$  și  $IB=x'$ , figura ne dă imediat

$$2H = Aa + Bb = x \sin \alpha + x' \sin \alpha'$$

și

$$\frac{x}{\sin(\alpha' - \theta)} = \frac{x'}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{2l}{\sin(\alpha - \alpha')}.$$

În consecință,

$$H = \frac{l}{\sin(\alpha + \alpha')} [\sin \alpha \sin(\alpha' - \theta) + \sin \alpha' \sin(\alpha + \theta)].$$

Anulând prima derivată, se obține

$$-\sin \alpha \cdot \cos(\alpha' - \theta) + \sin \alpha' \cos(\alpha + \theta) = 0$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha'}.$$

Echilibrul este ne-stabil, căci înălțimea  $H$  corespunzătoare reprezintă un maximum <sup>1)</sup>.

Dacă în loc de  $a$  se sprijini pe planuri, extremitățile barei

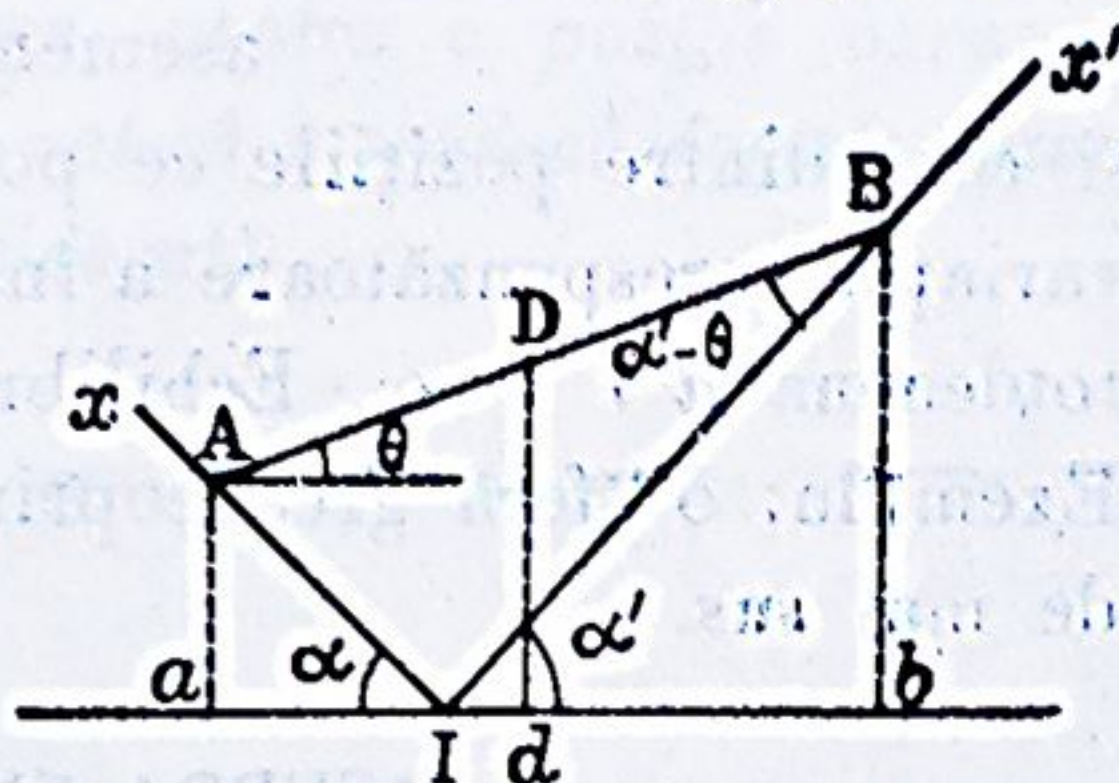


Fig. 155

<sup>1)</sup> Derivata a doua  $-\sin \theta \sin(\alpha' - \alpha)$  este negativă pentru valoarea  $\theta$  găsită. Înlocuirea în această derivată a lui  $\sin \theta$  în funcție de  $\operatorname{tg} \theta$ , ne dă, în adevăr, o fracție al căreia numitor este pozitiv iar numărătorul egal cu  $-\sin^2(\alpha' - \alpha)$  deci negativ.



sunt obligate de a rămâne pe un cerc, se obțin două poziții de echilibru AB și A'B', dintre care AB corespunde la echilibru ne-stabil, iar A'B' la un echilibru stabil.

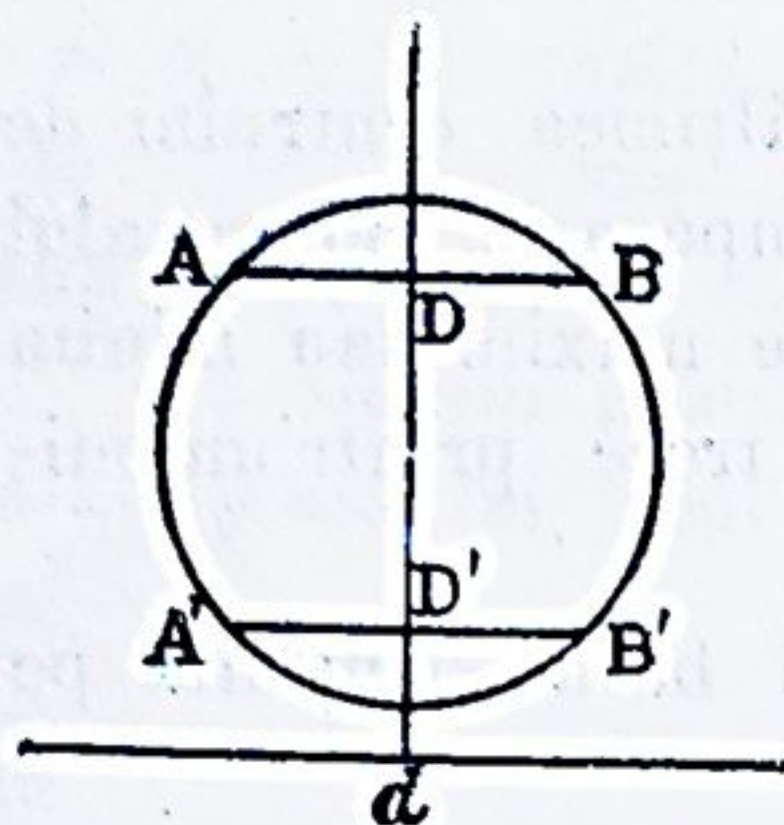


Fig. 156

**Echilibru indiferent.** Legăturile unui sistem material greu, asupra cărora nu lucrează alte forțe exterioare în afară de greutate, pot să fie astfel încât centrul de greutate al sistemului să rămână neconținut într'un același plan orizontal. Un asemenea sistem este în echilibru în ori și care dintre pozițiile ce poate lua în virtutea legăturilor, căci, variația corespunzătoare a înălțimei  $H$  fiind egală cu zero, avem totdeauna  $dV = 0$ . Echilibrul în acest caz este zis indiferent. Exemplu: o sferă grea coprinsă între cele 2 planuri ale figurei de mai sus.

## VI. ASUPRA ENERGIEI POTENȚIALE.

Fie un sistem material supus numai la forțe interioare și să presupunem că aceste forțe admit un potențial  $V_i$ , care reprezintă după cum știm energia potențială a sistemului.

Ori ce poziție a sistemului pentru care  $V_i$  este minim, este, după cum am văzut, o poziție de echilibru stabil. Să considerăm dintre valorile minime ale lui  $V_i$ , dacă sunt mai multe, pe cea mai mică dintre ele. Putem întotdeauna admite că această valoare este nulă, căci prin definiție

$$V_i = -U_i + C$$

și putem dispune de constanta arbitrară  $C$  așa fel ca  $V_i$  să fie nul pentru una din pozițiile sistemului. Fie  $C_m$  valoarea acestei constante. Pentru toate celelalte poziții,  $V_i$  va fi atunci pozitiv și egal cu  $-U_i + C_m$ .

Când sistemul trece dela o poziție oarecare  $S$  de potențial egal cu  $V_i$ , la poziția  $S_m$  corespunzătoare lui minimum minimorum despre care am vorbit, avem, însemnând prin  $\mathcal{E}_i$  traviul forțelor interioare,

$$\mathcal{E}_i = (-U_i + C_m)_i - (-U_i + C_m)_{S_m}$$

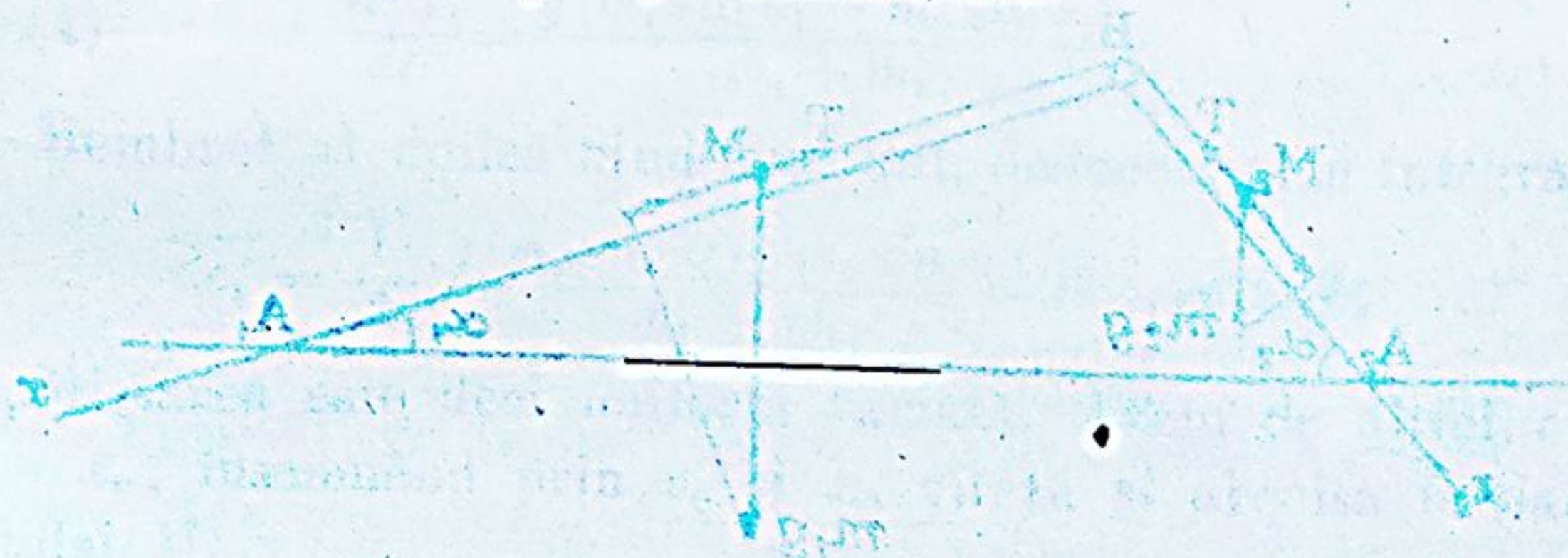


adică, pentru că termenul din paranteza a doua este nul,

$$\mathcal{E}_i = -U_i + C_m = V_i.$$

Cu alegerea făcută pentru valoarea constantei  $C$  care intră în expresia lui  $V_i$ , conchidem că energia potențială a unui sistem, într'o poziție oarecare, corespunde travaliului forțelor interioare când sistemul trece dela poziția considerată la aceea unde energia potențială are cea mai mică valoare. Găsim astfel o semnificare mai precisă a energiei potențiale care se poate exprima în felul următor:

*Energia potențială a unui sistem, pentru o poziție oarecare, este cel mai mare lucru pe care pot să-l producă forțele interioare cu începere de la poziția considerată.*



1. Metoda fortelor de legătură. Fie T, rețineră dintr-un  
cârmă M, care de pildă M, cu forța T aplicată în M  
și M, cu rețineră T aplicată în M, cu rețineră T aplicată în M.  
Măsurile necesare pot fi considerate ca fiind  
diferența M, și M, și diferența rețineră și a rețineră

1944, and in 1945 the number of cases was 1,000.



### III. APLICAȚIUNEA DIFERITELOR METODE LA REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE DINAMICĂ.

#### PROBLEMA I.

Să se studieze mișcarea sistemului format de două puncte grele  $M_1$  și  $M_2$  pe planurile înclinate  $A_1 B$ ,  $B A_2$ , punctele fiind legate printr'un fir flexibil și inextensibil și presupunându-se că nu există frecare.

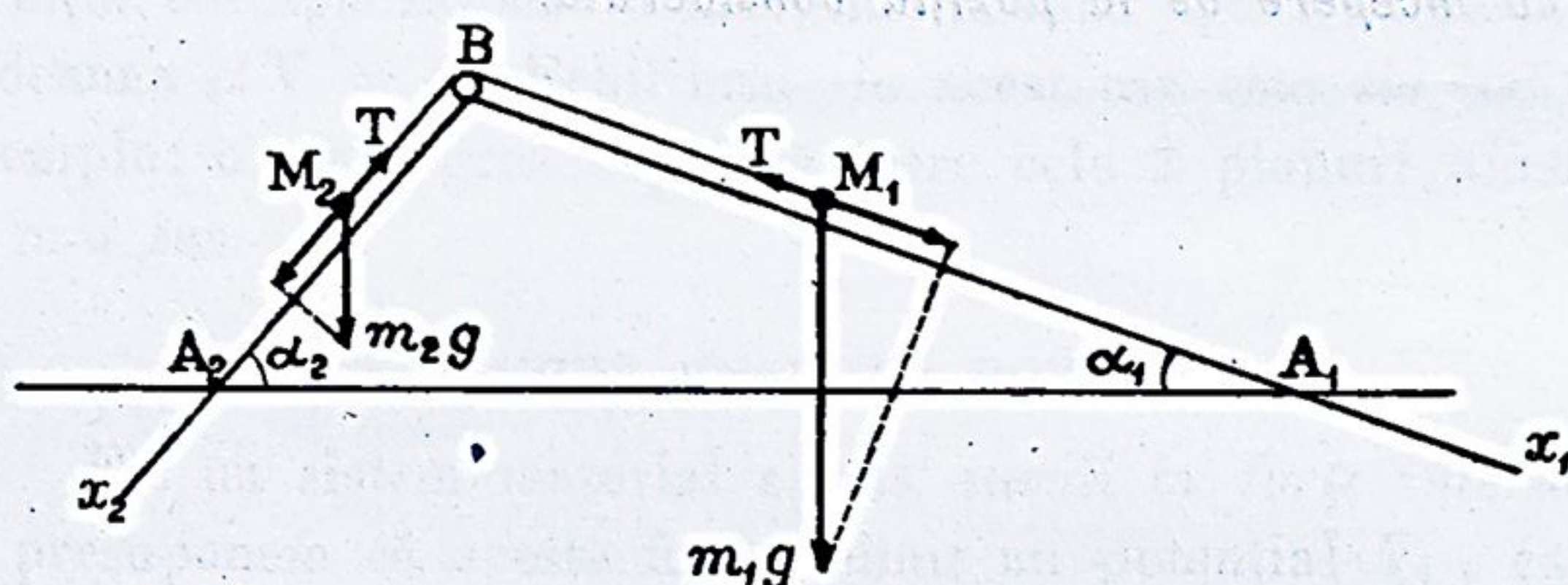


Fig. 157

1<sup>o</sup>. **Metoda forțelor de legătură.** Fie  $T$  tensiunea firului; punctul  $M_1$  trage de punctul  $M_2$  cu forța  $T$  aplicată în  $M_2$  și invers,  $M_2$  trage de  $M_1$  cu aceeași forță  $T$  aplicată în  $M_1$ . Mișcările punctelor pot fi considerate ca efectuându-se liber pe direcțiile  $BA_1$  și  $BA_2$ , sub acțiunea tensiunilor și a componentelor greutăților pe aceste direcții.

Ecuatiile mișcării vor fi deci

$$(1) \quad m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g \sin \alpha_1 - T$$

$$(2) \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g \sin \alpha_2 - T$$

cu ecuația de legătură

$$(3) \quad x_1 + x_2 = l$$

însemnând prin  $l$  lungimea firului.

Mai putem zice că mișcarea este aceeași ca și cum puncte-



tele s'ar mișca pe aceeași dreaptă. Or sub acțiunea forțelor  $m_1 g \sin \alpha_1 - T$  și  $m_2 g \sin \alpha_2 - T$  cu condiția  $x_1 + x_2 = l$ .

Cum din ecuația (3) deducem

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \text{ ecuația (2) se poate}$$

scrie

$$(2) \text{ bis} \quad m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - m_2 g \sin \alpha_2 + T$$

și eliminarea lui  $T$  între (1) și (2) bis ne dă

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} (m_1 + m_2) = m_1 g \sin \alpha_1 - m_2 g \sin \alpha_2$$

de unde

$$(4) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

Membrul al doilea fiind constant, deducem prin integrație

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} t^2 + ct + c'$$

Mișcarea este deci uniform variată. Avem de altfel,  $c = v_0$  și  $c' = x_0$ , însemnând prin  $v_0$  și  $x_0$  viteza și abscisa inițială a punctului  $M_1$ .

Valoarea lui  $x_2$  este, potrivit ecuației de legătură, egală cu  $l - x_1$ .

Putem calcula și tensiunea  $T$ . Ecuația (1) ne dă în adevăr

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

și înlocuind pe  $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$  prin expresia sa (4) obținem

$$T = m_1 g \left( \sin \alpha_1 - \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} \right)$$

adică

$$T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

Tensiunea este deci constantă pe tot timpul mișcării.

**2°. Aplicația teoremelor generale.** Sistemul fiind din cele zise cu legături complete, nu avem nevoie decât de o singură ecuație pentru determinarea mișcării. Vom aplica teorema forțelor vii. Ea ne va da soluția, căci pe de o parte legăturile fiind inde-

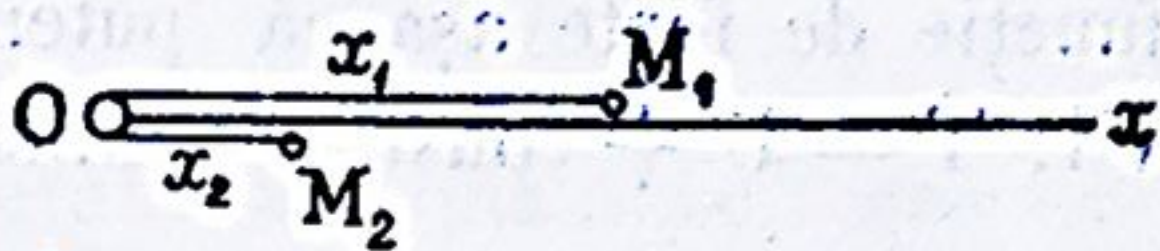


Fig. 158



pendente de timp nu vom avea a ține seama de forțele de legătură, iar pe de altă parte forțele direct aplicate admit o funcție de forțe așa că putem aplica direct integrala forțelor vii:  $T = U + \text{const.}$ ,  $U$  fiind funcția de forțe.

Ori, cum ecuația de legătură ne dă  $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}$  și deci  $\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$ , avem

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2.$$

Pe de altă parte,

$$U = (m_1 g \sin \alpha_1) x_1 + (m_2 g \sin \alpha_2) x_2$$

sau, înlocuind pe  $x_2$  prin  $l - x_1$ ,

$$U = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) x_1 + m_2 g l \sin \alpha_2.$$

Integrala forțelor vii este, în consecință,

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) x_1 + k,$$

însemnând prin  $k$  o constantă arbitrară.

Integrațiunea acestei ecuații ne conduce la același rezultat ca ecuația (4) de mai sus. În adevăr, dacă o derivăm, obținem

$$(m_1 + m_2) \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) \frac{dx_1}{dt}$$

adică, simplificând,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

care este ecuația (4).

### 3°. Aplicațiunea principiului lui d'Alembert.

a) Dacă n'ar fi mișcare, ecuația de echilibru ar fi, evident,

$$m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2$$

deci ecuația mișcării este, introducând forțele de inerție,

$$m_1 g \sin \alpha_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_2 g \sin \alpha_2 - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}$$



adică

$$g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) = (m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} .$$

b) Dacă aplicăm ecuația generală a Dinamicei, care exprimă că suma travaliurilor virtuale a forțelor direct aplicate și a forțelor de inerție este nulă în deplasările compatibile cu legăturile, obținem

$$\left( m_1 g \sin \alpha_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \delta x_1 + \left( m_2 g \sin \alpha_2 - m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) \delta x_2 = 0 .$$

Cum însă  $\delta x_2 = - \delta x_1$  și  $\frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ , ecuația se scrie

$$\left[ g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) - (m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right] \delta x_1 = 0 .$$

Coeficientul lui  $\delta x_1$  trebuind să fie nul, rezultă

$$g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) = (m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} .$$

c) Putem aplica și metoda multiplicatorilor, dacă, după cum am explicat mai sus, asimilăm mișcarea cu aceea care ar avea loc în lungul aceleiași ax  $Ox$ .

Aplicația numitei metode ne dă

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g \sin \alpha_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g \sin \alpha_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} .$$

Ori,  $f = x_1 + x_2 - l$  ; deci  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$  așa încât

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g \sin \alpha_1 + \lambda$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g \sin \alpha_2 + \lambda .$$

Regăsim astfel ecuațiile (1) și (2),  $\lambda$  reprezentând pe—T.



4°. Ecuatii Lagrange. Avem  $x_1 + x_2 = l$ . Să punem de la noi  $x_1 - x_2 = q$ . Obținem astfel sistemul

$$x_1 + x_2 = l, \quad x_1 - x_2 = q$$

din care rezultă

$$x_1 = \frac{l+q}{2}, \quad x_2 = \frac{l-q}{2}$$

In consecință,

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial q} = -\frac{1}{2}$$

și

$$Q = \sum X \frac{\partial x}{\partial q} = m_1 g \sin \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} + m_2 g \sin \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

adică

$$[Q = \frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2).$$

Pe de altă parte,  $x'_1 = \frac{1}{2} q'$ ,  $x'_2 = -\frac{1}{2} q'$  și prin urmare

$$T = \frac{1}{2} \sum m x'^2 = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left(\frac{q'}{2}\right)^2 + m_2 \left(-\frac{q'}{2}\right)^2 \right]$$

adică

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) q'^2.$$

Din această expresie a forței vii, rezultă

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) q', \quad D_t \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Ecuatia lui Lagrange este astfel

$$\frac{1}{4} (m_1 + m_2) \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)$$

sau

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = 2g \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2}$$



din care rezultă, prin integrațiune,

$$q = g \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} t^2 + ht + h'.$$

Introducând această valoare în expresiunea lui  $x_1$ , găsim

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} t^2 + ct + c'.$$

5°. Ecuatii Hamilton. Plecând de la expresia de mai sus a forței vii:

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) q'^2$$

vom pune

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = p \quad \text{adică} \quad \frac{1}{4} (m_1 + m_2) q' = p$$

de unde

$$q' = \frac{4p}{m_1 + m_2}$$

și, ca urmare,

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) \left( \frac{4p}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{2p^2}{m_1 + m_2}.$$

Pe de altă parte

$$U = m_1 g x_1 \sin \alpha_1 + m_2 g x_2 \sin \alpha_2 = g \left( m_1 \sin \alpha_1 \frac{l+q}{2} + m_2 \sin \alpha_2 \frac{l-q}{2} \right)$$

deci

$$H = T - U = \frac{2p^2}{m_1 + m_2} - g \left( m_1 \sin \alpha_1 \frac{l+q}{2} + m_2 \sin \alpha_2 \frac{l-q}{2} \right)$$

și în consecință

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{4p}{m_1 + m_2}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2).$$

Ecuatiile lui Hamilton vor fi

$$\frac{dq}{dt} = \frac{4p}{m_1 + m_2}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2).$$



Ecuatia a doua ne da

$$p = \frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) t + \frac{1}{4} h (m_1 + m_2)$$

$h$  fiind o constantă arbitrară. Introducând această valoare în ecuația întâia, obținem

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2 g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} t + h$$

de unde rezultă

$$q = g \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} t^2 + ht + h'.$$

## PROBLEMA II.

Să se studieze mișcarea într'un plan vertical a unei bare omogene, supusă greutății și acțiunii unui cuplu.

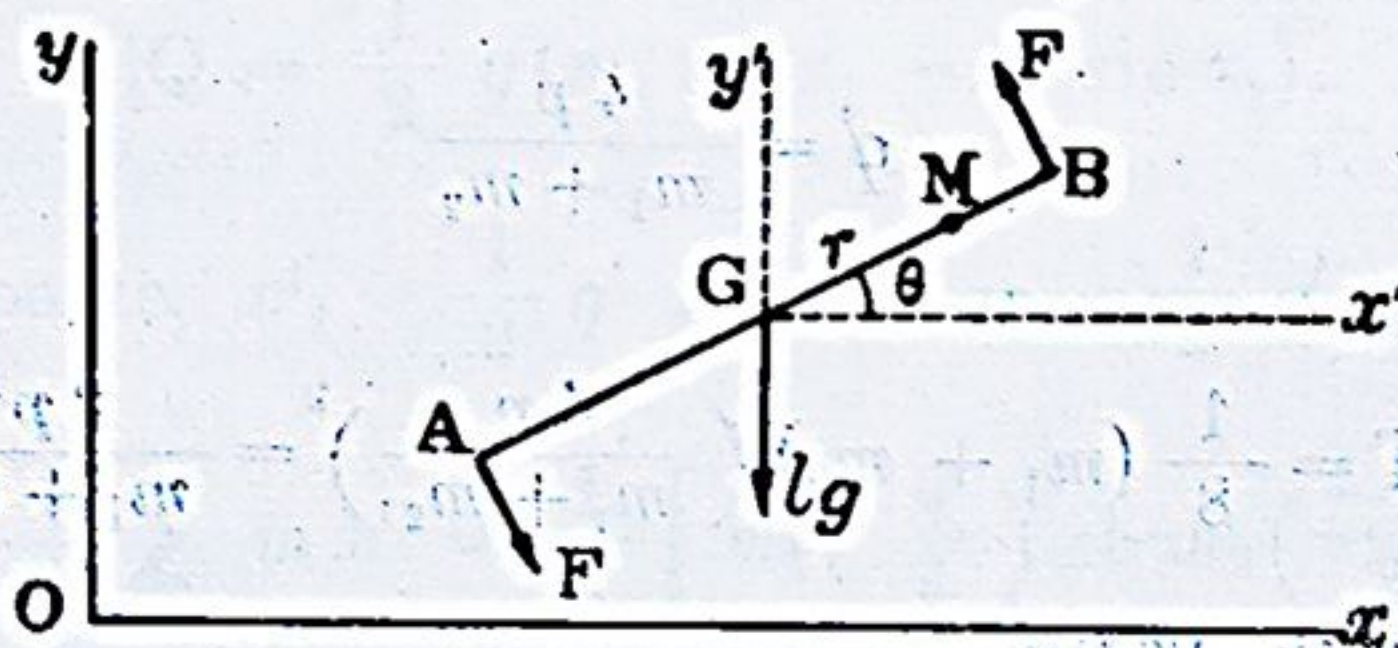


Fig. 159

Fie  $l$  lungimea barei. Ne având a compara densitatea barei AB cu aceea a unei alte bare de aceeași lungime, putem presupune densitatea egală cu unitatea; vom lua, în consecință, ca element de masă elementul de lungime  $dl$  și atunci masa barei fiind egală cu  $l$ , greutatea ei va fi  $lg$ . Vom presupune, însfârșit, că cuplul este reprezentat prin două forțe  $F$  egale și de sensuri opuse, perpendiculare în A și B pe direcția barei; momentul cuplului va fi deci  $Fl$ .

1°. **Mișcarea centrului de greutate.** Cum, cu notațiile obișnuite, avem  $\Sigma X = 0$  și  $\Sigma Y = -lg = \text{const.}$ , putem determina mișcarea centrului de greutate.



Ecuatiile mișcării acestui punct fiind

$$l \frac{d^2 a}{dt^2} = 0, \quad l \frac{d^2 b}{dt^2} = -lg$$

deducem

$$a = ct + c', \quad b = -\frac{1}{2}gt^2 + ht + h'.$$

2°. **Teorema momentelor cantităților de mișcare.** Centrul de greutate  $G$  este evident la mijlocul barei. Să ducem prin  $G$  sistemul de axe  $x'Gy'$  paralel cu  $xOy$ . Cum mișcarea punctului  $G$  este cunoscută, cunoașterea mișcării barei nu mai preține decât determinarea unghiului  $\theta$  de pe figură, în funcție de timp.

Să aplicăm teorema momentelor cantităților de mișcare, în raport de sistemul mobil  $x'Gy'$ :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \sum m \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = \sum (x' Y - y' X).$$

$M$  fiind un punct oarecare al barei, să punem  $GM = r$ ; vom avea

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta, & y' &= r \sin \theta \\ \frac{dx'}{dt} &= -r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, & \frac{dy'}{dt} &= r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, momentul greutateii  $lg$  este nul în raport de  $G$ , iar momentul cuplului este egal cu  $Fl$ .

Formula (1) în care elementul de masă  $m$  este egal cu elementul de lungime  $dr$ , se scrie în consecință,

$$\frac{d}{dt} \sum dr \left( r^2 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \right) = Fl$$

adică

$$\frac{d}{dt} \sum r^2 \frac{d\theta}{dt} dr = Fl.$$

Însă  $\frac{d\theta}{dt}$  fiind același pentru toate punctele barei, iese de sub semnul  $\Sigma$ , iar suma  $\Sigma r^2 dr$  trebuind efectuată asupra tuturor elementelor  $dr$  ale barei, dela  $A$  la  $B$ , devine integrala diferențială  $r^2 dr$  luată între limitele  $-\frac{l}{2}$  și  $+\frac{l}{2}$ .



Avem deci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 dr = F l$$

și, prin efectuarea derivării și integrațiunii,

$$\frac{l^3}{12} \frac{d^2\theta}{dt^2} = F l \quad \text{sau} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{12 F}{l^2} = A$$

însemnând prin A valoarea constantei  $\frac{12 F}{l^2}$ . Deducem

$$\theta = \frac{1}{2} A t^2 + k t + k'.$$

Problema este deci complet rezolvată.

3°. **Teorema forțelor vii.** Să aplicăm teorema forțelor vii în mișcarea relativă în jurul punctului G:

$$d \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum (X dx' + Y dy')$$

sau, mai pe scurt,

(2)

$$dT' = d\mathcal{C}'.$$

Avem

$$v' = r \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{deci} \quad T' = \sum \frac{1}{2} dr \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 dr$$

adică

$$T' = \frac{l^3}{24} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

În ce privește pe  $d\mathcal{C}'$ , știm, că fiind vorba de o rotație, travaliul elementar al unei forțe este egal cu momentul forței în raport de axul de rotație, înmulțit cu deplasarea unghiulară elementară. Deci

$$d\mathcal{C}' = F l d\theta.$$

Aplicația formulei (2) ne dă prin urmare,

$$(3) \quad d \cdot \frac{l^3}{24} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = F l d\theta$$

sau, efectuând diferențierea și simplificând,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{12 F}{l^2}$$

valoare identică cu aceea obținută mai sus.



**Notă.** Evident, că în loc de a efectua diferențierea în ecuația (3), putem ajunge la rezultat și prin integrațiunea directă a acestei ecuații. Ea se poate scrie, în adevăr,

$$d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2A d\theta, \quad \text{punând } A = \frac{12F}{l^2},$$

și integrațiunea ne dă

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2A\theta + k''.$$

Deducem succesiv

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2A\theta + k''}, \quad \frac{2A d\theta}{2\sqrt{2A\theta + k''}} = A dt, \quad \sqrt{2A\theta + k''} = At + k,$$

$$2A\theta + k'' = A^2 t^2 + 2Akt + k^2$$

de unde

$$\theta = \frac{1}{2} A t^2 + kt + \frac{k^2 - k''}{2A}$$

sau

$$\theta = \frac{1}{2} A t^2 + kt + k',$$

$$\text{punând } \frac{k^2 - k''}{2A} = k'.$$

Deci aceeași expresie ca la No. 2<sup>o</sup>.

### PROBLEMA III.

Să se studieze mișcarea într'un plan vertical a unei bare omogene și grele, extremitățile A și B ale barei fiind respectiv obligate de a descrie verticala Oy și orizontala Ox.

M fiind un punct oarecare al barei, vom pune  $AM = r$  și vom însemna prin  $l$  lungimea barei. Elementul de masă va fi reprezentat prin  $dr$ , ca și în problema precedentă, greutatea barei fiind egală în consecință cu  $lg$ .

Avem

$$x = r \sin \theta, \quad y = (l - r) \cos \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -(l - r) \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (r^2 + l^2 \sin^2 \theta - 2lr \sin \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

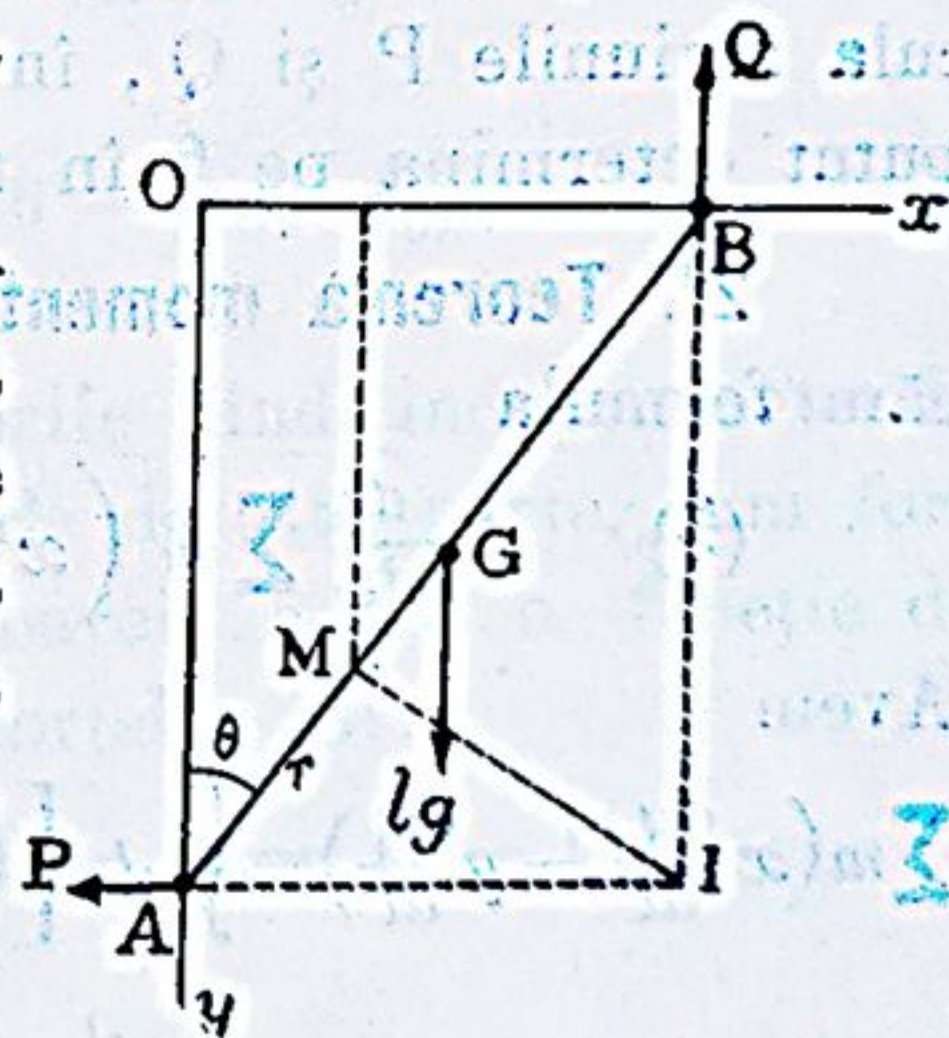


Fig. 160



Punctul I fiind centrul instantaneu de rotație, putem scrie că  $v = IM \cdot \omega$ . Ori  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  iar  $\overline{IM}^2$  în triunghiul IAM este tocmai egal cu  $r^2 + l^2 \sin^2 \theta - 2lr \sin^2 \theta$ .

1°. **Teorema cantităților de mișcare.** Fie P și Q acțiunile normale ale dreptelor Oy și Ox asupra barei în punctele A și B, adică forțele de legătură. Avem

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = -P, \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = lg - Q$$

Ori,

$$\sum m \frac{dx}{dt} = \int_0^l r dr \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r dr = \frac{l^2}{2} \cos \theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\sum m \frac{dy}{dt} = \int_0^l dr (r-l) \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l (r-l) dr = -\frac{l^2}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Derivând și înlocuind în ecuațiile (1), aceste ecuații ne dau

$$(3) \quad P = -\frac{l^2}{2} \left[ \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$(4) \quad Q = lg + \frac{l^2}{2} \left[ \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right].$$

Teorema cantităților de mișcare ne permite deci de a calcula acțiunile P și Q, în cazul când printr'o altă teoremă am putut determina pe  $\theta$  în funcție de  $t$ .

2°. **Teorema momentelor cantităților de mișcare.** Să aplicăm formula

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum (xY - yX).$$

Avem

$$\begin{aligned} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \int_0^l dr \left[ r \sin \theta \cdot (r-l) \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - (l-r) \cos \theta \cdot r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right] \\ &= \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r (r-l) dr = -\frac{l^3}{6} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

și

$$\sum (xY - yX) = Pl \cos \theta - Ql \sin \theta + lg \cdot \frac{l}{2} \sin \theta.$$



Deci, potrivit formulei (5),

$$-\frac{l^3}{6} \frac{d^2\theta}{dt^2} = Pl \cos \theta - Ql \sin \theta + \frac{l^3}{2} g \sin \theta$$

adică

$$l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6(Q \sin \theta - P \cos \theta) - 3lg \sin \theta.$$

Să înlocuim în această ecuație pe  $P$  și  $Q$  prin expresiile lor (3) și (4). Obținem după efectuarea tuturor calculelor,

$$(6) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

Această ecuație ne este cunoscută dela mișcarea pendulului circular. Unghiul  $\theta$  variază deci după aceeași lege.

Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației (6) cu  $2 \frac{d\theta}{dt} dt$  și integrăm, obținem, presupunând viteza unghiulară inițială nulă,

$$(7) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Însfârșit, introducând valorile (6) și (7) în expresiile (3) și (4) ale acțiunilor  $P$  și  $Q$ , găsim

$$P = \frac{3lg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

$$Q = \frac{lg}{4} + \frac{3lg}{4} \cos \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0).$$

**3°. Teorema forțelor vii.** Legăturile fiind independente de timp, putem aplica această teoremă. Pe de altă parte, cum forțele direct aplicate (adică greutatea barei) admit o funcție de forțe, putem scrie imediat integrala forțelor vii:

$$T = U + \text{const.} \quad \text{sau} \quad T - T_0 = U - U_0.$$

Ori

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \int_0^l dr (r^2 + l^2 \sin^2 \theta - 2lr \sin^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[ \int_0^l r^2 dr + l \sin^2 \theta \int_0^l (l - 2r) dr \right] \end{aligned}$$



adică

$$T = \frac{l^3}{6} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Pe de altă parte, cum ordonata punctului G este egală cu  $\frac{l}{2} \cos \theta$ , funcția de forțe U are ca expresie

$$U = l g \cdot \frac{l}{2} \cos \theta.$$

Integrala forțelor vii este prin urmare

$$\frac{l^3}{6} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{l^2 g}{2} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

adică

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

presupunând viteza unghiulară inițială nulă, adică  $T_0 = 0$ .

Regăsim deci direct ecuația (7) de mai sus.

**4°. Ecuații Lagrange.** Expresiile coordonatelor  $x$  și  $y$  ale unui punct oarecare M fiind

$$x = r \sin \theta, \quad y = (l - r) \cos \theta$$

$\theta$  va reprezenta pe  $q$  din ecuațiile lui Lagrange.

Avem succesiv, observând că pentru un element  $dr$ , forța direct aplicată este greutatea  $Y = g dr$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = (r - l) \sin \theta$$

$$Q = \sum Y \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sum g dr \cdot (r - l) \sin \theta = g \sin \theta \int_0^l (r - l) dr = -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta$$

$$T = \frac{l^3}{6} \theta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{l^3}{3} \theta', \quad D_t \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{l^3}{3} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Deci, ecuația lui Lagrange este

$$\frac{l^3}{3} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta$$

adică

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \sin \theta$$

care este ecuația (6).



5°. Ecuatiile Hamilton. Punând

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = p \quad \text{adică} \quad \frac{l^3}{3} \theta' = p$$

deducem

$$\theta' = \frac{3p}{l^3} \quad \text{și prin urmare} \quad T = \frac{l^3}{6} \left( \frac{3p}{l^3} \right)^2 = \frac{3p^2}{2l^3}.$$

Pe de altă parte, cum

$$U = \frac{l^2 g}{2} \cos \theta$$

avem

$$H = T - U = \frac{3}{2l^3} p^2 - \frac{l^2 g}{2} \cos \theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{3}{l^3} p, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{l^2 g}{2} \sin \theta.$$

Ecuatiile lui Hamilton vor fi în consecință

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{l^3} p, \quad \left( \frac{dp}{dt} = -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta \right)$$

Dacă derivăm ecuația întâia în raport de  $t$  și înlocuim în ea pe  $\frac{dp}{dt}$  prin valoarea sa, obținem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{l^3} \left( -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta \right)$$

adică

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

6°. Ecuatia generală a Dinamicei. Să aplicăm înfățișat ecuația generală a Dinamicei:

$$(8) \quad \sum \left[ \left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y \right] = 0.$$

Avem mai întâi

$$X = 0, \quad Y = g dr$$

apoi din egalitățile

$$\frac{dx}{dt} = r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = (r - l) \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$



deducem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r \left( \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = (r-l) \left( \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right).$$

Pe de altă parte

$$\delta x = r \cos \theta \delta \theta, \quad \delta y = (r-l) \sin \theta \delta \theta.$$

Cu aceste valori, ecuația (8) se scrie:

$$\sum \left[ -dr \cdot r \left( \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right) r \cos \theta + \right. \\ \left. \left\{ g dr - dr (r-l) \left( \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right) \right\} (r-l) \sin \theta \right] \delta \theta = 0$$

și rezultă

$$- \cos \left( \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right) \int_0^l r^2 dr + g \sin \theta \int_0^l (r-l) dr - \\ \sin \theta \left( \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right) \int_0^l (r-l)^2 dr = 0.$$

Această ecuație, în care

$$\int_0^l r^2 dr = \frac{l^3}{3}, \quad \int_0^l (r-l) dr = -\frac{l^2}{2}, \quad \int_0^l (r-l)^2 dr = \frac{l^3}{3}$$

se reduce la

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \sin \theta$$

termenii în  $\frac{d\theta^2}{dt^2}$  reducându-se.

Metoda multiplicatorilor conduce, dacă adunăm toate ecuațiile în  $x$  și toate ecuațiile în  $y$ , la cele două ecuații:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = -P.$$

$$\sum m \frac{d^2y}{dt^2} = lg - Q$$

care corespund teoremei cantităților de mișcare.

#### PROBLEMA IV.

*Să se studieze mișcarea unei bare omogene și grele OA, care are punctul O fix.*



Vom lua ca axe sistemul dreptunghiular  $Oxyz$ , axul  $Oz$  fiind vertical și îndreptat în sensul greutateii.

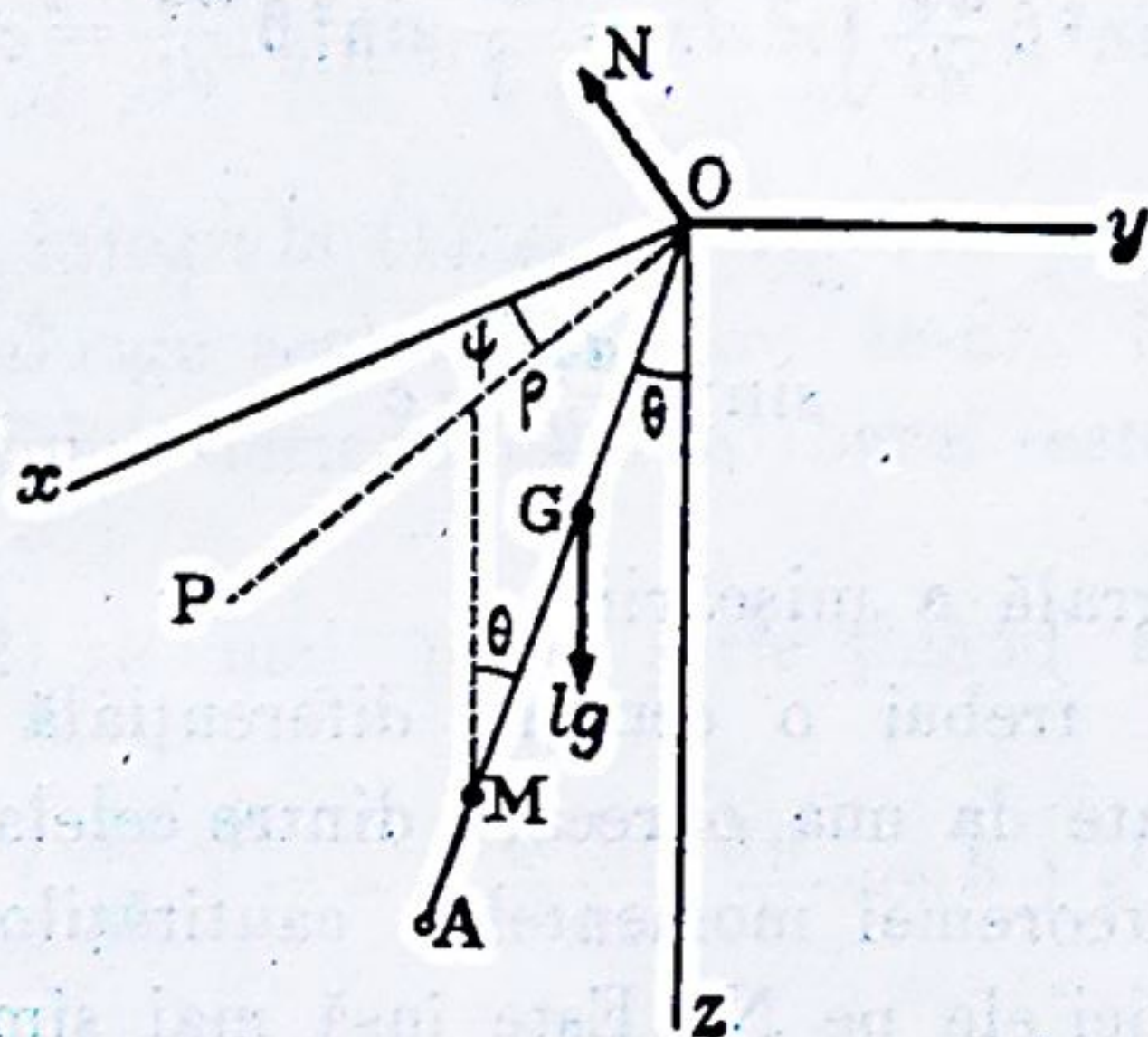


Fig. 161

Fie  $OP$  intersecția planului vertical dus prin  $OA$  cu planul  $Oxy$ .

$M$  fiind un punct oarecare al barei, dacă însemnăm lungimea  $OM$  prin  $r$ , avem pe figură,

$$x = \rho \cos \psi = r \sin \theta \cos \psi$$

$$y = \rho \sin \psi = r \sin \theta \sin \psi$$

$$z = r \cos \theta.$$

1°. **Teorema momentelor cantităților de mișcare.** Bara poate fi considerată ca liberă sub acțiunea greutateii ei și a unei forțe  $N$  aplicată în  $O$ . Cum momentele ambelor forțe sunt nule în raport de axul  $Oz$ , avem

$$\frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0.$$

și prin urmare

$$\sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c.$$

Aceasta este echivalent cu a zice că teorema ariilor are loc pentru planul  $Oxy$ , adică

$$\sum m \rho^2 \frac{d\psi}{dt} = c$$



și înlocuind pe  $\rho$  prin  $r \sin \theta$ ,

$$\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \int_0^l r^2 dr = \frac{l^3}{3} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = c$$

deci în definitiv

$$(1) \quad \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = c$$

care este o integrală a mișcării.

Ne-ar mai trebui o ecuație diferențială în  $\theta$  și  $\psi$ . Pe aceasta ne-o poate da una oarecare dintre celelalte două ecuații care corespund teoremei momentelor cantităților de mișcare și care nu conțin nici ele pe  $N$ . Este însă mai simplu de a aplica teorema forțelor vii care ne dă o a doua integrală a mișcării, căci forțele direct aplicate admit o funcție de forțe.

**2°. Teorema forțelor vii.** Avem, utilizând cordonatele cilindrice:

$$v^2 = \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \left( \rho \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2$$

adică

$$v^2 = r^2 \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right]$$

deci

$$T = \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \int_0^l v^2 dr = \frac{l^3}{6} \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right]$$

Pe de altă parte, cum cota centrului de greutate  $G$  este egală cu  $\frac{l}{2} \cos \theta$ , funcția de forțe este

$$U = l g \cdot \frac{l}{2} \cos \theta.$$

Integrala forțelor vii este în consecință

$$\frac{l^3}{6} \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{l^2 g}{2} \cos \theta + c'$$



sau, mai simplu,

$$(2) \quad \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 - \frac{3g}{l} \cos \theta = c'.$$

Cele două integrale (1) și (2) rezolvă problema, în sensul că ele fiind analoage acelor pe care le-am întâlnit la studiul mișcării pendulului sferic, mișcarea barei este și ea analoagă acestei mișcări.

Ecuatia (2) se mai poate scrie ținând socoteală de ecuația (1):

$$(2)^{\text{bis}} \quad \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + \frac{3g}{l} \cos \theta + c'.$$

3°. **Ecuatii Lagrange.** Vom lua drept parametri  $q_1$  și  $q_2$  pe  $\theta$  și  $\psi$ . Ori, din  $z = r \cos \theta$ , deducem

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0$$

și, cum  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = g dr$ , rezultă

$$Q_1 = \sum Z \frac{\partial z}{\partial \theta} = -g \sin \theta \int_0^l r dr = -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta$$

$$Q_2 = \sum Z \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0.$$

Pe de altă parte, după cum s'a văzut mai sus,

$$T = \frac{l^3}{6} (\theta'^2 + \sin^2 \theta \cdot \psi'^2)$$

deci

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{l^3}{3} \theta', \quad D_t \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{l^3}{3} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{l^3}{3} \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{l^3}{3} \sin^2 \theta \cdot \psi', \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Ca urmare, ecuațiile lui Lagrange se scriu

$$\frac{l^3}{3} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{l^3}{3} \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = -\frac{l^2 g}{2} \sin \theta$$

$$D_t \left( \frac{l^3}{3} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \right) = 0.$$



Ecuatia a doua ne da

$$\sin^2 \theta \cdot \frac{d\psi}{dt} = c$$

care este integrala (1).

Dacă în ecuația întâia, simplificată cu  $l^2$ , înlocuim pe  $\frac{d\psi}{dt}$  prin  $\frac{c}{\sin^2 \theta}$ , obținem

$$(3) \quad 2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{2c^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{3g}{l} \sin \theta.$$

Inmulțind ambii membri cu  $\frac{d\theta}{dt} dt$  și integrând, găsim

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{c^2}{\sin^3 \theta} + \frac{3g}{l} \cos \theta + c'$$

care este integrala (2) pusă sub forma (2) bis.

4°. **Ecuatii Hamilton.** Plecând dela expresia forței vii

$$T = \frac{l^3}{6} (\theta'^2 + \sin^2 \theta \psi'^2)$$

vom pune

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{l^3}{3} \theta' = p_1 \quad \text{deci} \quad \theta' = \frac{3p_1}{l^3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{l^3}{3} \sin^2 \theta \cdot \psi' = p_2 \quad \text{"} \quad \psi' = \frac{3p_2}{l^3 \sin^2 \theta}$$

și prin urmare

$$T = \frac{3}{2l^3} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 \theta} \right).$$

Pe de altă parte

$$U = \frac{l^2}{2} g \cos \theta$$

asa că

$$H = T - U = \frac{3}{2l^3} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{l^2}{2} g \cos \theta.$$

Deducem

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3}{l^3} p_1, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{3 \cos \theta}{l^3 \sin^3 \theta} p_2^2 + \frac{l^2}{2} g \sin \theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{3}{l^3 \sin^3 \theta} p_2, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0.$$



Ecuatiile Hamilton sunt în consecință

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{l^3} p_1, \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{3 \cos \theta}{l^3 \sin^3 \theta} p_2^2 - \frac{l^2}{2} g \sin \theta$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3}{l^3 \sin^2 \theta} p_2, \quad \frac{dp_2}{dt} = 0.$$

Ultima ecuație dă  $p_2 = c$ , deci  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{3c}{l^3 \sin^2 \theta}$ , sau

$$\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = \text{const.}$$

care este integrala (1) de mai sus,

Dacă dividem ecuația a doua prin ecuația întâia și separăm variabilele, obținem

$$2 p_1 dp_1 = \left( \frac{2 c^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{l^5 g}{3} \sin \theta \right) d\theta$$

și integrând,

$$p_1^2 = - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + \frac{l^5 g}{3} \cos \theta + c'$$

valoare, care introdusă în ecuația întâia ridicată la patrat, ne dă

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left( - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + \frac{l^5 g}{3} \cos \theta + c' \right) \left( \frac{3}{l^3} \right)^2$$

adică, băgând factorii numerici în constantele arbitrare,

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} + \frac{3g}{l} \cos \theta + c'.$$

Regăsim deci integrala (2) pusă sub forma (2) bis.

5°. **Principiul lui d'Alembert.** Condițiile generale de echilibru ale unui solid care are un punct fix, fiind

$$\Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0$$

ecuațiile mișcării se obțin înlocuind respectiv în aceste trei egalități pe X, Y, Z prin

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$



Prin asemenea operație regăsim însă cele 3 ecuații din care rezultă teorema momentelor cantităților de mișcare, de care ne-am ocupat la No. 1.

Să calculăm valoarea forței  $N$  din punctul  $O$ . În virtutea principiului lui d'Alembert, există echilibru între forțele direct aplicate, forțele de legătură și forțele de inerție. Fiind vorba de un solid, aceste condiții de echilibru se exprimă prin 6 ecuații, dintre care cele 3 ale proiecțiilor sunt:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = N_x, \quad \sum m \frac{d^2y}{dt^2} = N_y, \quad \sum m \frac{d^2z}{dt^2} = N_z + lg$$

iar cele 3 ale momentelor sunt chiar ecuațiile din care rezultă teorema momentelor cantităților de mișcare. Acestea nu conțin însă pe  $N$  așa că nu ne interesează în chestiunea de față.

În definitiv dar, aplicăm teorema cantităților de mișcare presupunând bara liberă.

Scriind ecuațiile precedente sub forma

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = N_x, \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = N_y, \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} = N_z + lg$$

vom înlocui pe  $m$  prin  $dr$  și pe  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  prin valorile lor în funcție de  $\theta$  și  $\psi$ , apoi vom efectua integrațiunile și vom deriva rezultatele aflate.

Să calculăm spre exemplu pe  $N_z$ . Avem

$$\sum m \frac{dz}{dt} = - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r dr = - \frac{l^2}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

și prin urmare, derivând,

$$- \frac{l^2}{2} \left( \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \right) = N_z + lg.$$

Înlocuind pe  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  și pe  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  prin expresiile lor (2) bis și (3), se obține după efectuarea operațiilor,

$$N_z = - \frac{lg}{4} (1 + 9 \cos^2 \theta) - \frac{l^2}{2} c' \cos \theta.$$



### PROBLEMA V.

Să se studieze mișcarea unui punct de masă  $m$ , obligat de a aluneca fără frecare pe o curbă care variază în fiecare moment de poziție și chiar de formă.

Fie

$$f_1(x, y, z, t) = 0 \quad (2)$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0$$

ecuațiile curbei variabile și  $X, Y, Z$  componentele forței direct aplicată mobilului. Vom scrie sistemul de ecuații:

$$\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) \delta z = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0$$

și eliminând pe  $\delta x, \delta y, \delta z$  vom obține o ecuație diferențială de ordinul al doilea în  $x, y, z, t$  care împreună cu cele două ecuații ale curbei va determina pe  $x, y, z$  în funcție de  $t$ .

Dacă voim a calcula și forța de legătură, va fi avantajos de a aplica metoda multiplicatorilor.

*Teorema forțelor vii nu se poate aplica, căci legăturile depind de timpul  $t$ . Se pot însă aplica ecuațiile lui Lagrange.*

**Exemplu.** Să se determine mișcarea unui punct obligat de a rămâne pe o dreaptă, care se învârtă într'un plan în jurul unuiu din punctele sale, tangenta unghiului de rotație variind proporțional cu timpul.

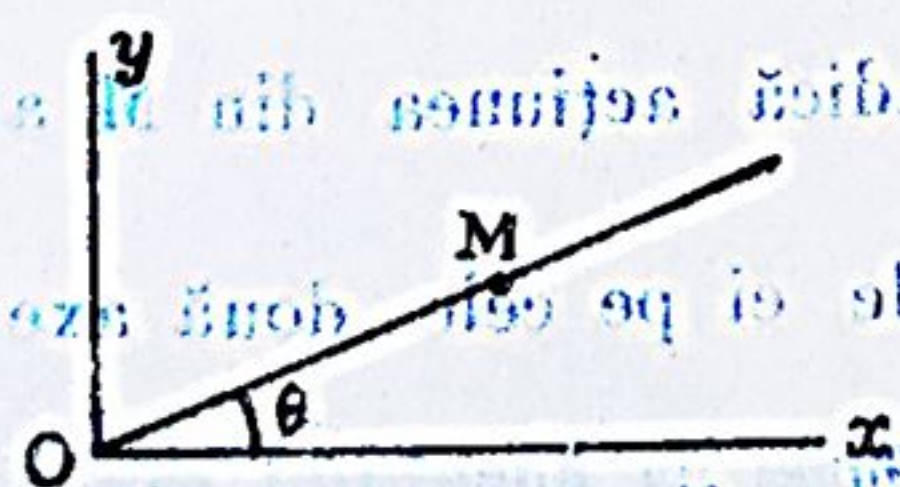


Fig. 162

Se dă deci  $\text{tg } \theta = kt$ . Într'un moment oarecare, ecuația dreptei este prin urmare  
(1)  $y = ktx.$

Cum nu există forță direct aplicată, avem  $X = 0, Y = 0$ . Aplicația metodei de mai sus ne dă în consecință sistemul de două ecuații



$$\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y = 0$$

și eliminarea lui  $\delta x$  și  $\delta y$  ne procură ecuația diferențială

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + kt \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Însă din ecuația (1) deducem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2k \frac{dx}{dt} + kt \frac{d^2x}{dt^2}$$

asa că ecuația (2) se poate scrie

$$\left(1 + k^2 t^2\right) \frac{d^2x}{dt^2} + 2k^2 t \frac{dx}{dt} = 0.$$

Această ecuație trebuie integrată. Punând  $\frac{dx}{dt} = p$ , avem succesiv

$$(1 + k^2 t^2) \frac{dp}{dt} + 2k^2 t p = 0$$

$$\text{Log } p = -\text{Log}(1 + k^2 t^2) + \text{Log } c$$

$$p = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{1 + k^2 t^2}$$

$$x = \frac{c}{k} \arctg kt + c'/kt$$

Ca urmare, ecuația (1) dă

$$(3) \quad y = ct \arctg kt + c'/kt.$$

Să calculăm forța de legătură, adică acțiunea din  $\bar{M}$  a dreptei asupra punctului.

Insemnând prin  $X_1$  și  $Y_1$  proiecțiile ei pe cele două axe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_1, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y_1$$

căci mișcarea se execută sub singura acțiune a acestei forțe.



Este însă preferabil de a aplica metoda multiplicatorilor<sup>1)</sup> care, având în vedere că ecuația de legătură este  $y - ktx = 0$ , ne dă

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda kt, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda$$

valoarea forței fiind

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \lambda \sqrt{1 + k^2 t^2}.$$

Va fi deci suficient să calculăm pe  $\lambda$ .

Ori, din egalitatea (3) deducem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2ck}{(1 + k^2 t^2)^2}.$$

În consecință

$$Y_1 = \lambda = \frac{2cmk}{(1 + k^2 t^2)^2}, \quad X_1 = -\lambda kt = -\frac{2cmk^2 t}{(1 + k^2 t^2)^2}$$

și însfârșit

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \lambda \sqrt{1 + k^2 t^2} = \frac{2cmk \sqrt{1 + k^2 t^2}}{(1 + k^2 t^2)^2}.$$

#### PROBLEMA VI.

*Să se studieze mișcarea unui punct obligat de a se mișca fără frecare pe o suprafață variabilă.*

Fie

$f(x, y, z, t) = 0$   
ecuația suprafeței.

Metoda multiplicatorilor procură cele 3 ecuații

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

care împreună cu ecuația suprafeței determină pe  $x, y, z, \lambda$  în funcție de  $t$ .

<sup>1)</sup> Am fi putut utiliza din capul locului numai această metodă.



Cantitățile  $\lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\lambda \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\lambda \frac{\partial f}{\partial z}$  sunt componentele acțiunii suprafeței asupra punctului și intensitatea acestei acțiuni are ca valoare

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Ca și în cazul problemei V nu se poate aplica teorema forțelor vii.

**Exemplu.** Să se determine mișcarea unui punct greu, obligat de a rămâne într'un plan care se învâртеște cu o mișcare uniformă în jurul unui ax orizontal.

Să luăm axul orizontal de rotație drept ax  $Ox$ , axul  $Oz$  fiind vertical și îndreptat în sensul greutateii.

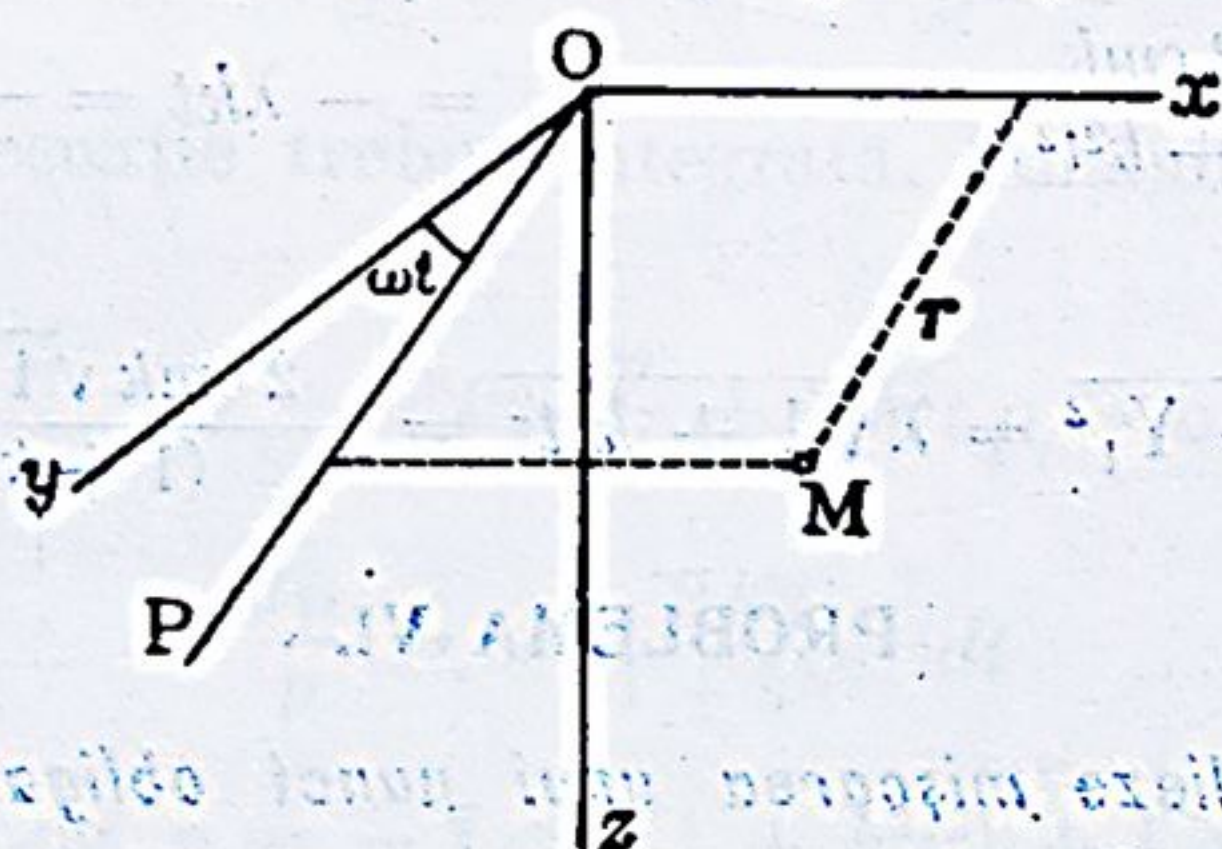


Fig. 163

Insemnând prin  $\omega$  viteza unghiulară de rotație a planului mobil și presupunând că în momentul inițial acest plan coincide cu planul  $Oxy$ , unghiul cuprins între planul  $Oxy$  și planul mobil, într'un moment oarecare  $t$ , va fi  $\omega t$ , așa încât ecuația planului va fi

$$(1) \quad z = y \cdot \operatorname{tg} \omega t.$$

Metoda multiplicatorilor ne dă

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$(2) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\lambda \operatorname{tg} \omega t$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg + \lambda.$$



Din cea dintâi dintre aceste ecuații deducem

$$x = ct + c'.$$

Eliminând pe  $\lambda$  între celelalte două, se obține

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} \operatorname{tg} \omega t = g \cdot \operatorname{tg} \omega t.$$

Ecuațiile (1) și (3) determină pe  $y$  și  $z$  în funcție de  $t$ . Pentru efectuarea calculului este mai simplu de a lua ca necunoscută distanța  $r$  a punctului la axul  $Ox$ ; avem de altfel

$$(4) \quad \begin{cases} y = r \cos \omega t \\ z = r \sin \omega t \end{cases}$$

de unde deducem

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos \omega t - 2\omega \frac{dr}{dt} \sin \omega t - r\omega^2 \cos \omega t \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin \omega t + 2\omega \frac{dr}{dt} \cos \omega t - r\omega^2 \sin \omega t. \end{cases}$$

Substituind în ecuația (3), aceasta devine

$$(6) \quad \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = g \sin \omega t$$

și integrând, obținem <sup>1)</sup>

$$(7) \quad r = -\frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t + A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}.$$

Nu rămâne decât să substituim această valoare în expresiile (4) ale cordonatelor  $y$  și  $z$ .

Să calculăm acțiunea planului asupra mobilului. Intensitatea acestei acțiuni are ca valoare, potrivit ecuațiilor (2)

$$\lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega t} \quad \text{sau} \quad \frac{\lambda}{\cos \omega t}.$$

<sup>1)</sup> Integrala generală a ecuațiilor de forma  $\frac{d^2x}{dt^2} - Px + Q = 0$  este

$x = \frac{Q}{2P} + A e^{\alpha' t} + B e^{\alpha'' t}$ ,  $\alpha'$  și  $\alpha''$  fiind rădăcinile ecuației  $\alpha^2 - P = 0$ .



Ori ecuația a treia din sistemul (2) ne dă

$$\lambda = m \left( \frac{d^2 z}{dt^2} - g \right)$$

și, cum potrivit ecuației (5) avem

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \sin \omega t + 2\omega \frac{dr}{dt} \cos \omega t$$

obținem în cele din urmă; ținând socoteală de ecuația (6) și înlocuind pe  $\frac{dr}{dt}$  prin valoarea ce rezultă din ecuația (7),

$$\frac{\lambda}{\cos \omega t} = 2m \left[ \omega^2 \left( A e^{\omega t} - B e^{-\omega t} \right) - g \cos \omega t \right].$$

Dacă punctul ar fi numai așezat pe plan, el va părăsi planul în momentul când  $\frac{\lambda}{\cos \omega t}$  devine egal cu zero. Acest moment este definit prin ecuația

$$g \cos \omega t = \omega^2 \left( A e^{\omega t} - B e^{-\omega t} \right).$$

**Ecuații Lagrange.** Ecuația (6) care determină parametrul  $r$  poate să se obțină și prin ecuația lui Lagrange:

$$D_t \frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial T}{\partial r} = X \frac{\partial x}{\partial r} + Y \frac{\partial y}{\partial r} + Z \frac{\partial z}{\partial r}.$$

Ori, avem

$$X=0, Y=0, Z=mg, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin \omega t$$

iar pe de altă parte, cum formulele (4) ne dau

$$y' = r' \cos \omega t - r\omega \sin \omega t$$

$$z' = r' \sin \omega t + r\omega \cos \omega t$$

rezultă:

$$T = \frac{1}{2} m (x'^2 + r'^2 + r^2 \omega^2)$$

și prin urmare

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = m r', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \omega^2$$



Ecuatia lui Lagrange este în consecință

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \omega^2 = m g \sin \omega t$$

adică, simplificând cu  $m$ , identică cu ecuația (6).

### PROBLEMA VII.

Să se determine pozițiile de echilibru ale unei bare grele și omogene  $AB$ , ale cărei extremități  $A$  și  $B$  sunt respectiv obligate de a descrie verticala  $Oy$  și orizontala  $Ox$ , fiecare element al barei fiind supus unei repulsiuni din partea axului  $Oy$ , proporțională cu masa elementului și cu distanța acestuia la  $Oy$ .

Se va considera cazul particular când coeficientul numeric de proporționalitate este  $k = 2 \frac{g}{l}$ ,  $l$  fiind lungimea barei.

Suntem în cazul unui sistem supus la legături independente de timp, când forțele direct aplicate admit o funcție de forțe.

În adevăr, greutatea admite ca funcție de forțe, după cum s'a mai văzut

$$U_1 = \frac{1}{2} l^2 g \cos \theta.$$

Pe de altă parte, însemnând repulsiunea elementară prin  $f$ , avem

$$f = k dr \cdot x \quad \text{deci} \quad u_2 = \frac{1}{2} k dr \cdot x^2 = \frac{1}{2} k dr \cdot r^2 \sin^2 \theta$$

și prin urmare

$$U_2 = \sum u_2 = \frac{1}{2} k \sin^2 \theta \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{6} k l^3 \sin^2 \theta.$$

Așa dar funcția de forțe a forțelor direct aplicate este

$$U = U_1 + U_2 = \frac{l^2}{6} (3 g \cos \theta + k l \sin^2 \theta).$$

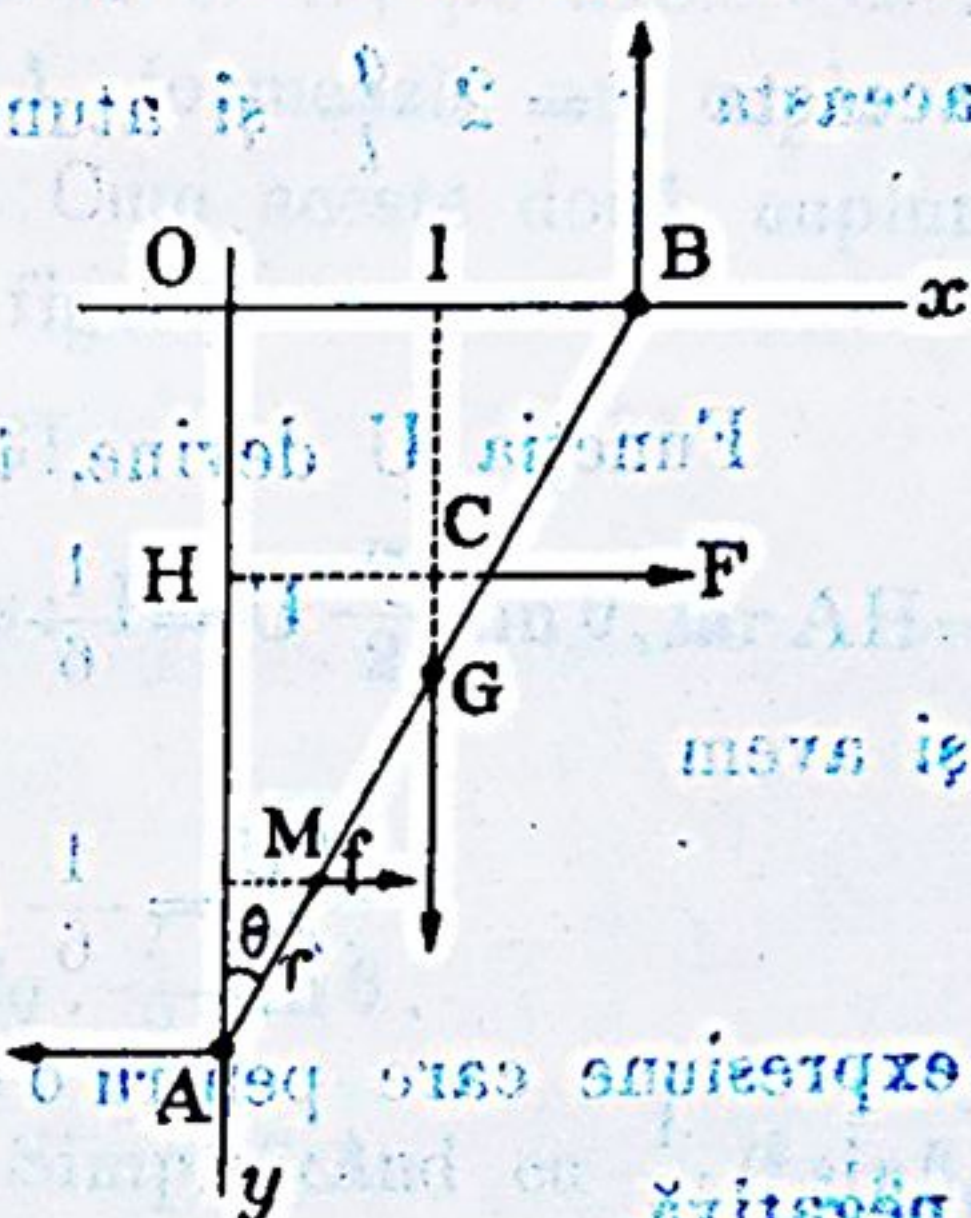


Fig. 164.



Pozițiile de echilibru corespund maximului și minimului funcției  $U$ . Anularea primei derivate ne dă

$$(1) \quad \sin \theta (2 kl \cos \theta - 3g) = 0$$

deci două soluții

$$\sin \theta = 0, \quad \cos \theta = \frac{3g}{2kl}.$$

Valoarea  $\frac{3g}{2kl}$  nu poate reprezenta un cosinus decât dacă este mai mică decât unitatea. Ni se dă însă tocmai pentru aceasta  $k = 2 \frac{g}{l}$  și atunci

$$\cos \theta = \frac{3}{4}.$$

Funcția  $U$  devine, în aceeași ipoteză,

$$U = \frac{1}{6} l^2 g (3 \cos \theta + 2 \sin^2 \theta).$$

și avem

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = \frac{1}{6} l^2 g (4 \cos 2\theta - 3 \cos \theta)$$

expresiune care pentru  $\theta = 0$  este pozitivă iar pentru  $\cos \theta = \frac{3}{4}$  negativă.

Prima valoare corespunde deci unei poziții de echilibru ne-stabil, iar a doua unei poziții de echilibru stabil.

**Observație.** Forțele elementare, direct aplicate, având respectiv ca proiecții

$$0, \quad kx \, dr \quad \text{pe } Ox$$

$$g \, dr, \quad 0 \quad \text{„ } Oy$$

aplicația directă a teoremei traverului virtual ne dă

$$\Sigma (kx \, dr \cdot \delta x + g \, dr \cdot \delta y) = 0.$$

Inlocuind în această ecuație pe  $x$  și  $y$  prin

$$x = r \sin \theta, \quad y = (l - r) \cos \theta$$

se obține, după eliminarea lui  $\delta \theta$ ,

$$k \sin \theta \cos \theta \int_0^l r^2 \, dr + g \sin \theta \int_0^l (r - l) \, dr = 0$$



adică

$$\sin \theta (2 k l \cos \theta - 3 g) = 0$$

care este tocmai ecuația (1) de mai sus.

Însfârșit, se poate ușor stabili că rezultanta  $F$  a forțelor  $f$  are ca valoare  $k \frac{l^2}{2} \sin \theta$  și, că punctul ei de aplicație este în  $C$  așa fel că  $AC = \frac{2}{3} AB$ . Pe de altă parte, proiecția forțelor  $F$ ,  $G$  și a celor două reacții din  $A$  și  $B$ , pe axele  $Ox$  și  $Oy$ , arată că forța  $F$  și reacția din  $A$  formează un cuplu și deasemenea forța  $G$  și reacția din  $B$ . Cum aceste două cupluri trebuie să-și facă echilibru, avem, pe figură,

$$F \cdot AH = G \cdot BI.$$

Însă, după cum am spus mai sus:  $F = k \frac{l^2}{2} \sin \theta$ , iar  $AH = \frac{2}{3} l \cos \theta$  și  $BI = \frac{l}{2} \sin \theta$ , deci

$$k \frac{l^2}{2} \sin \theta \cdot \frac{2}{3} l \cos \theta = lg \cdot \frac{l}{2} \sin \theta.$$

O primă soluție este  $\sin \theta = 0$ . Simplificând cu  $\frac{1}{2} l^2 \sin \theta$ , rămâne

$$\frac{kl}{3} \cos \theta = \frac{g}{2}$$

de unde, a doua soluție:  $\cos \theta = \frac{3}{4}$ , dacă se ia  $k = 2 \frac{g}{l}$ . Regăsim deci aceleași rezultate, fără a putea preciza însă prin această metodă și felul de echilibru (stabil sau nestabil) la care corespund cele două valori ale lui  $\theta$ .

#### NOTĂ FINALĂ.

Ca un fel de rezumat asupra aplicațiunii teoremelor generale, a principiului lui d'Alembert, a teoremei traverului virtual și a teoremei forțelor vii, precizăm următoarele:

1<sup>o</sup>) Ecuațiile de echilibru ale unui solid sunt:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0; \\ \Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0. \end{aligned}$$



Ecuatiile mișcării se obțin înlocuind pe  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  pentru fiecare în parte din punctele solidului, prin

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Prin asemenea înlocuire, <sup>1)</sup> regăsim cele 6 ecuații de la teorema cantităților de mișcare și teorema momentelor cantităților de mișcare.

Ele sunt suficiente pentru determinarea mișcării solidului.

2<sup>o</sup>) Ecuatiile de echilibru ale unui sistem de  $n$  puncte materiale cuprind câte trei ecuații

$$(\alpha) \quad X=0, \quad Y=0, \quad Z=0$$

pentru fiecare din punctele sistemului, deci în total  $3n$  ecuații.

Când sistemul este în echilibru, îl putem considera ca fiind solidificat așa că avem, ca și pentru solide,

$$(\beta) \quad \begin{aligned} \Sigma X &= 0, & \Sigma Y &= 0, & \Sigma Z &= 0; \\ \Sigma (yZ - zY) &= 0, & \Sigma (zX - xZ) &= 0, & \Sigma (xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

Aceste 6 ecuații reprezintă numai *condiții necesare* de echilibru, așa că numai ele singure nu rezolvă chestiunea echilibrului.

Ecuatiile mișcării se obțin înlocuind în cele  $3n$  ecuații de forma  $(\alpha)$  pe  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  prin

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Se obține astfel un sistem de  $3n$  ecuații. Dacă facem aceiași înlocuire și în ecuațiile  $(\beta)$  obținem un sistem de 6 ecuații care au cu adevărat loc, însă nu pot determina ele singure mișcarea sistemului.

3<sup>o</sup>) În caz când există legături, aplicația teoremei lucrului virtual ne dă ecuațiile de echilibru, sau în combinație cu principiul lui d'Alembert, pe acelea ale mișcării, fără a ține

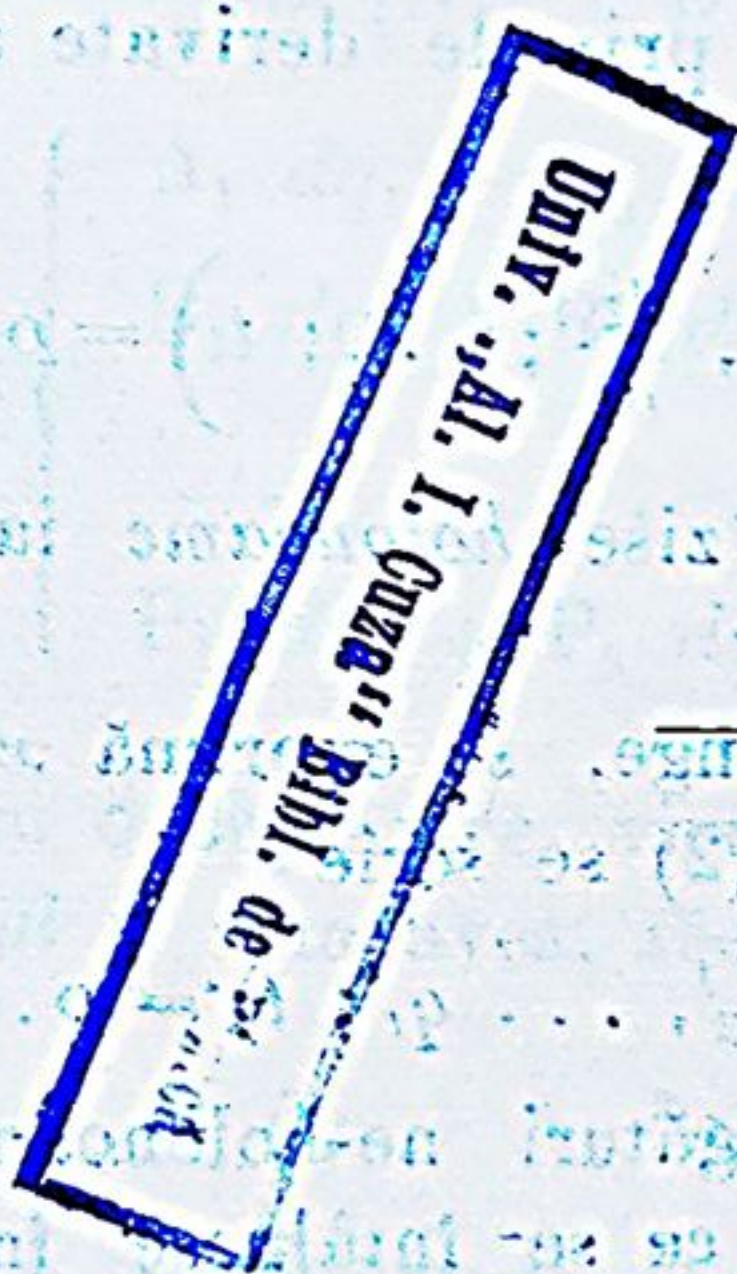
<sup>1)</sup> Când se face înlocuirea, se va considera că în fiecare punct lucrează o forță, indiferent că această forță de componente  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  este sau nu este nulă.



seama de forțele de legătură. Evident însă, că aceste ecuații rezultă și din ecuațiile dela No. 1<sup>o</sup> pentru solide și No. 2<sup>o</sup> pentru sistemele materiale, când se elimină forțele de legătură. Procedul are însă avantajul de a se aplica *ori care ar fi forma ecuațiilor de legătură*, iar nu numai în cazul când legăturile au o semnificație geometrică simplă care să permită de a le exprima și a le introduce în ecuațiile dela No. 1<sup>o</sup> sau 2<sup>o</sup>.

4<sup>o</sup>) Teorema forțelor vii este tot o consecință a ecuațiilor mișcării. Ea se poate aplica, fără a se ține seama de forțele de legătură, numai atunci când legăturile sunt independente de timp. În asemenea caz, dacă forțele direct aplicate admit o funcție de forțe, teorema procură o ecuație diferențială a mișcării de ordinul întâi.

Când sistemul este cu legături complete, această ecuație diferențială rezolvă ea singură chestiunea mișcării, dacă poate fi integrată.





## V. ALTE APLICAȚIUNI ALE ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE.

### II. STABILIREA ECUAȚIILOR MIȘCĂRII UNUI SISTEM MATERIAL ÎN CAZUL LEGĂTURILOR ZISE NE-HOLONOAME.

1. În cele ce precedă, am presupus că ecuațiile de legătură sunt de forma zisă *finită*.

$$(1) \quad f(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n; t) = 0.$$

Se poate însă întâmpla ca în unele probleme de Dinamică o parte din ecuațiile de legătură să cuprindă nu numai coordonatele punctelor și timpul, dar și primele derivate ale coordonatelor, adică să fie de forma

$$(2) \quad \varphi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}; \dots; t\right) = 0.$$

Legăturile de forma (1) sunt zise *holonoame* iar cele de forma (2) *ne-holonoame*.

Dacă, după metoda lui Lagrange, se exprimă  $x, y, z$  în funcție de  $r$  parametri  $q$ , ecuația (2) se scrie

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_r; q_1', q_2', \dots, q_r'; t) = 0.$$

Chestiunile care comportă legături ne-holonoame se pot rezolva, pentru mai toate cazurile ce se întâlnesc în practică, prin utilizarea ecuațiilor lui Lagrange în combinație cu metoda multiplicatorilor.

Iată în ce constă acest procedeu:

Dintre diversele ecuații de legătură ale problemei, se dau de o dată la o parte ecuațiile care corespund legăturilor ne-holonoame și se formează ecuațiile lui Lagrange numai pe baza legăturilor holonoame, așa ca și cum n'ar exista decât



acestea din urmă. Cele  $r$  ecuații obținute pot fi concentrate, după cum știm în ecuația unică

$$(3) \quad \sum \left( D_i \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q = \sum Q \delta q.$$

Odată această ecuație stabilită, se iau în considerație legăturile ne-holonoame. Pentru cazurile ce se întâlnesc în practică, aceste legături se exprimă mai totdeauna prin ecuații diferențiale lineare în raport de  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$  și ne-integrabile:

[illegible]

coeficienții  $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}; \dots; P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$  fiind funcții date de  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și  $t$ . Putem scrie înmulțind cu  $dt$

[illegible]

Pentru o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile (5), în momentul  $t$ , vom avea, făcând  $dt = 0$ ,

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 \delta q_1 + A_2 \delta q_2 + \dots + A_r \delta q_r = 0 \\ B_1 \delta q_1 + B_2 \delta q_2 + \dots + B_r \delta q_r = 0 \\ \vdots \\ P_1 \delta q_1 + P_2 \delta q_2 + \dots + P_r \delta q_r = 0. \end{cases}$$

Fie  $p$  numărul acestor ecuații. Ecuația (3) va trebui să aibe loc pentru toate deplasările  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$  care verifică relațiile (6). Potrivit metodei multiplicatorilor, să înmulțim atunci cu coeficienții nedeterminați  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  aceste relații,



să le adunăm cu primul membru al ecuației (3), apoi, să anulăm pe fiecare în parte dintre coeficienții variațiilor  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r$ . Vom obține sistemul de ecuații

$$(7) \left\{ \begin{aligned} D_i \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_i + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \dots + \lambda_p P_1 \\ D_i \frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 + \lambda_1 A_2 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_p P_2 \\ &\vdots \\ D_r \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} &= Q_r + \lambda_1 A_r + \lambda_2 B_r + \dots + \lambda_p P_r. \end{aligned} \right.$$

Aceste ecuații unite cu cele  $p$  ecuații (4) formează un sistem de  $r + p$  ecuații între cele  $r + p$  necunoscute  $q_1, q_2, \dots, q_r; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Ele sunt ecuațiile mișcării.

Este esențial de remarcat, că metoda expusă presupune că travaliul virtual al tuturor forțelor de legătură este nul pentru deplasări compatibile cu legăturile. Se va examina deci în fiecare caz dacă forțele care corespund legăturilor ne-holonoame satisfac acestei condiții.

2. Exemplu <sup>1)</sup>. Fie două sfere egale, unite printr'o vergea de masă neglijabilă. Presupunem că fiecare sferă este formată dintr'o substanță foarte ușoară și că o greutate de mici dimensiuni este așezată în centru, așa încât toată greutatea sferei să poată fi privită ca concentrată în acest punct. Se așează sistemul pe un plan orizontal și i se dă o impulsie inițială. Să se găsească legea mișcării, presupunând că una dintre sfere este așa de netedă că nu poate decât să alunece pe plan, pe când cealaltă care nu este netedă se rostogolește fără alunecare.

Fie A centrul sferei care se rostogolește, B centrul aceleia care alunecă,  $a$  lungimea AB a vergelei,  $m$  masa concentrată în A și  $\mu$  masa concentrată în B.

1) *Lecornu*, Cours de Mécanique, 1915, vol. II, pag. 105.



Cum mișcarea sferei de centru A este o rostogolire fără alunecare, viteza punctului ei de contact C cu planul orizontal este nulă. Mișcarea elementară a întregului sistem este deci o rotațiune în jurul unui ax care trece prin C. Ori, viteza punctului B este orizontală; rezultă că axul de rotație este cuprins în planul vertical dus prin CB și prin urmare că proiecția lui pe planul orizontal în care se mișcă punctele A și B este dreapta AB.

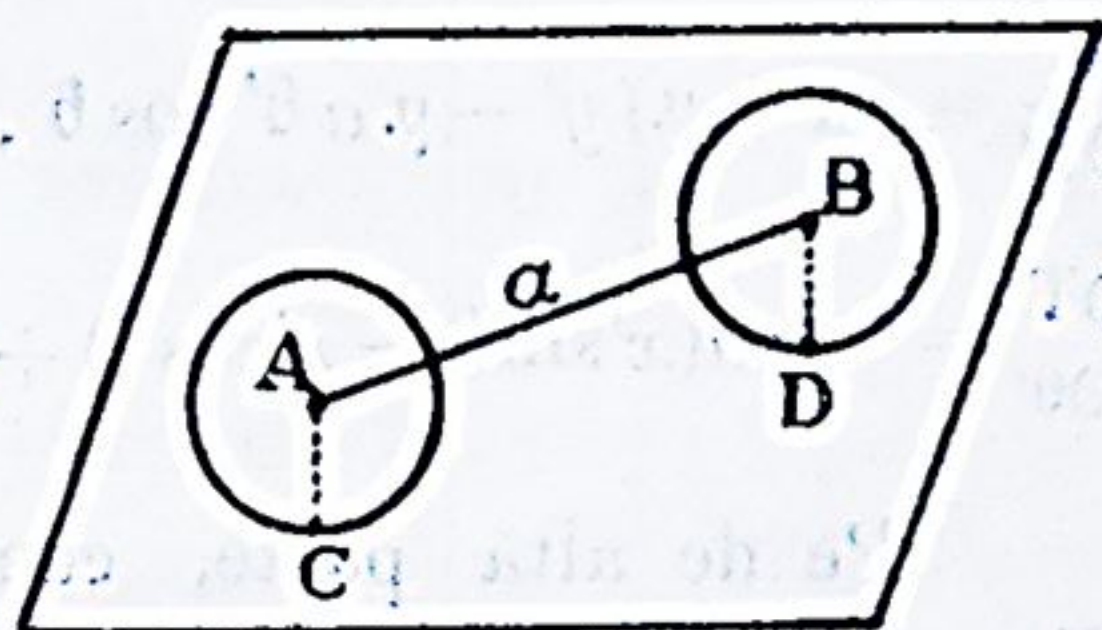


Fig. 165

Viteza punctului B este deci perpendiculară pe AB.

Fie în raport de două axe dreptunghiulare fixe, luate în planul orizontal care conține pe AB,

$x, y$  cordonatele lui A,  
 $x + a \cos \theta, y + a \sin \theta$  „ „ B,  
 $\theta$  fiind unghiul dreptei AB cu axul absciselor. Avem astfel trei parametri  $x, y, \theta$  care vor juca rolul variabilelor  $q_1, q_2, q_3$ .

Componentele vitezei punctului B fiind

$x' - a \sin \theta \cdot \theta', y' + a \cos \theta \cdot \theta'$   
 condiția de perpendicularitate a acestei viteze pe direcția AB se exprimă prin ecuația

$$(x' - a \sin \theta \cdot \theta') \cos \theta + (y' + a \cos \theta \cdot \theta') \sin \theta = 0$$

care se reduce la

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = 0.$$

Această ecuație, care exprimă că și viteza punctului A este perpendiculară pe AB, reprezintă o legătură ne-holonomă.

Forța vie a sistemului este

$$T = \frac{1}{2} \left[ m(x'^2 + y'^2) + \mu \left\{ (x' - a \sin \theta \cdot \theta')^2 + (y' + a \cos \theta \cdot \theta')^2 \right\} \right]$$

sau

$$T = \frac{1}{2} \left[ (m + \mu)(x'^2 + y'^2) - 2\mu a \theta' (x' \sin \theta - y' \cos \theta) + \mu a^2 \theta'^2 \right].$$



Deducem

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x'} &= (m + \mu) x' - \mu a \theta' \sin \theta, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y'} &= (m + \mu) y' - \mu a \theta' \cos \theta, & \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta'} &= -\mu a (x' \sin \theta - y' \cos \theta) + \mu a^2 \theta', & \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \mu a \theta' (x' \cos \theta + y' \sin \theta).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, cum traverziile virtuale ale forțelor direct aplicate adică ale greutateilor, sunt evident nule, termenii  $Q_1, Q_2, Q_3$  sunt egali cu zero<sup>1)</sup>.

Aplicația ecuațiilor lui Lagrange, în combinație cu metoda multiplicatorilor, ne dă prin urmare sistemul de trei ecuații

$$\begin{aligned}(1) \quad & (m + \mu) x'' - \mu a (\theta' \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta) = \lambda \cos \theta \\ (2) \quad & (m + \mu) y'' + \mu a (\theta' \cos \theta - \theta'^2 \sin \theta) = \lambda \sin \theta \\ (3) \quad & x'' \sin \theta - y'' \cos \theta - a \theta'' = 0\end{aligned}$$

la care se adaugă ecuația legăturii ne-holonoame

$$(4) \quad x' \cos \theta + y' \sin \theta = 0$$

deci în total patru ecuații pentru determinarea celor 4 necunoscute  $x, y, \theta$  și  $\lambda$ .

Eliminarea lui  $\lambda$  între ecuațiile (1) și (2) dă

$$(m + \mu) (x'' \sin \theta - y'' \cos \theta) - \mu a \theta'' = 0.$$

Din această ecuație și ecuația (3) rezultă  $\theta'' = 0$ , deci  $\theta' = \omega$ , însemnând prin  $\omega$  o constantă, și

$$x'' \sin \theta - y'' \cos \theta = 0.$$

Ținând socoteală de ecuația (4) putem deci scrie

$$x'' \sin \theta - y'' \cos \theta + (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \theta' = 0$$

<sup>1)</sup> Aplicația teoremei lucrului virtual presupune, după cum s'a mai spus, ca lucrul forțelor de legătură să fie nul în deplasările compatibile cu legăturile. Ori, lucrul reacțiunilor normale din C și D este evident nul; lucrul frecării din C este nul pentru motivul că viteza lui C este nulă, iar lucrul tensiunilor din A și B este și el nul din cauza invariabilității lungimii AB.



adică.

$$d(x' \sin \theta - y' \cos \theta) = 0$$

și în consecință

$$(5) \quad x' \sin \theta - y' \cos \theta = -v$$

$v$  fiind o constantă.

Ca urmare, ecuațiile (4) și (5) rezolvate în raport de  $x'$  și  $y'$  ne dau

$$(6) \quad x' = -v \sin \theta, \quad y' = v \cos \theta$$

și, cum  $\theta = \omega t$ , obținem prin integrațiune

$$x = \frac{v}{\omega} \cos \omega t + c_1, \quad y = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + c_2$$

de unde

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{v^2}{\omega^2}.$$

Așa dar punctul A descrie un cerc de rază  $\frac{v}{\omega}$  cu o viteză constantă și egală cu  $v$  potrivit ecuațiilor (6); dreapta AB fiind neconținut perpendiculară pe direcția acestei viteze trece prin centrul cercului și prin urmare traectoria lui B este un cerc concentric cu cel dintâi.

**Observațiune.** S'ar părea la prima vedere, că în loc de a proceda așa cum s'a arătat mai sus, s'ar putea trage spre exemplu valoarea lui  $x'$  din ecuația legăturii ne-holonoame, care introdusă în expresia forței vii  $T$  ar face ca  $T$  să nu mai depindă decât de parametrii  $y$  și  $\theta$ ; ecuațiile mișcării s'ar obține atunci scriind cele două ecuații ale lui Lagrange referitoare acestor doi parametri.

Procedeul acesta conduce însă la concluzii false, pentru motivul că ecuațiile lui Lagrange rezultă din transformarea termenului

$$\sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right)$$

al ecuației generale a Dinamicii, în expresia

$$\sum \left( D_i \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q$$



iar nu din considerația directă a expresiei forței vii coprinzând un număr mai redus de parametri, grație relațiilor ne-holonoame existente. Transformarea în chestiune pretinde, după cum știm, ca cordonatele punctelor să poată fi exprimate în funcție de parametrii independenți  $q_1, q_2, \dots, q_r$  și ea nu poate avea loc când între acești parametri există vre o relație ne-integrabilă și deci nesusceptibilă de a micșora numărul parametrilor.

3. *Notă.* Ilustrul profesor *Appell* a dat o metodă<sup>1)</sup>, care permite de a stabili ecuațiile mișcării ori care ar fi sistemele de legături holonoame sau ne-holonoame.

Metoda constă în formarea expresiei

$$S = \frac{1}{2} \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

în care  $x', y', z'$  se exprimă în funcție de parametrii problemei  $q_1, q_2, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_{r+p}$  și derivatele acestor parametri de ordinul întâi și al doilea. Se profită apoi de cele  $p$  ecuații de legături ne-holonoame pentru a reduce la  $r$  numărul de parametri care să figureze în  $S$ <sup>(2)</sup>. Odată această transformare făcută, se formează derivatele parțiale

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_r}$$

și se scriu ecuațiile

$$(\alpha) \quad \frac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_2} = Q_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_r} = Q_r$$

termenii  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  fiind aceiași ca în ecuațiile lui Lagrange.

Cele  $r$  ecuații  $(\alpha)$  împreună cu cele  $p$  ecuații ale legăturilor ne-holonoame vor da valorile celor  $r+p$  parametri  $q_1, q_2, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_{r+p}$  în funcție de  $t$  și deci soluția problemei.

<sup>1)</sup> *P. Appell*, *Traité de Mécanique rationnelle*, vol. II, 1924, pag. 382.

<sup>(2)</sup> Se rezolvă adică cele  $p$  ecuații în raport de  $q'_{r+1}, q'_{r+2}, \dots, q'_{r+p}$  se formează apoi  $q''_{r+1}, q''_{r+2}, \dots, q''_{r+p}$  și se introduc ambele aceste sisteme de valori în expresia lui  $S$ .



Vedem astfel că reducerea numărului de parametri la minimum posibil, care nu se poate aplica forței vii  $T$  pentru a scrie direct ecuațiile lui Lagrange în cazul legăturilor ne-holonoame, se poate aplica funcției  $S$ .

Să aplicăm metoda profesorului Appell la exemplul precedent.

Derivatele de ordinul al doilea ale coordonatelor celor două puncte  $A$  și  $B$  sunt, respectiv,

$$x'' = x' \theta' - a \cos \theta \cdot \theta'^2 - a \sin \theta \cdot \theta'', \quad y'' = y' \theta' + a \sin \theta \cdot \theta'^2 + a \cos \theta \cdot \theta''.$$

Expresia funcției  $S$  este, în consecință,

$$(\beta) \quad 2S = m(x''^2 + y''^2) + \mu[(x' - a \cos \theta \cdot \theta')^2 + (y' + a \sin \theta \cdot \theta')^2].$$

Ori, din ecuația legăturii neholonoame

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = 0$$

deducem  $x' = -y' \operatorname{tg} \theta$  și prin urmare

$$x'' = -y'' \operatorname{tg} \theta - \frac{y' \theta'}{\cos^2 \theta}.$$

Substituind această valoare în egalitatea  $(\beta)$ ,  $S$  rămâne funcție numai de parametrii  $y$  și  $\theta$  și avem atunci

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y''} &= \frac{m + \mu}{\cos^2 \theta} y'' + \frac{(m + \mu) \sin \theta}{\cos^3 \theta} y' \theta' + \frac{a \mu}{\cos \theta} \theta'' \\ \frac{\partial S}{\partial \theta''} &= \mu a \left[ \frac{y''}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} y' \theta' + \theta'' \right]. \end{aligned}$$

Ecuațiile mișcării vor fi prin urmare, ținând socoteală că  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q_3$  sunt nuli,

$$(1) \quad (m + \mu) \cos \theta \cdot y'' + (m + \mu) \sin \theta \cdot y' \theta' + a \mu \cos^2 \theta \cdot \theta'' = 0$$

$$(2) \quad \cos \theta \cdot y'' + \sin \theta \cdot y' \theta' + a \cos^2 \theta \cdot \theta'' = 0$$

$$(3) \quad x' \cos \theta + y' \sin \theta = 0.$$

Ori, înmulțind ecuația (2) cu  $\mu$  și scăzând-o apoi din (1) obținem

$$(4) \quad \cos \theta \cdot y'' + \sin \theta \cdot y' \theta' = 0.$$

Ecuația (2) ne dă în consecință

$\theta'' = 0$  deci  $\theta' = \omega$  și  $\theta = \omega t$   
 $\omega$  fiind o constantă.



Ținând seama de aceste rezultate, ecuația (4) se scrie  
 $y'' \cos \omega t + \omega y' \sin \omega t = 0$   
 de unde deducem

$$\frac{y''}{y'} = -\omega \operatorname{tg} \omega t$$

și, prin integrațiune,

$\operatorname{Log} y' = \operatorname{Log} \cos \omega t + \operatorname{Log} v$       adică  $y' = v \cos \omega t$   
 însemnând prin  $v$  o constantă.

O nouă integrațiune ne dă apoi

$$(5) \quad y = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + c_2.$$

Ca urmare, din ecuația (3) rezultă

$$x' = v \sin \omega t$$

de unde

$$(6) \quad x = \frac{v}{\omega} \cos \omega t + c_1.$$

Eliminarea lui  $t$  între ecuațiile (5) și (6) ne dă în sfârșit

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{v^2}{\omega^2}.$$

Regăsim astfel rezultatele obținute mai sus prin utilizarea ecuațiilor lui Lagrange în combinație cu metoda multiplicatorilor.

## II. APLICAȚIUNEA ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE LA STUDIUL MIȘCĂRLOR RELATIVE.

1. Fie  $Oxyz$  un sistem de axe fixe,  $O'XYZ$  un sistem de axe mobile și  $S$  un sistem de puncte materiale în mișcare.

Știm, că mișcarea sistemului material  $S$  față de sistemul mobil  $O'XYZ$  poate fi tratată ca o mișcare absolută, dacă pentru fiecare punct al sistemului alăturăm forțelor realmente aplicate punctului, forța de inerție de antrenare și forța centrifugă compusă.

Aceasta fiind reamintit, să însemnăm prin  $q_1, q_2, \dots, q_r$  parametrii de care depinde mișcarea sistemului  $S$  față de sistemul de axe mobile  $O'XYZ$ . Cum mișcarea sistemului de axe  $O'XYZ$  în raport de  $Oxyz$  este presupusă ca fiind cunoscută, putem exprima proiecțiile tuturor forțelor pe axele mobile în



funcție de parametrii  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , de derivatele acestor parametri  $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$  și, eventual, de timpul  $t$ . Forța vie va fi deasemenea o funcție de aceleași variabile.

Astfel fiind, nimic nu împiedecă de a forma ecuațiile lui Lagrange și a studia mișcarea relativă pe baza acestor ecuații.

**2. Exemplu.** Fie  $Oy$  o dreaptă verticală fixă și  $P$  un plan care trece prin  $Oy$  și se învâртеște în jurul acestei drepte cu o viteză unghiulară constantă  $\omega$ . Să se determine mișcarea în planul  $P$  a unei bare grele  $AB$ .

Poziția barei în planul  $P$  poate fi definită prin cordonatele  $a, b$  ale centrului de greutate  $G$  și prin unghiul  $\theta$  al dreptei  $AB$  cu  $OX$ . Elementele  $a, b, \theta$  vor juca rolul parametrilor  $q_1, q_2, q_3$  din ecuațiile lui Lagrange.

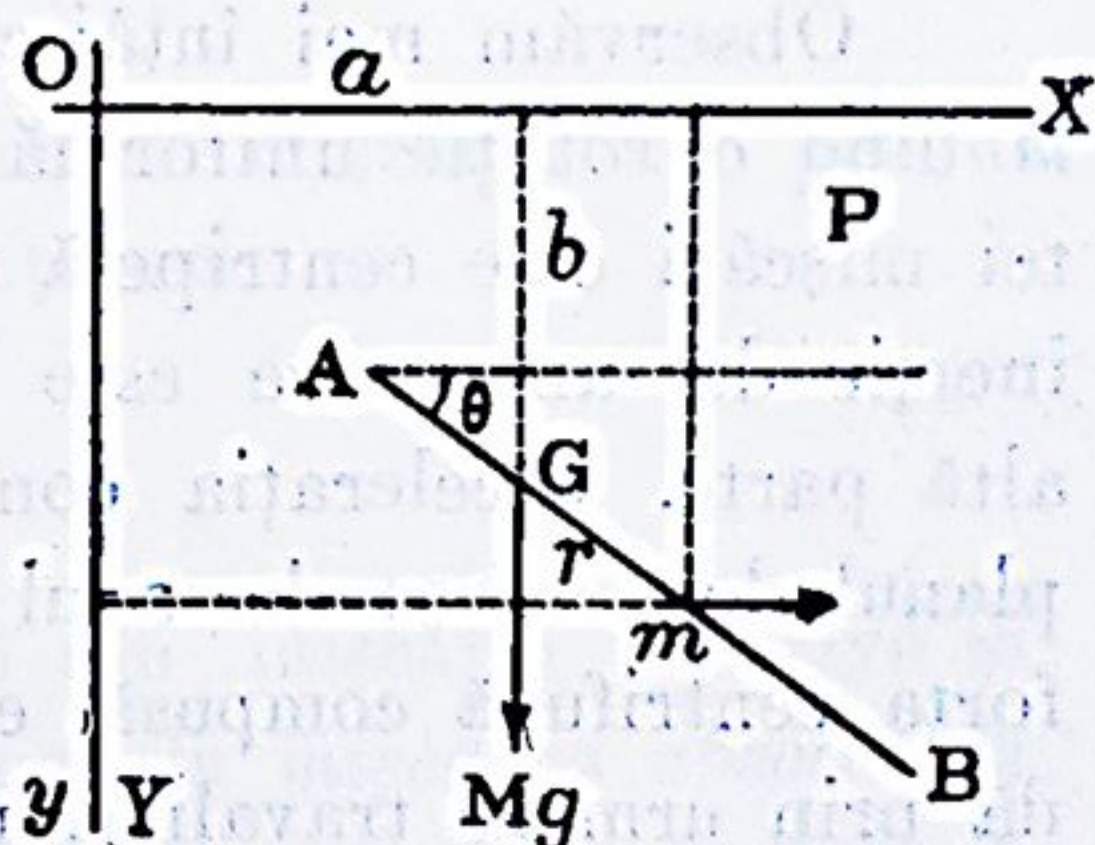


Fig. 166

Pentru un punct de masă  $m$  al barei avem, în planul  $P$ ,

$$X = a + r \cos \theta, \quad Y = b + r \sin \theta$$

însemnând prin  $r$  distanța algebrică a punctului  $m$  la  $G$ .

Deducem

$$X' = a' - r \sin \theta \cdot \theta', \quad Y' = b' + r \cos \theta \cdot \theta'$$

și în consecință

$$T_r = \frac{1}{2} \sum m v_r^2 = \frac{1}{2} \sum m \left[ (a' - r \theta' \sin \theta)^2 + (b' + r \theta' \cos \theta)^2 \right]$$

adică

$$T_r = \frac{1}{2} (a'^2 + b'^2) \sum m + \frac{1}{2} \theta'^2 \sum m r^2 + \theta' (b' \cos \theta - a' \sin \theta) \sum m r$$

sau, însemnând prin  $M$  masa totală a barei, prin  $MK^2$  valoarea sumei  $\sum m r^2$ , și pentru că suma  $\sum m r$  este o cantitate nulă,

$$T_r = \frac{1}{2} M (a'^2 + b'^2) + \frac{1}{2} MK^2 \theta'^2.$$



Aceasta este expresia forței vii din mișcarea relativă, în funcție de cei trei parametri  $a, b, \theta^1$ ). Deducem

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_r}{\partial a'} &= M a' , & \frac{\partial T_r}{\partial b'} &= M b' , & \frac{\partial T_r}{\partial \theta'} &= MK^2 \theta' \\ \frac{\partial T_r}{\partial a} &= 0 , & \frac{\partial T_r}{\partial b} &= 0 , & \frac{\partial T_r}{\partial \theta} &= 0 . \end{aligned}$$

Să calculăm acum termenii  $Q_1, Q_2, Q_3$  din ecuațiile lui Lagrange.

Observăm mai întâi că mișcarea de antrenare a unui punct  $m$  fiind o rotație uniformă în jurul axului  $Oy$ , accelerația acestei mișcări este centripetă și egală cu  $-X\omega^2$ , așa că forța de inerție de antrenare este centrifugă și egală cu  $mX\omega^2$ . Pe de altă parte, accelerația complementară fiind perpendiculară pe planul determinat de axul de rotație  $Oy$  și de viteza relativă, forța centrifugă compusă este perpendiculară pe planul  $P$ ; ea dă prin urmare travaliuri nule pentru ori-ce deplasări virtuale în acest plan.

Ori,  $Q_1 \delta a$  este travaliul virtual al forțelor când nu variază decât parametrul  $a$ . Fiecare punct  $m$  se mișcă atunci paralel cu  $OX$ ; travaliul greutății este nul pentru asemenea deplasare, iar acela al forțelor de inerție de antrenare egal cu  $\delta a \sum mX\omega^2$ . Avem deci  $Q_1 = \omega^2 \sum mX$  adică  $Q_1 = Ma\omega^2$ .

În mod analog, găsim că  $Q_2 = Mg$ . În ceea ce privește travaliul  $Q_3 \delta \theta$ , el corespunde unei rotații virtuale a barei în jurul punctului  $G$ ; în această mișcare greutatea totală dă un travaliu nul iar forțele de inerție de antrenare dau un travaliu egal cu  $-\delta \theta \sum (mX\omega^2)(r \sin \theta)$ . Rezultă că

$$\begin{aligned} Q_3 &= -\omega^2 \sin \theta \sum mXr \\ &= -\omega^2 \sin \theta \sum m(a + r \cos \theta) r = -\omega^2 \sin \theta [a \sum mr + \cos \theta \sum m r^2] \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Puteam aplica, bine înțeles, teorema lui Koenig pentru calcularea lui  $T_r$ . Ea ne ar fi dat

$$T_r = \frac{1}{2} M (a'^2 + b'^2) + \frac{1}{2} \sum m [(-r \sin \theta \cdot \theta')^2 + (r \cos \theta \cdot \theta')^2]$$

adică același rezultat ca mai sus, însă ceva mai expeditiv.



adică, ținând seama că  $\Sigma m r = 0$ ,

$$Q_3 = - M K^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Ecuatiile lui Lagrange sunt prin urmare

$$(1) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = a \omega^2, \quad \frac{d^2 b}{dt^2} = g, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \omega^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Cele două dintâi ne dau

$$a = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}, \quad b = \frac{1}{2} g t^2 + C t + D.$$

Cea de a treia este analoagă ecuației mișcării unui pendul simplu, căci, dacă punem  $2\theta = \varphi$ , obținem

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \omega^2 \sin \varphi.$$

*Notă.* Putem obține ecuațiile (1) ale mișcării relative și prin aplicațiunea ecuațiilor lui Lagrange la *mișcarea absolută* a barei  $AB$ , definind această mișcare prin rotația unghiulară dată  $\omega$  a planului  $P$  în jurul lui  $Oy$  și prin cei trei parametri  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$  ai mișcării barei în plan.

Pentru calculul forței vii  $T_a$ , se va exprima viteza absolută  $v_a$  în funcție de vitezele  $v_r$  și  $v_e$  care sunt funcții de cei trei parametri, ușoare de calculat ( $v_e$  coprinzând bine înțeles și pe  $\omega$ ). De altfel, cum viteza de antrenare  $v_e$  este perpendiculară pe planul  $P$ , avem  $v_a^2 = v_r^2 + v_e^2$ .

Singura forță de luat în considerație va fi greutatea  $Mg$  aplicată în  $G$ .

Se va găsi ca expresie a forței vii,

$$T_a = \frac{1}{2} M (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + K^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} M \omega^2 (K^2 \cos^2 \theta + a^2).$$

primul termen din membrul al doilea corespunzând sumei

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_r^2, \text{ iar celălalt sumei } \frac{1}{2} \Sigma m v_e^2.$$



## PARTEA IV.

# MIȘCAREA SOLIDELOR INVARIABILE.

### I. TEORIA MOMENTELOR DE INERȚIE.

1. **Definiție,** Fie o dreaptă  $\Delta$  și un punct material de masă  $m$  situat la distanța  $r$  de  $\Delta$ .

Se numește *moment de inerție* al punctului material în raport de  $\Delta$ , produsul  $m \cdot r^2$ .

Dacă considerăm un sistem de puncte materiale, momentul de inerție al sistemului în raport de  $\Delta$  va fi prin definiție

$$I = \sum mr^2$$

adică o sumă de produse de forma  $mr^2$ .

Fie  $M$  masa totală a sistemului. Să determinăm o lungime  $K$  așa fel încât să avem

$$MK^2 = \sum mr^2.$$

Lungimea  $K$  se numește *rază de rotație* a sistemului. Ea reprezintă distanța față de  $\Delta$ , la care presupunând așezată întreaga masă  $M$  a sistemului, concentrată într'un singur punct, momentul de inerție al acestui punct material în raport de  $\Delta$  este egal cu momentul de inerție al sistemului.

În particular, dacă toate punctele materiale ar fi situate la aceeași distanță  $r$  de dreapta  $\Delta$ , adică dacă ar fi așezate pe un cilindru circular, am avea

$$I = \sum mr^2 = r^2 \sum m = Mr^2$$

și atunci  $K$  ar fi egal cu  $r$ .

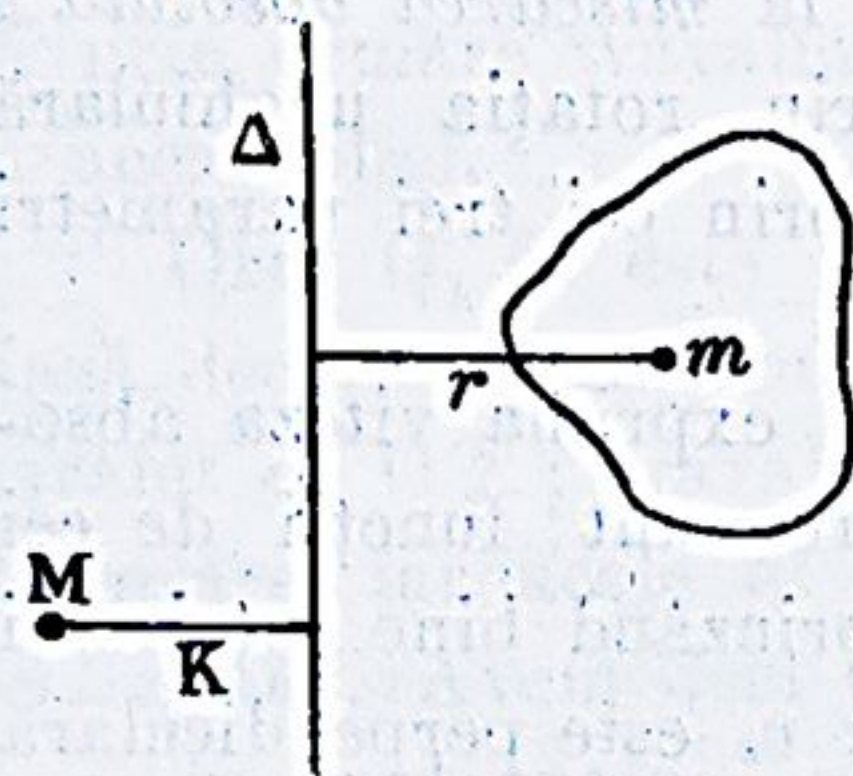


Fig. 167



Insfârșit, în cazul când solidul ar fi plan, momentul său de inerție, în raport de o dreaptă perpendiculară planului, este evident egal cu momentul de inerție în raport de punctul unde perpendiculara întâlnește planul.

**2. Relațiuni între momentele de inerție luate în raport de drepte paralele.** Fie  $\Delta$  și  $\Delta'$  două drepte paralele și P un punct oarecare dintr'un sistem, situat la distanțele  $AP = r$  și  $A'P = r'$  de aceste drepte.

Insemnând prin  $d$  distanța dintre cele două drepte și prin  $x$  distanța punctului A până la proiecția Q a punctului P pe  $AA'$ , avem

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2dx.$$

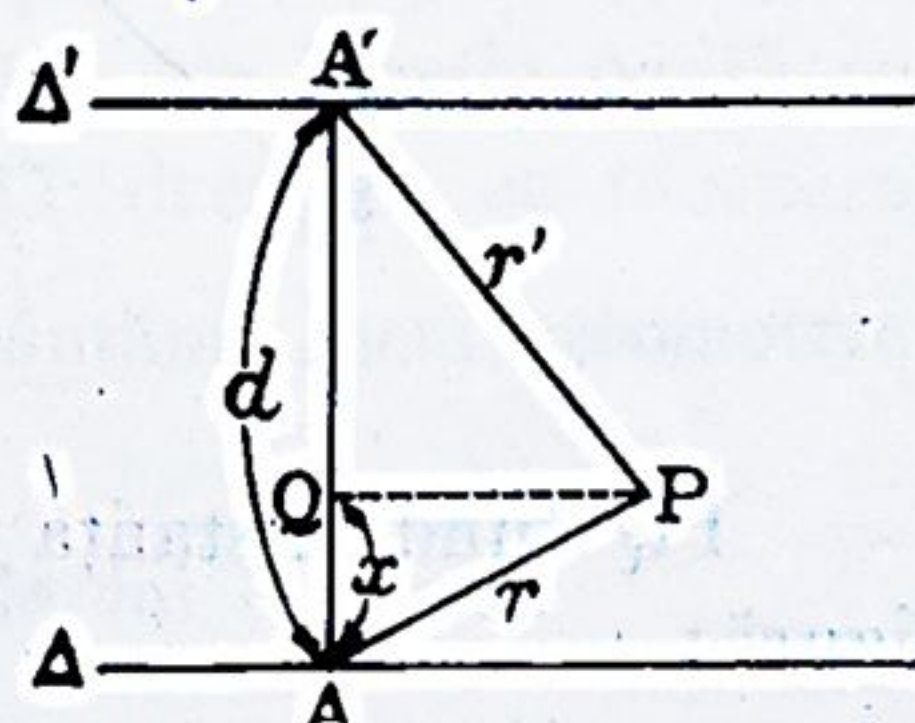


Fig. 168

Inmulțind ambii membri cu masa  $m$  a punctului P și adunând rezultatele analoage pentru toate punctele sistemului, obținem

$$\sum mr'^2 = \sum mr^2 + Md^2 - 2d \sum mx.$$

Această relație se simplifică dacă presupunem că dreapta  $\Delta$  trece prin centrul de greutate al sistemului. Avem în adevăr atunci  $\sum mx = 0$  și prin urmare

$$\sum mr'^2 = \sum mr^2 + Md^2.$$

sau, mai pe scurt,

$$(1) \quad I' = I_G + Md^2.$$

Deci: *Momentul de inerție în raport de o dreaptă oarecare, este egal cu momentul de inerție luat în raport de paralela dusă acestei drepte prin centrul de greutate, plus produsul masei sistemului cu patrul distanței centrului său de greutate la dreapta considerată.*

**3. Relațiuni între momentele de inerție luate în raport de drepte concurente.** Fie un punct O și o dreaptă oarecare  $\Delta$  trecând prin acest punct. Să însemnăm prin  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unghiurile pe



care le face  $\Delta$  cu trei axe dreptunghiulare duse prin  $O$ , și prin  $x, y, z$  coordonatele unui punct oarecare  $P$  al sistemului.

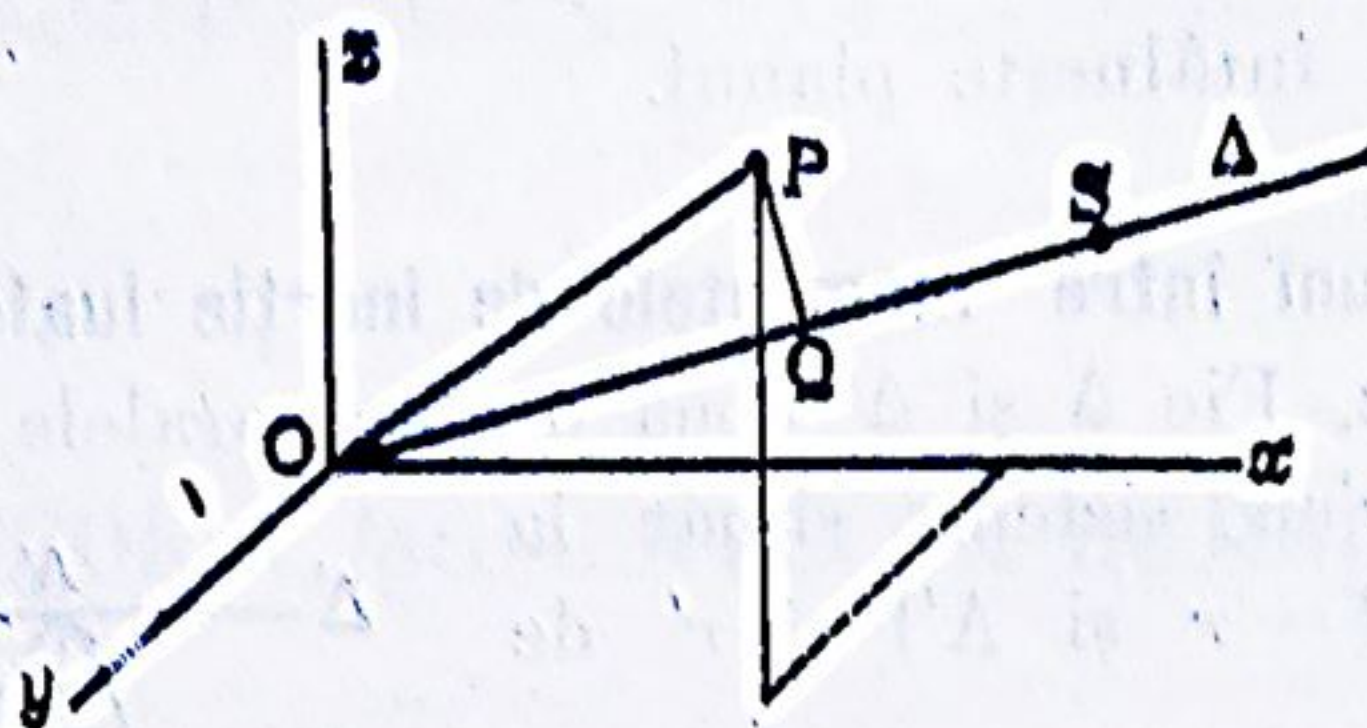


Fig. 160

$PQ$  fiind distanța punctului  $P$  la dreapta  $\Delta$ , avem pe figură:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2.$$

Însă  $OP$  fiind suma geometrică a vectorilor  $x, y, z$ , proiecția sa  $OQ$  pe dreapta  $\Delta$  este egală cu suma proiecțiilor vectorilor  $x, y, z$  pe  $\Delta$ , deci

$$OQ = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

și, în consecință,

$$\overline{PQ}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

ceea ce este tot una cu

$$\overline{PQ}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Punând  $PQ = r$  și dezvoltând membrul al doilea, putem scrie

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2 yz \cos \beta \cos \gamma - 2 zx \cos \gamma \cos \alpha - 2 xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Deducem, pentru momentul de inerție al sistemului în raport de  $\Delta$ ,

$$(2) \quad I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 D \cos \beta \cos \gamma - 2 E \cos \gamma \cos \alpha - 2 F \cos \alpha \cos \beta$$



punând

$$(3) \quad \begin{aligned} A &= \sum m (y^2 + z^2), & B &= \sum m (z^2 + x^2), & C &= \sum m (x^2 + y^2) \\ D &= \sum m y z, & E &= \sum m z x, & F &= \sum m x y. \end{aligned}$$

Coeficienții  $A, B, C$  reprezintă, respectiv, momentele de inerție ale sistemului în raport de axe  $Ox, Oy, Oz$ .

4. **Elipsoid de inerție.** Pentru a reprezenta în mod geometric legea după care variază momentul de inerție odată cu direcția dreptei  $\Delta$ , să purtăm pe această dreaptă cu început din  $O$  lungime  $OS$  egală cu  $\frac{1}{\sqrt{I}}$  și să căutăm locul geometric al punctului  $S^1$ .

Insemnând prin  $X, Y, Z$  coordonatele lui  $S$ , avem

$$\cos \alpha = \frac{X}{OS} = X \sqrt{I}, \quad \cos \beta = Y \sqrt{I}, \quad \cos \gamma = Z \sqrt{I}.$$

Substituind aceste valori în egalitatea (2) obținem

$$(4) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1.$$

Această ecuație reprezintă o suprafață de gradul al doilea, având punctul  $O$  drept centru. Cum momentul de inerție  $I$  nu devine nul pentru nici una din dreptele  $\Delta$  care trec prin  $O$ , raza vectoare  $OS$  nu devine niciodată infinită. În consecință, ecuația (4) reprezintă un elipsoid; el poartă numele de *elipsoidul de inerție al sistemului pentru punctul  $O$* .

Axele acestui elipsoid sunt zise *axele principale de inerție* pentru punctul  $O$ . Dacă le luăm drept axe coordonate, ecuația elipsoidului se simplifică reducându-se la

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

ecuație în care coeficienții  $A, B, C$  au bine înțeles alte valori decât în ecuația (4).

Valoarea lui  $I$  devine

$$(5) \quad I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

<sup>1)</sup> Evident că ar fi mai simplu de a lua  $OS = I$ , însă locul geometric ar fi atunci o suprafață de gradul al șaselea.



Coeficienții  $A, B, C$  reprezintă momentele de inerție în raport de axele elipsoidului, zise *momente de inerție principale pentru punctul  $O$* <sup>1)</sup>.

Însfârșit, coeficienții  $D, E, F$  fiind nuli, avem

$$(6) \quad \sum myz = 0, \quad \sum mzx = 0, \quad \sum mxy = 0.$$

Două dintre aceste trei egalități, spre exemplu cele două dintâi, exprimă că ecuația (4)-a elipsoidului nu conține pe  $Z$  la puterea întâia; ele constituiesc prin urmare condițiile necesare și suficiente pentru ca axul  $Oz$  să fie ax principal de inerție pentru origina  $O$ .

*Elipsoid central.* La fiecare punct din spațiu corespunde, pentru un sistem material determinat, un elipsoid de inerție; acela dintre elipsoide care corespunde centrului de greutate al sistemului, poartă numele de *elipsoid central*.

**5. Condiție ca o dreaptă să fie ax principal de inerție pentru unul din punctele ei.**

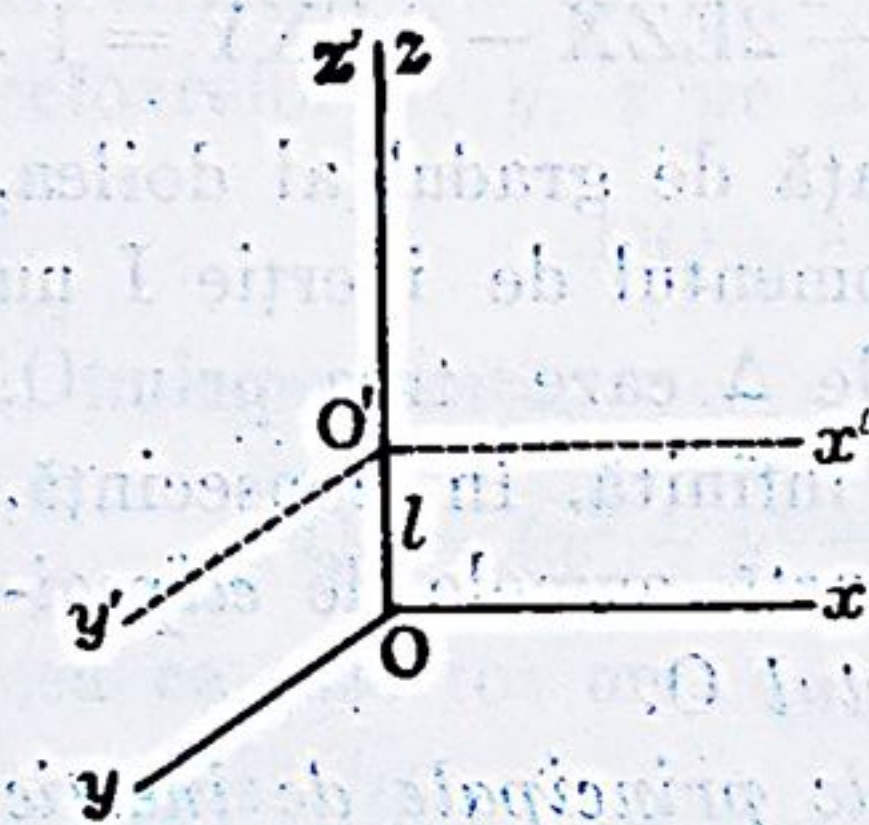


Fig. 170

Să luăm dreapta dată ca ax  $Oz$  al unui sistem dreptunghiular  $Oxyz$ . Fie  $O'$  punctul de pe  $Oz$ , situat la distanța  $OO' = l$ , pentru care dreapta este ax principal de inerție. Mutând axele  $Ox$  și  $Oy$  paralel cu ele însăși în punctul  $O'$ , obținem un nou sistem  $O'x'y'z'$  în raport de care ecuația elipsoidului de inerție pentru punctul  $O'$  nu conține termeni în  $z'$  la puterea întâia. Avem deci

$$\begin{aligned} \sum m y'z' &= 0, & \sum m z'x' &= 0 \\ \text{adică} & & & \\ \sum m y(z-l) &= 0, & \sum m x(z-l) &= 0 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Dacă însemnăm prin  $a, b, c$  lungimile celor 3 semi-axe ale elipsoidului, avem, potrivit formulei inițiale  $OS = \frac{1}{\sqrt{I}}$ , egalitățile

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$



sau

$$(7) \quad \Sigma myz - lMb = 0, \quad \Sigma mzx - lMa = 0$$

însemnând prin  $a$  și  $b$  cordonatele centrului de greutate și prin  $M$  masa totală a sistemului de puncte materiale.

Pentru ca cele două ecuații (7) să dea aceeași valoare pentru  $l$  trebuie să avem

$$\frac{\Sigma myz}{\Sigma mzx} = \frac{b}{a}.$$

Această egalitate reprezintă condiția căutată. Dacă ea are loc, distanța  $l$  se determină prin una oarecare din cele două ecuații (7).

În cazul particular când centrul de greutate se află în planul  $xOz$ , avem  $b = 0$  și ecuațiile (7) dau ca condiție  $\Sigma myz = 0$ , iar ca valoare pentru  $l$ :

$$l = \frac{\Sigma mzx}{Ma}.$$

6. Condiția ca o dreaptă să fie ax principal de inerție pentru două din punctele ei. Să luăm dreapta dată ca ax  $Oz$  și să presupunem că ea este ax principal de inerție pentru origina  $O$ . Avem atunci

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0.$$

Ca dreapta dată să fie ax principal de inerție pentru un al doilea din punctele ei  $O'$ , trebuie să mai avem potrivit ecuațiilor (7):

$$\Sigma myz = lMb, \quad \Sigma mzx = lMa.$$

Deci

$$lMb = 0, \quad lMa = 0$$

adică  $a = 0$ ,  $b = 0$ , ceea ce înseamnă că centrul de greutate trebuie să se găsească pe dreaptă. În asemenea condiții însă,  $l$  devine nedeterminat, cu alte cuvinte dreapta considerată este ax principal de inerție pentru ori și care din punctele ei și în particular pentru centrul de greutate; ea este deci un ax al elipsoidului central de inerție.



Aşa dar: a) *Un ax al elipsoidului central este ax principal de inerție pentru ori și care din punctele sale;*

b) *Pentru ca Oz să fie un ax al elipsoidului central de inerție, trebuie să avem în același timp*

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \Sigma m yz = 0, \quad \Sigma m zx = 0.$$

### 7. Calcularea momentelor de inerție ale unui sistem continuu de puncte materiale.

Operația se execută după aceleași principii pe care le-am expus la capitolul determinării centrelor de greutate. În consecință, dacă raportăm sistemul la 3 axe dreptunghiulare, coeficienții elipsoidului de inerție pentru origină vor avea ca expresiuni potrivit formulelor (3):

$$\begin{aligned} A &= \iiint \rho (y^2 + z^2) dx dy dz, & D &= \iiint \rho yz dx dy dz \\ B &= \iiint \rho (z^2 + x^2) dx dy dz, & E &= \iiint \rho zx dx dy dz \\ C &= \iiint \rho (x^2 + y^2) dx dy dz, & F &= \iiint \rho xy dx dy dz. \end{aligned}$$

Pentru solidele omogene de formă geometrică, se calculează cele 3 momente de inerție principale pentru centrul de greutate. Odată cunoscute aceste 3 momente, formula (5) dă momentul de inerție în raport de ori ce dreaptă trecând prin centrul de greutate, iar formula (1) permite apoi de a calcula momentul de inerție în raport de o dreaptă oarecare.

### 8. Considerațiuni de avut în vedere pentru calcularea momentelor de inerție ale solidelor omogene.

a). *Când un solid omogen are un ax de simetrie, acesta este un ax al elipsoidului central de inerție, căci dacă-l luăm ca ax Oz al unui sistem dreptunghiular, cum centrul de greutate se găsește pe ax, avem  $a = 0$ ,  $b = 0$  și pe de altă parte  $\Sigma m yz = 0$ ,  $\Sigma m zx = 0$  de oarece la fiecare masă de coordonate  $x, y, z$  corespunde o masă egală de coordonate  $-x, -y, z$ .*

b). *Când un solid omogen are un plan de simetrie, ori ce dreaptă perpendiculară pe plan este ax principal de inerție*



pentru punctul unde întâlnește planul, căci dacă luăm dreapta ca ax  $Oz$ , la fiecare masă de coordonate  $x, y, z$  corespunde o masă egală de coordonate  $x, y, -z$  și prin urmare  $\sum m yz = 0$ ,  $\sum m zx = 0$ .

c). Când un solid omogen este de revoluție, elipsoidul de inerție pentru ori ce punct al axului de revoluție este și el de revoluție în jurul aceleiași ax.

În adevăr, axul de revoluție fiind un ax de simetrie, este ax al elipsoidului central de inerție și prin urmare principal de inerție pentru ori și ce punct al său. Celelalte două axe ale elipsoidului de inerție sunt deci coprinse în planul perpendicular axului dus prin punctul considerat. Ori, toate momentele de inerție în raport de dreptele conținute în acest plan și pornind din punctul considerat sunt evident egale unele cu altele. Așa dar aceste drepte sunt toate principale de inerție pentru acel punct<sup>1)</sup>, adică sunt axe ale elipsoidului care este astfel un elipsoid de revoluție.

*Notă.* Ca și în Nota de la pag. 153 referitoare la centrele de greutate, vom observa că rezultatele specificate la cele trei litere a), b), c) de mai sus rămân adevărate și în cazul când solidul considerat nu este omogen însă prezintă particularitatea că *punctele sale care se corespund simetric au aceeași masă.*

Astfel este cazul proiectilelor de artilerie încărcate cu exploziv. Axul lor de figură, care este ax de revoluție, este principal de inerție pentru ori și ce punct al său, elipsoidul respectiv de inerție fiind și el de revoluție în jurul aceleiași ax.

## II. MOMENTELE DE INERȚIE A CĂTORVA VOLUME OMOGENE.

Vom calcula numai cele trei momente de inerție principale pentru centrul de greutate, presupunând corpurile omogene și cu o densitate  $\rho = 1$ , ceea ce permite de a confunda elementul de

---

<sup>1)</sup> Aceasta se mai putea stabili și prin aplicația rezultatului dela litera b) căci toate planurile duse prin axul de revoluție sunt planuri de simetrie, așa că ori ce dreaptă dusă prin punctul ales, perpendicular pe aceste planuri și deci perpendiculară pe ax, este ax principal de inerție pentru acel punct.



massă cu elementul de volum. După cum am spus mai sus, odată cunoscute aceste trei momente, formulele (5) și (1) ne permit apoi să determinăm momentul de inerție al corpului considerat în raport de ori și ce dreaptă a spațiului.

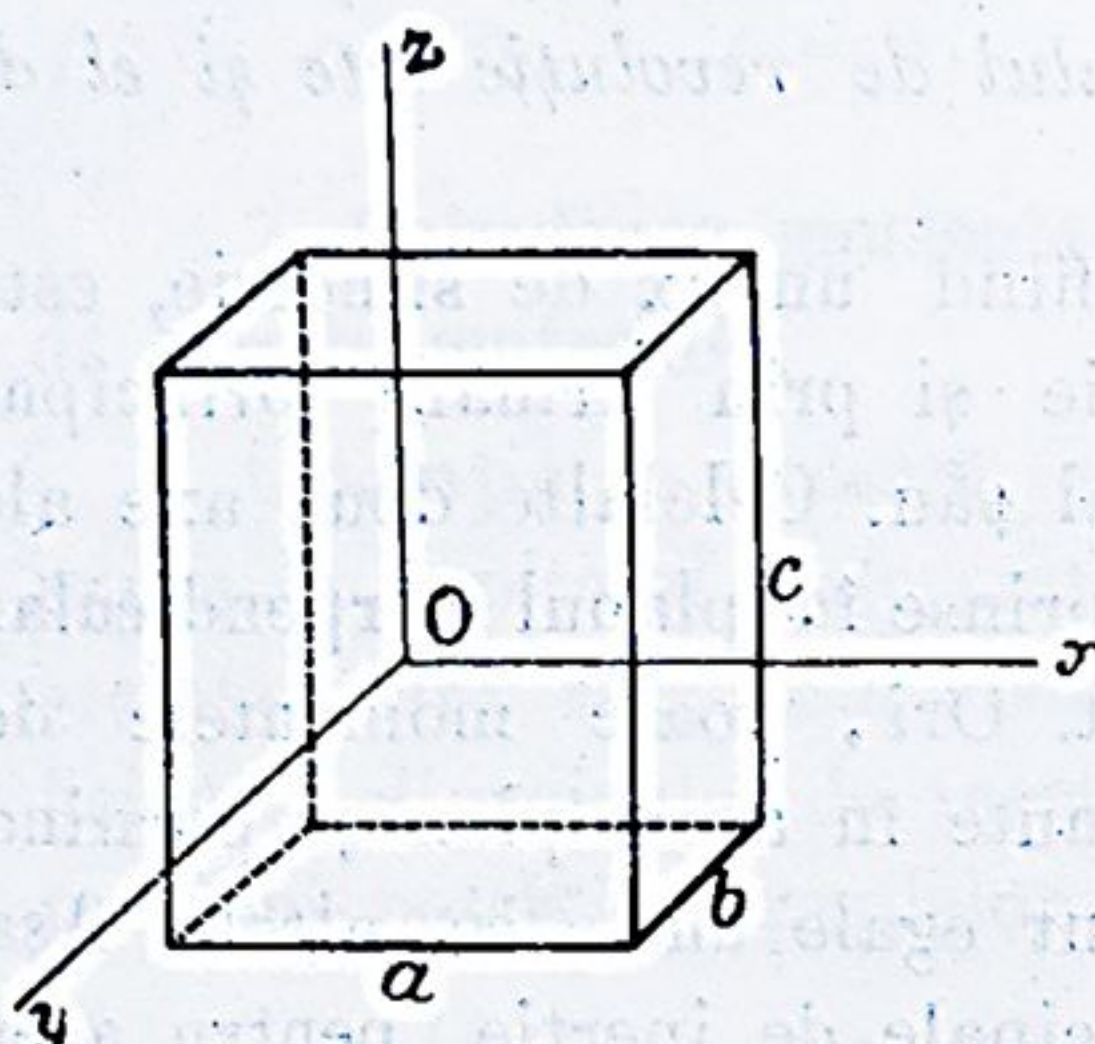


Fig. 171

### 1. Paralelipiped dreptunghiu.

Centrul de greutate este în centrul de figură O, iar paralelele Ox, Oy, Oz duse muchiilor prin punctul O sunt axele principale de inerție pentru acest punct, potrivit demonstrațiilor dela Nr.8 precedent.

Vom avea de calculat cele 3 integrale:

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$B = \iiint (z^2 + x^2) dx dy dz, \quad C = \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Ori, însemnând prin a, b, c lungimile celor 3 muchii ale paralelipipedului, avem

$$\iiint x^2 dx dy dz = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz = bc \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{12} a^3 b c$$

și de asemenea

$$\iiint y^2 dx dy dz = \frac{1}{12} a b^3 c, \quad \iiint z^2 dx dy dz = \frac{1}{12} a b c^3.$$

Deducem

$$A = \iiint y^2 dx dy dz + \iiint z^2 dx dy dz = \frac{1}{12} a b c (b^2 + c^2)$$

$$B = \frac{1}{12} a b c (c^2 + a^2); \quad C = \frac{1}{12} a b c (a^2 + b^2).$$

Pe de altă parte, cum masa M a paralelipipedului redu-



să la volumul  $V$  are ca valoare  $abc$ , vedem că patratele celor trei raze de rotație corespunzătoare momentelor de inerție  $A, B, C$  au ca expresii, potrivit formulei  $MK^2 = \sum m r^2$ ,

$$\frac{1}{12} (b^2 + c^2), \quad \frac{1}{12} (c^2 + a^2), \quad \frac{1}{12} (a^2 + b^2).$$

Dacă presupunem  $a < b < c$  observăm că  $A > B > C$ , însă, dacă însemnăm prin  $a', b', c'$  semi-axele elipsoidului de inerție, avem  $a' < b' < c'$ , căci

$$a' = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b' = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

**2. Cilindru circular.** Centrul de greutate este pe axul cilindrului, la jumătatea lungimei sale. Să luăm acest punct ca origine a unui sistem de coordonate dreptunghiulare, axul  $Oz$  fiind chiar axul cilindrului iar celelalte două axe  $Ox$  și  $Oy$  orientate într'un mod oarecare în planul dus prin  $O$  perpendicular pe  $Oz$ . Aceste trei axe sunt axe principale de inerție pentru centrul de greutate.

Să calculăm mai întâi momentul de inerție în raport de axul  $Oz$ . Pentru aceasta, să descompunem cilindrul în straturi concentrice de grosime  $dr$ ; dacă însemnăm prin  $h$  înălțimea cilindrului și prin  $R$  raza sa, momentul de inerție al unui strat în raport de  $Oz$  va avea ca expresie <sup>1)</sup>  $2\pi h r dr \cdot r^2$  și prin urmare

$$C = \int_0^R 2\pi h r dr \cdot r^2 = 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4.$$

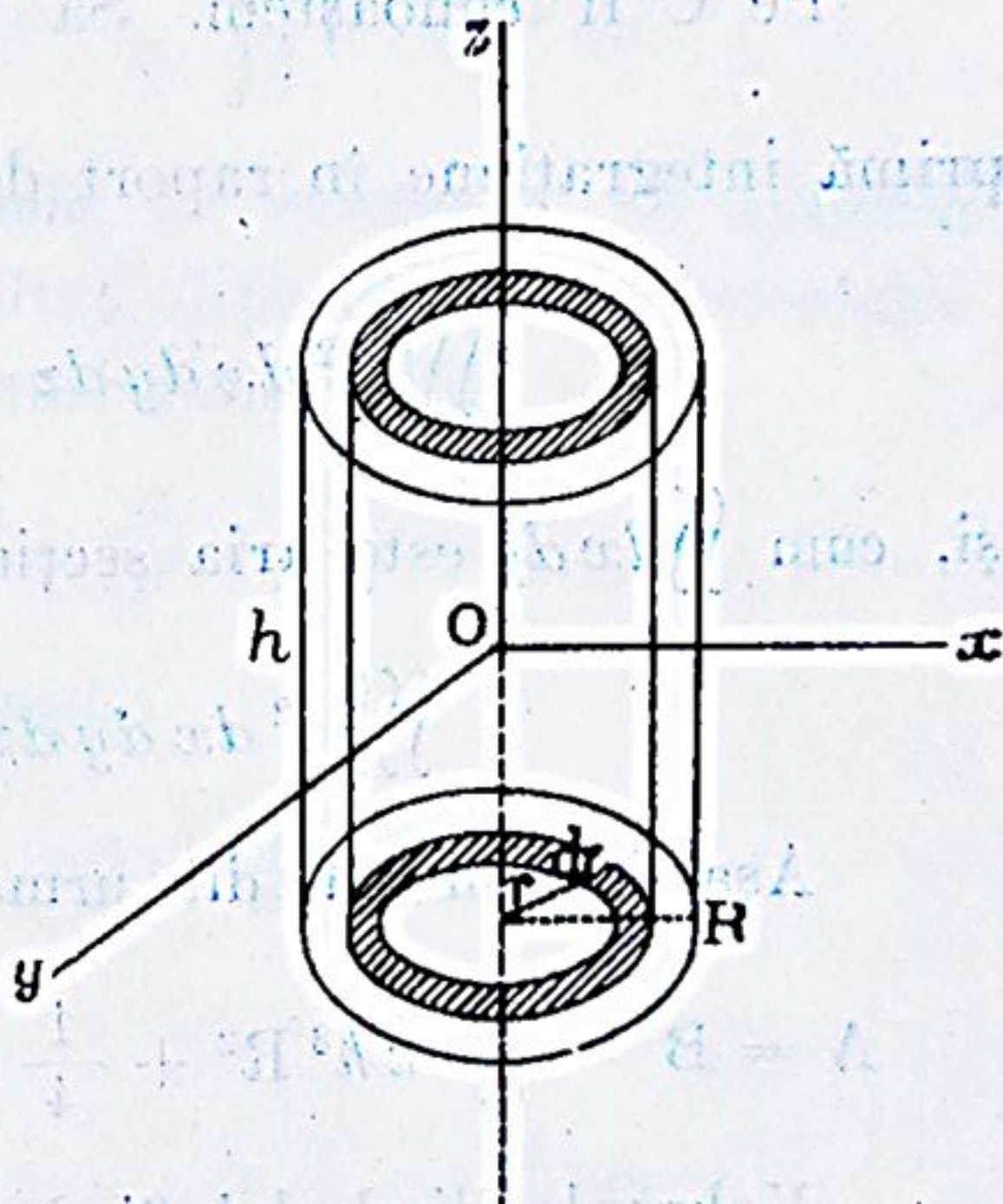


Fig. 172

<sup>1)</sup> Volumul cilindrului de rază  $r$  fiind  $\pi r^2 h$ , diferențiala sa când nu variază decât  $r$  este  $2\pi h r dr$ .



Cum cilindrul circular este un corp de revoluție, elipsoidul de inerție pentru ori-ce punct al axului Oz este și el de revoluție în jurul lui Oz; deci  $A = B$ . Ori

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad B = \iiint (z^2 + x^2) dx dy dz,$$

$$C = \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

prin urmare

$$A = B = \frac{1}{2} (A + B) = \frac{1}{2} \iiint (2z^2 + x^2 + y^2) dx dy dz$$

sau încă

$$A = B = \iiint z^2 dx dy dz + \frac{1}{2} C.$$

Pe C îl cunoaștem. Să calculăm pe celălalt termen. O primă integrațiune în raport de  $z$  dela  $-\frac{h}{2}$  la  $+\frac{h}{2}$  ne dă

$$\iiint z^2 dx dy dz = \frac{1}{12} h^3 \iint dx dy$$

și, cum  $\iint dx dy$  este aria secțiunii drepte a cilindrului, rezultă că

$$\iiint z^2 dx dy dz = \frac{1}{12} \pi h^3 R^2.$$

Așa dar, în cele din urmă,

$$A = B = \frac{1}{12} \pi h^3 R^2 + \frac{1}{4} \pi h R^4 = \frac{\pi}{4} h R^2 \left( R^2 + \frac{1}{3} h^2 \right).$$

Volumul cilindrului fiind  $\pi R^2 h$ , patratele celor două raze de girație care corespund momentelor de inerție A și C sunt respectiv egale cu

$$\frac{1}{4} \left( R^2 + \frac{1}{3} h^2 \right), \quad \frac{1}{2} R^2.$$

**3. Momentul de Inerție al unui solid de revoluție în raport de axul său.** Să considerăm cilindrul elementar de înălțime  $dz$



coprins între două planuri perpendiculare axului. Momentul său de inerție în raport de Oz este, după cum s'a văzut mai sus,

$$\frac{1}{2} \pi x^4 dz$$

$x$  fiind raza cilindrului. Momentul de inerție al întregului solid va fi în consecință

$$C = \frac{\pi}{2} \int x^4 dz.$$

Insă, dacă ecuația curbei meridiene este  $f(x, z) = 0$ , deducem din ea  $x = \varphi(z)$  și prin urmare

$$C = \frac{\pi}{2} \int [\varphi(z)]^4 dz.$$

*Elipsoid de revoluție.* Să aplicăm acest rezultat elipsoidului de revoluție a căruia curbă meridiană este

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Deducem

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - z^2)$$

asa că avem

$$C = \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \int_{-a}^{+a} (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{16}{15} a^5$$

adică

$$C = \frac{8}{15} \pi a b^4.$$

Volumul elipsoidului fiind egal cu  $\frac{4}{3} \pi a b^3$ , patraturul razei de girație este  $\frac{2}{5} b^2$ .

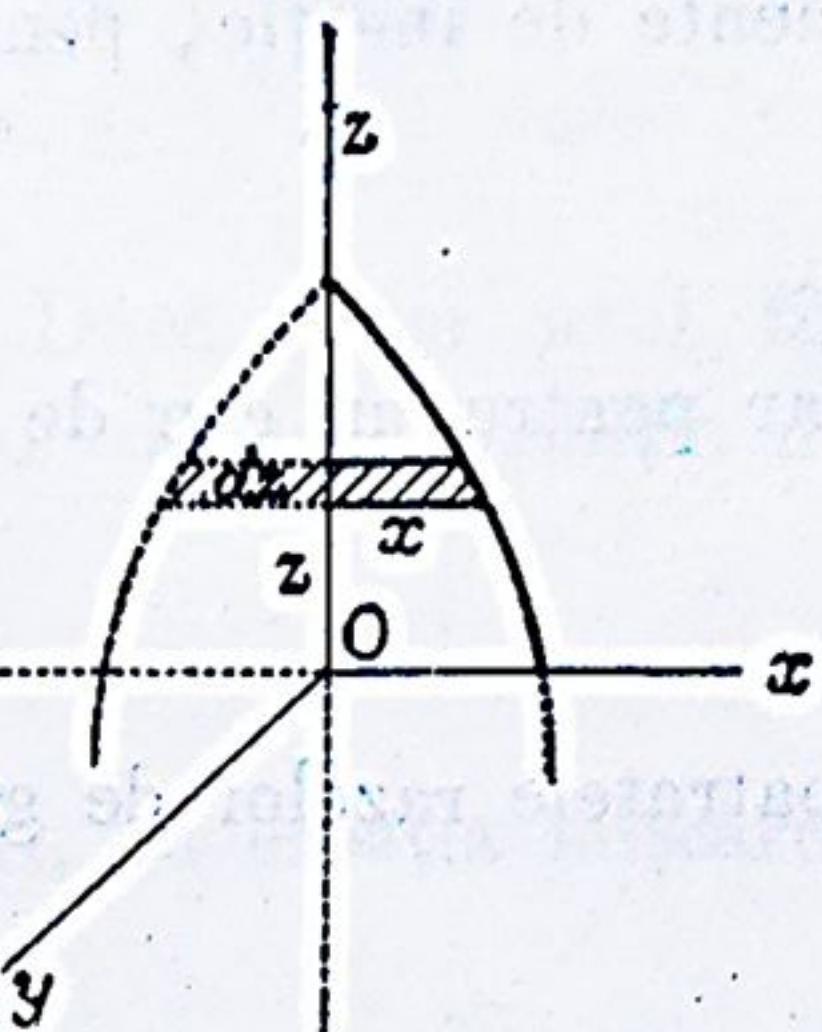


Fig. 173

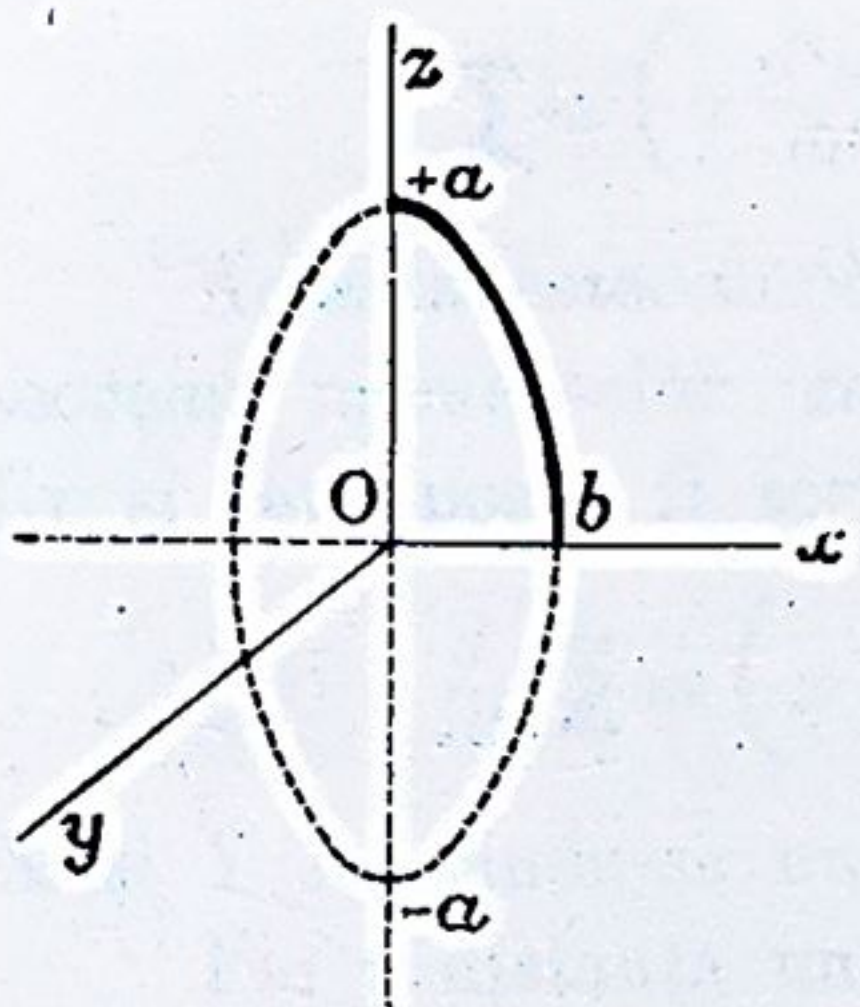


Fig. 174



**Sferă și con de revoluție.** În mod analog, găsim ca momente de inerție, pentru o sferă de rază  $R$ ,

$$C = \frac{8}{15} \pi R^5$$

iar pentru un con de revoluție de înălțime  $h$  și rază la bază  $R$ ,

$$C = \frac{\pi}{10} R^4 h$$

patratele razelor de girație fiind respectiv,

$$\frac{2}{5} R^2, \quad \frac{3}{10} R^2.$$





### III. MIȘCAREA UNUI SOLID IN JURUL UNUI AX FIX.

1. **Ecuția diferențială a mișcării.** Dacă luăm axul fix drept ax Oz al unui sistem dreptunghiular de axe, condiția de echilibru a solidului fiind

$$\Sigma (xY - yX) = 0$$

rezultă, potrivit principiului lui d'Alembert, că ecuația mișcării solidului în jurul axului fix va fi

$$\Sigma \left[ x \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y \left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \right] = 0$$

sau

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (xY - yX).$$

Aceasta este, după cum se vede, ecuația din care se deduce teorema momentelor cantităților de mișcare în raport de axul fix și care poate fi scrisă

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma (xY - yX)$$

X și Y referindu-se numai la *forțele direct aplicate*.

Fie  $r$  distanța unuia oarecare M din punctele solidului la axul fix și  $\omega$  viteza unghiulară a solidului în momentul  $t$ . Cantitatea de mișcare a punctului M fiind un vector egal cu  $m r \omega$  și tangent circumferinței pe care o descrie M în mișcarea sa de rotație, momentul cantității de mișcare în raport de axul fix Oz este egal cu  $m r^2 \omega$  așa că aplicația ecuației (1) ne dă

$$\frac{d}{dt} \Sigma m r^2 \omega = \Sigma (xY - yX)$$

adică

$$\frac{d}{dt} \omega \Sigma m r^2 = \Sigma (xY - yX)$$

sau

$$(2) \quad I \frac{d\omega}{dt} = N$$

punând  $I = \Sigma m r^2$  și  $N = \Sigma (xY - yX)$ .



Dacă însemnăm prin  $\theta$  unghiul pe care-l descrie raza vectorie  $r$  a punctului  $M$  cu începere de la un plan fix, spre exemplu dela planul  $xOz$ , avem  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  și ecuația (2) se mai poate scrie

$$(2)^{bis} \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N.$$

Bine înțeles că puteam ajunge la această ecuație și înlocuind în primul membru al formulei (1) pe  $x$  și  $y$  prin expresiile

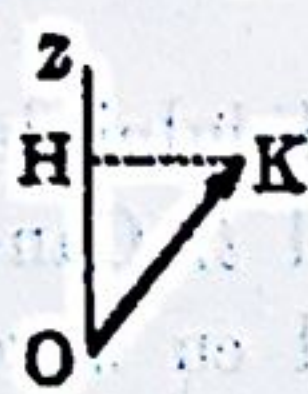
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Ecuația (2) sau (2)<sup>bis</sup> exprimă următorul rezultat: *Accele-  
rația unghiulară a unui solid care se învâртеște în jurul unui  
ax fix, este egală cu câtul dintre suma momentelor forțelor  
direct aplicate și momentul de inerție al solidului, luate amân-  
două în raport de axul fix.*

Să observăm că suma momentelor cantităților de mișcare (momentul cinetic) în raport de axul fix are ca expresie

$$\Sigma mr^2\omega = I\omega^1)$$

<sup>1)</sup> a). Fie  $OK$  momentul cinetic în raport de origina  $O$ , și  $OH$  proiecția lui  $OK$  pe  $Oz$ .



$OH$  fiind egal cu  $I\omega$ , ecuația (2) exprimă că viteza  $I \frac{d\omega}{dt}$  a punctului  $H$  pe  $Oz$  este egală cu  $N$ .

b). Să calculăm proiecțiile pe  $Ox$  și  $Oy$  ale lui  $OK$ . Acestea sunt respectiv egale cu

$$\text{Fig. 175} \quad \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \text{ și } \Sigma m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right).$$

Orî, pentru un punct  $M$ , avem

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= \text{const.} \\ \frac{dx}{dt} &= -\omega y, & \frac{dy}{dt} &= \omega x, & \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Făcând aceste înlocuiri sub cele două semne  $\Sigma$  se obține  
—  $\omega \Sigma m x z$  și —  $\omega \Sigma m z y$ .

Vectorul  $OK$  nu coincide prin urmare cu  $Oz$  decât dacă avem în același timp

$$\Sigma m x z = 0 \text{ și } \Sigma m z y = 0$$

adică dacă axul  $Oz$  este principal de inerție pentru punctul  $O$ .



iar forța vie este

$$T = \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

De altfel, aplicația teoremei forțelor vii ne dă

$$dT = d\theta \Sigma (xY - yX)$$

căci, fiind vorba de o mișcare de rotație, travaliul elementar al forțelor este egal cu momentul lor în raport de axul de rotație, înmulțit cu deplasarea unghiulară elementară  $d\theta$ . Deci

$$(3) \quad d \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = N d\theta$$

adică

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} dt = N d\theta$$

și prin urmare simplificând cu  $d\theta$ ,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

care este ecuația (2) bis.

2. **Integrațiunea ecuației diferențiale a mișcării.**  $N$ , fiind în general funcție de  $t$ ,  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ , ecuația (2) bis se prezintă sub forma

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \left( t, \theta, \frac{d\theta}{dt} \right).$$

Integrațiunea acestei ecuații diferențiale dă pe  $\theta$  în funcție de  $t$  și de două constante arbitrare care corespund valorilor inițiale  $\theta_0$  și  $\omega_0$ .

În cazul când  $N$  este funcție numai de  $\theta$ , integrațiunea se reduce la simple cuadraturi. În adevăr, punând  $N = f(\theta)$ , ecuația (3) ne dă

$$\frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \int f(\theta) d\theta + \text{const.}$$

sau

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{I} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta) d\theta + \omega_0^2$$



de unde

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta) d\theta + \omega_0^2}}$$

și, printr'o nouă cuadratură, se obține  $t$  în funcție de  $\theta$ , și invers  $\theta$  în funcție de  $t$  și de două constante arbitrare  $\theta_0$  și  $\omega_0$ .

**3. Eforturi asupra axului în mișcarea de rotație a unui solid.** Fixitatea axului de rotație poate fi realizată prin fixitatea a două din punctele sale. Fie  $F_1$  și  $F_2$  acțiunile acestor

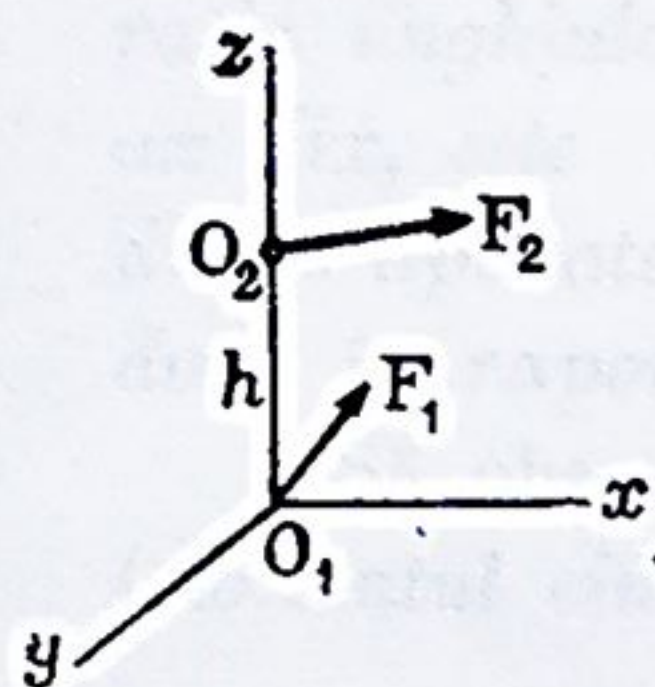


Fig. 176

puncte asupra solidului în mișcare, într'un moment  $t$ . Eforturile exercitate de solid asupra axului vor fi două forțe egale și direct opuse forțelor  $F_1$  și  $F_2$ , aplicate în cele două puncte fixe.

Să calculăm pe  $F_1$  și  $F_2$ . Pentru aceasta vom scrie că există echilibru între forțele direct aplicate, forțele de legătură  $F_1$  și  $F_2$  și forțele de inerție.

Să luăm axul de rotație drept ax  $O_1z$  al unui sistem dreptunghiular  $O_1xyz$ , origina fiind așezată în unul din punctele fixe; fie  $O_2$  celălalt punct fix situat la distanța  $h$  de origină. Insemnând prin:

$P, Q, R$  componentele vectorului rezultat al forțelor direct aplicate;

$L, M, N$  componentele momentului rezultat al forțelor direct aplicate, în raport de origină;

$X_1, Y_1, Z_1$  componentele forței  $F_1$ ;

$X_2, Y_2, Z_2$  componentele forței  $F_2$ ;

$X', Y', Z'$  componentele vectorului rezultat al forțelor de inerție;

$L', M', N'$  componentele momentului rezultat al forțelor de inerție în raport de origină;

cele 6 ecuații, deduse din ecuațiile generale de echilibru prin adăugirea forțelor de inerție, se scriu:



$$(4) \quad \begin{cases} P + X_1 + X_2 + X' = 0 \\ Q + Y_1 + Y_2 + Y' = 0 \\ R + Z_1 + Z_2 + Z' = 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} L - h Y_2 + L' = 0 \\ M + h X_2 + M' = 0 \\ N + N' = 0. \end{cases}$$

Să determinăm componentele  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  și  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$  referitoare forțelor de inerție.

a). Componentele  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ . Avem

$$X' = - \sum m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y' = - \sum m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z' = - \sum m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Ori, relațiile

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \text{const.}$$

ne dau succesiv

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

$$(6) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x - y \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y + x \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Deducem

$$X' = \omega^2 \sum m x + \frac{d\omega}{dt} \sum m y$$

$$Y' = \omega^2 \sum m y - \frac{d\omega}{dt} \sum m x$$

$$Z' = 0$$

sau, dacă însemnăm prin  $\bar{M}$  masa solidului și prin  $a$ ,  $b$ ,  $c$  coordonatele centrului său de greutate,

$$X' = \bar{M} a \omega^2 + \bar{M} b \frac{d\omega}{dt}$$

(7)

$$Y' = \bar{M} b \omega^2 + \bar{M} a \frac{d\omega}{dt}$$

$$Z' = 0.$$



Valoarea  $Z' = 0$  se înțelegea din capul locului, căci mișcarea oricăruia din punctele solidului fiind o mișcare circulară, forța efectivă care produce această mișcare, considerată ca liberă, fiind coprinsă în planul cercului nu are componentă paralelă cu  $O_1 z$ ; forța de inerție fiind egală și direct opusă forței efective, nu are deci nici ea asemenea componentă.

Expresiunile (7) reprezintă de altfel componentele forței de inerție a centrului de greutate, dacă se consideră masa totală a corpului concentrată în acest punct. Avem, în adevăr, după cum se știe,

$$X' = - \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \bar{M} \frac{d^2 a}{dt^2}$$

$$Y' = - \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \bar{M} \frac{d^2 b}{dt^2}.$$

b). Componentele  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ . Avem

$$L' = - \sum m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

$$M' = - \sum m \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

$$N' = - \sum m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right).$$

Înlocuind derivatele prin expresiile lor (6) se obține,

$$L' = \sum m z \left( x \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y \right)$$

$$M' = \sum m z \left( y \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x \right)$$

$$N' = \sum m \left[ x \left( \omega^2 y - x \frac{d\omega}{dt} \right) - y \left( \omega^2 x + y \frac{d\omega}{dt} \right) \right]$$

adică

$$(8) \quad \begin{aligned} L' &= \frac{d\omega}{dt} \sum m x z - \omega^2 \sum m y z, & M' &= \frac{d\omega}{dt} \sum m y z + \omega^2 \sum m x z \\ N' &= - \frac{d\omega}{dt} \sum m (x^2 + y^2) = - I \frac{d\omega}{dt}. \end{aligned}$$



Aceste valori depind, după cum se vede, de coeficienții elipsoidului de inerție pentru origina  $O_1$ .

c). Să substituim acum valorile (7) și (8) în ecuațiile (4) și (5). Obținem

$$(9) \quad \begin{cases} P + X_1 + X_2 + \bar{M} a \omega^2 + \bar{M} b \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ Q + Y_1 + Y_2 + \bar{M} b \omega^2 - \bar{M} a \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ R + Z_1 + Z_2 = 0 \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} L - hY_2 + \frac{d\omega}{dt} \Sigma m xz - \omega^2 \Sigma m yz = 0 \\ M + hX_2 + \frac{d\omega}{dt} \Sigma m yz + \omega^2 \Sigma m xz = 0 \\ N - I \frac{d\omega}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ultima ecuație ne este cunoscută; ea este ecuația diferențială din care se deduce legea mișcării de rotație în jurul axului:

$$\theta = f(t), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = f'(t).$$

Să ne ocupăm de celelalte. Cantitățile  $P, Q, R, L, M$ , raportându-se la forțele date, sunt expresiuni cunoscute de  $t, \theta, \frac{d\theta}{dt}$  și prin urmare de  $t$ , dacă s'a obținut legea  $\theta = f(t)$ .

Cordonatele  $a$  și  $b$  ale centrului de greutate sunt de asemenea funcții de  $t$  potrivit formulelor:

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta$$

în care  $\rho$  reprezintă depărtarea constantă a centrului de greutate la ax.

Însfârșit, pentru a se exprima  $\Sigma m xz$  și  $\Sigma m yz$  în funcție de  $\theta$  și deci de  $t$ , se va imagina un sistem dreptunghiular de axe  $O_1 x'y'z'$  ( $z'=z$ ) care legat invariabil solidului să ia parte odată cu el la mișcarea de rotație.

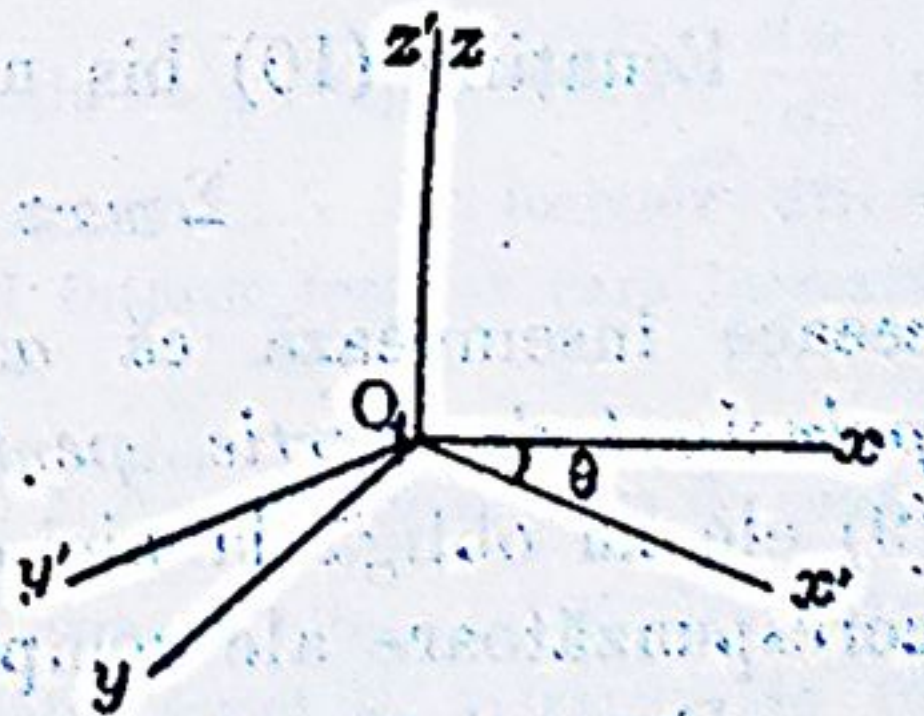


Fig. 177



Avem atunci

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

și prin urmare

$$\Sigma m xz = \cos \theta \Sigma m x'z' - \sin \theta \Sigma m y'z'$$

$$\Sigma m yz = \sin \theta \Sigma m x'z' + \cos \theta \Sigma m y'z'$$

egalități în care sumele  $\Sigma m x'z'$  și  $\Sigma m y'z'$  sunt cantități constante.

Din sistemul de egalități (9) și (10) ecuațiile întâia, a doua, a patra și a cincia dau valorile  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ . Rămâne ecuația a treia care dă suma  $Z_1 + Z_2$ . Deci ca și în cazul echilibrului, componentele  $Z_1$  și  $Z_2$  nu se pot calcula separat.

**Cazuri particulare.** 1<sup>o</sup>) Să presupunem că forțele direct aplicate se reduc la o forță unică trecând neconținut prin punctul  $O_1$ . Avem atunci

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

și ecuațiile (10) se reduc la

$$(10)^{\text{bis}} \begin{cases} hY_2 - \frac{d\omega}{dt} \Sigma m xz + \omega^2 \Sigma m yz = 0 \\ hX_2 + \frac{d\omega}{dt} \Sigma m yz + \omega^2 \Sigma m xz = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuație dă  $\omega = \text{const.}$  Să cercetăm dacă se poate întâmpla ca punctul  $O_2$  să nu suporte nici o presiune. Trebuie pentru aceasta ca ecuațiile (9) și (10)<sup>bis</sup> să fie satisfăcute când facem în ele  $X_2 = 0, Y_2 = 0, Z_2 = 0$ .

Ecuațiile (10) bis ne dau ca condiții

$$\Sigma m xz = 0, \quad \Sigma m yz = 0$$

ceea ce însemnează că axul de rotație  $O_1z$  trebuie să fie ax principal de inerție pentru originea  $O_1$ . Cât privește ecuațiile (9) ele nu obligă la nici o condiție și dau pur și simplu valorile corespunzătoare ale componentelor  $X_1, Y_1, Z_1$ .

Punctul  $O_2$  ne suportând nici o presiune, solidul poate fi considerat ca liber în acest punct. De aci următoarea teoremă:



*Dacă un solid mobil în jurul unui punct fix, este supus la forțe direct aplicate care admit o rezultantă trecând prin punctul fix, și dacă solidul în virtutea unor anumite condiții inițiale începe a se învârti în jurul unui ax principal de inerție pentru punctul fix, el va continua să se învârtască indefinit în jurul acestui ax cu o viteză unghiulară constantă și fără ca vre un alt punct al axului, în afară de cel fix, să suporte vre-o presiune<sup>1)</sup>.*

Din cauza acestei proprietăți, axele principale de inerție pentru un punct  $O$ , se mai numesc uneori axe permanente de rotație pentru acest punct.

2<sup>o</sup>). Să presupunem acum că forțele direct aplicate își fac echilibrul, sau că nu există asemenea forțe. Avem în asemenea caz

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q &= 0, & R &= 0; \\ L &= 0, & M &= 0, & N &= 0. \end{aligned}$$

Pentru ca punctul  $O_2$  să nu suporte nici o presiune, trebuie să avem ca și mai sus

$$(11) \quad \Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0$$

iar pe de altă parte  $N$  fiind nul,  $\omega$  este constant.

Să cercetăm dacă se poate întâmpla ca presiunea în punctul  $O_1$  să fie și ea nulă. Va trebui pentru aceasta ca ecuațiile (9)

<sup>1)</sup> La acest rezultat se poate ajunge și direct prin următoarele considerații:

Dacă presupunem că axul  $O_1 z$  este principal de inerție pentru punctul  $O_1$ , vectorul  $O_1 K$  al momentului cinetic în raport de  $O_1$  are direcția  $O_1 z$  și valoarea  $I\omega$ . Acest vector fiind identic cu proiecția sa pe  $O_1 z$ , viteza  $I \frac{d\omega}{dt}$  a punctului  $K$  pe  $O_1 z$  este egală atât cu momentul  $N$  al forțelor direct aplicate cât și cu momentul în raport de  $O_1$  al tuturor forțelor care lucrează asupra solidului (pag. 326).

Considerația întâia ne dă ( $N$  fiind nul)  $I \frac{d\omega}{dt} = 0$  de unde  $\omega = \text{const.}$  Momentul cinetic  $I\omega$  este deci constant și prin urmare viteza lui  $K$  este nulă. Considerația a doua stabilește atunci că momentul forței  $F_2$  în raport de  $O_1$  este nul, ceea ce pretinde ca forța  $F_2$  să fie nulă, deci  $X_2 = 0$ ,  $Y_2 = 0$ .



să fie satisfăcute când vom face în ele pe  $P, Q, R; X_1, Y_1; X_2, Y_2$  egali cu zero. Se obțin atunci ca condiții

$$(12) \quad a = 0, \quad b = 0.$$

Ori condițiile (11) și (12) exprimă că *axul de rotație este un ax al elipsoidului central de inerție*. Avem deci teorema următoare:

*Dacă un solid liber, acționat de forțe care își fac echilibrul, sau sustras oricărei forțe, începe a se învârti în jurul unui ax al elipsoidului central de inerție, el va continua să se învârtască indefinit în jurul acestui ax cu o viteză unghiulară constantă și fără ca vre unul din punctele axului să suporte vre o presiune.*

Această proprietate a făcut să se dea axelor elipsoidului central de inerție numele de *axe naturale de rotație*.

3<sup>o</sup>). Să presupunem în sfârșit că forțele direct aplicate se reduc la un cuplu al cărui plan este perpendicular pe axul de rotație.

În acest caz  $P, Q, R, L, M$  sunt nuli ca și în cazul precedent, însă  $N$  este diferit de zero. Deci teorema precedentă subsistă, cu singura deosebire că viteza unghiulară a mișcării nu rămâne constantă.

#### PENDULUL COMPUS.

Se numește astfel un solid supus numai la acțiunea gravitației și obligat de a se învârti în jurul unui ax orizontal.

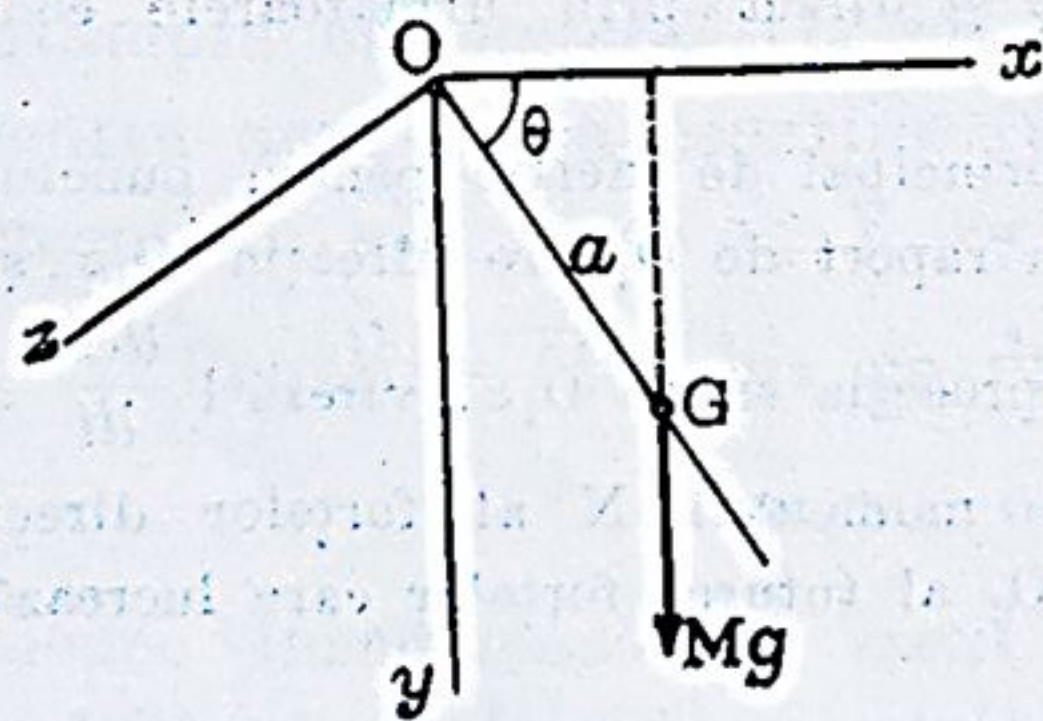


Fig. 178

Ecuația mișcării este

Să luăm axul de rotație ca ax  $Oz$ , axul  $Oy$  fiind vertical și îndreptat în jos, axul  $Ox$  orizontal și perpendicular pe planul  $Oyz$ , iar originea  $O$  aleasă așa fel ca planul  $Oxy$  să treacă prin centrul de greutate  $G$ .

Insemnând prin  $a$  distanța  $OG$  și prin  $\theta$  unghiul  $GOx$ , ecua-

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Mg a \cos \theta$$



ceea ce putem scrie

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g \cos \theta}{l}$$

punând  $\frac{I}{Ma} = l$ .

Ecuatia (1) ne este cunoscută dela studiul mișcării pendulului simplu. Ea arată că pendulul compus are aceeași mișcare ca și pendulul simplu de lungime  $l$  egală cu  $\frac{I}{Ma}$ , dacă valorile inițiale  $\theta_0$  și  $\omega_0$  sunt aceleași pentru ambele pendule. Pendulul simplu de asemenea lungime este zis *sincronul* pendulului compus.

Durata  $T$  a micilor oscilații ale pendulului compus are deci ca valoare

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I}{Mg}}$$

Deducem

$$I = Mg \left( \frac{T}{\pi} \right)^2$$

Această formulă ne dă mijlocul de a determina prin experiență momentul de inerție al unui solid în raport de un ax; va fi de ajuns să dispunem orizontal acel ax, să-l fixăm, și, imprimând apoi solidului o mișcare oscilatorie destul de mică în jurul axului, să măsurăm durata unei oscilații.

**Proprietăți.** Fie  $K$  raza de girație a pendulului în raport de dreapta paralelă axului de rotație dusă prin  $G$ . Avem  $I_0 = MK^2$  și prin urmare, potrivit formulei (1) dela teoria momentelor de inerție,

$$I = M(K^2 + a^2).$$

In consecință

$$l = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}.$$

Să luăm  $GO'$  egal cu  $\frac{K^2}{a}$  așa ca să avem  $OO' = l$ . Axul



BB' dus prin O' paralel cu Oz se numește *axul de oscilație al pendulului*.

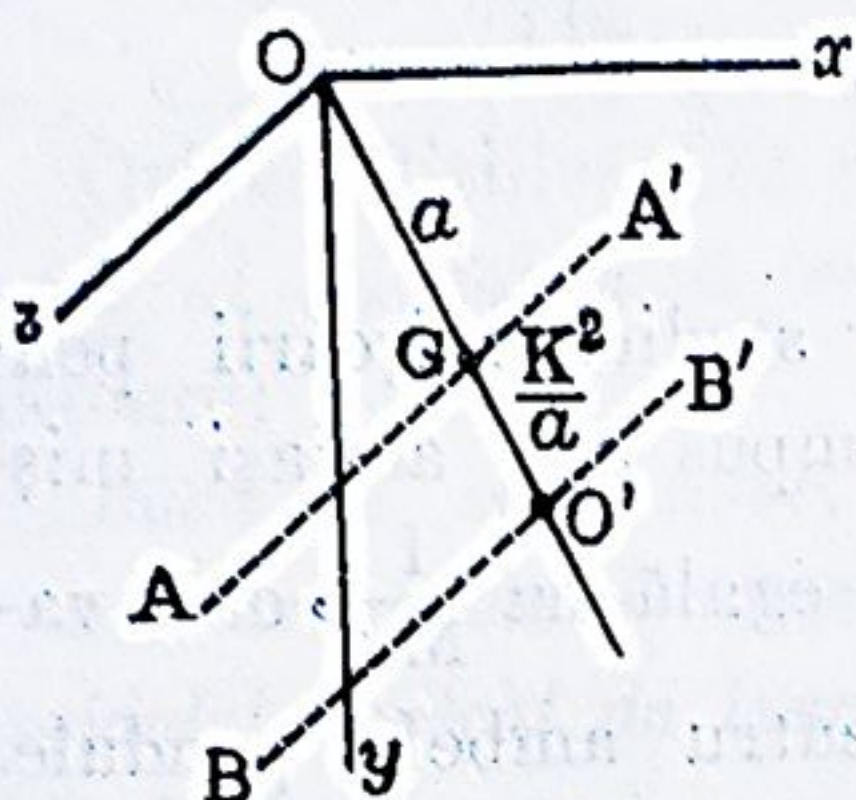


Fig. 179

Ori ce punct al solidului situat pe axul de oscilație se mișcă așa ca și cum ar fi izolat și legat direct cu axul de rotație printr'un fir inextensibil fără masă.

*Axele de rotație și de oscilație sunt reciproce*, înțelegând prin aceasta că dacă din axul de oscilație facem un ax de rotație, fostul ax de rotație devine în noua mișcare ax de oscilație. Fie în adevăr  $O'G = a'$ ; să însemnăm prin  $l'$  noua lungime de pendul sincron. Avem

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'}$$

Insă  $a' = \frac{K^2}{a}$ ; deci, substituind,

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

Să observăm, în sfârșit, că

$$GO \cdot GO' = a \cdot \frac{K^2}{a} = K^2.$$

### TEORIA MAȘINEI LUI ATWOOD.

Mașina lui *Atwood*, care servește pentru a demonstra legile căderii corpurilor, se compune dintr'un scripete vertical în gâtul căruia se înfășoară un fir purtând la extremitățile lui două mase inegale.

Ne propunem de a studia mișcarea acestor mase, neglijând masa firului ca și frecarea scripetelui pe axul în jurul căruia se învâртеște. Vom mai presupune că firul antrenează scripetele fără vre-o alunecare pe gâtul lui.

Să raportăm mișcarea celor două mase la două axe drep-



unghiulare  $Ox$ ,  $Oy$ , axul  $Ox$  fiind vertical și îndreptat în sensul greutății. Fie:

$m_1, m_2$  cele două mase cu presupunerea  $m_1 > m_2$ ,

$x_1, x_2$  distanțele lor la  $Oy$ ,

$T_1, T_2$  tensiunile celor două porțiuni de fir,

$\omega$  viteza unghiulară de rotație a scripetelui,

$R$  raza sa,

$I$  momentul său de inerție în raport de axul de rotație.

Avem ecuațiile

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g - T_1$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g - T_2$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = R(T_1 - T_2)$$

ultima ecuație fiind aceea a rotației scripetelui sub efectul forțelor  $T_1$  și  $T_2$  aplicate respectiv în  $A_1$  și  $A_2$ .

Mai avem însă relațiile

$$x_1 + x_2 = \text{const.}, \quad R\omega = \frac{dx_1}{dt}$$

cea dintâi exprimând că lungimea firului este constantă, iar cealaltă că firul antrenează scripetele fără alunecare. În total deci, cinci ecuații între cele cinci necunoscute  $x_1, x_2, T_1, T_2, \omega$ .

Ecuatia a patra dă

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

și în consecință, scăzând ecuația a doua din cea dintâi,

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} = (m_1 - m_2) g - (T_1 - T_2).$$

Substituind diferenței  $T_1 - T_2$  valoarea care rezultă din ecuația a treia, adică

$$T_1 - T_2 = \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt}$$

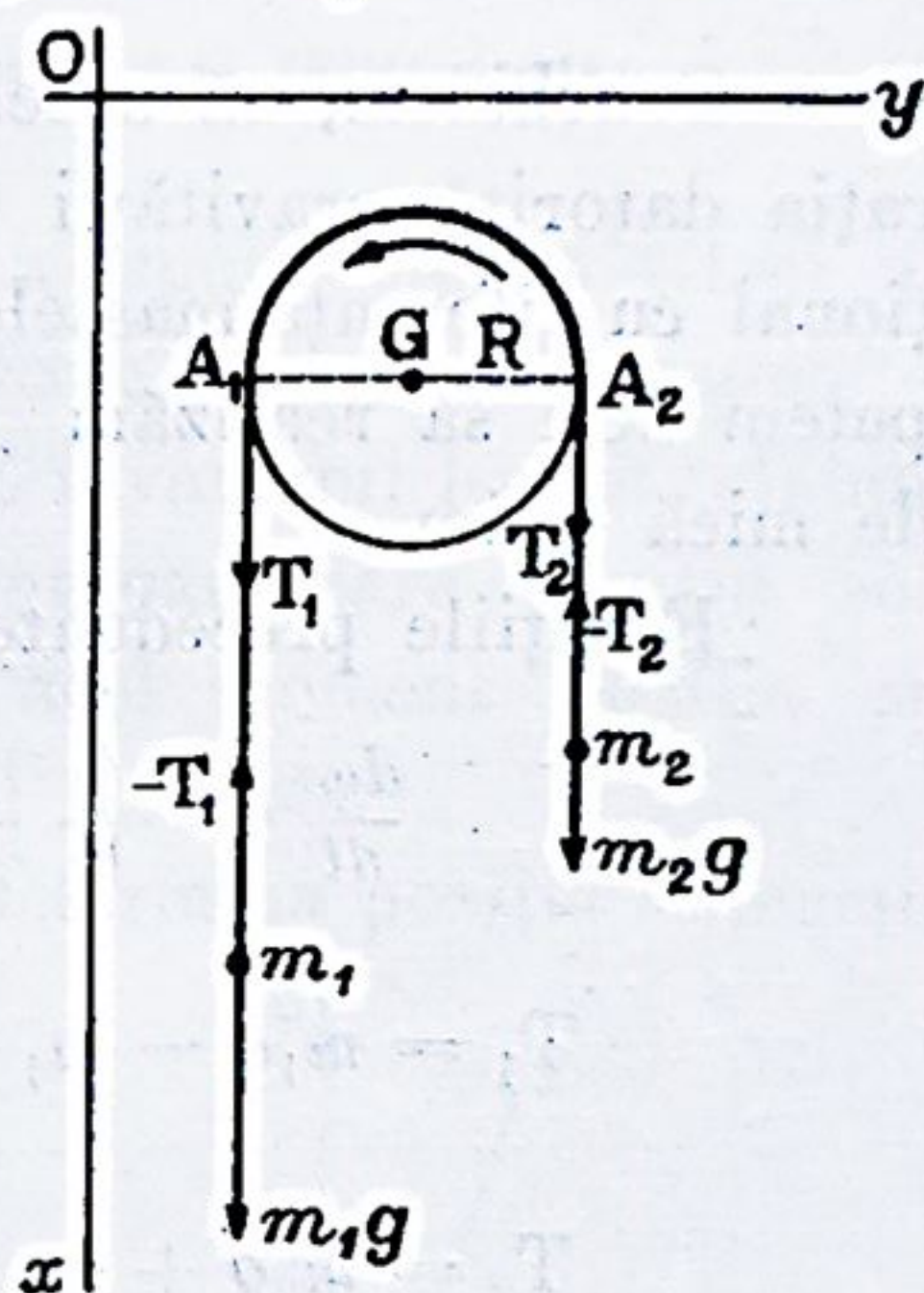


Fig. 180



și ținând socoteală de ecuația a cincia care dă

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

găsim ca ecuație diferențială a mișcării masei  $m_1$ , însemnând pentru prescurtare câtul  $\frac{1}{R^2}$  prin  $a$ ,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + a} g.$$

Conchidem, că accelerația masei  $m_1$  este egală cu accelerația datorită gravității înmulțită cu un factor constant proporțional cu diferența maselor  $m_1, m_2$ . Micșorând această diferență, putem deci să realizăm pentru masa  $m_1$  o accelerație ori cât de mică voim.

Ecuațiile precedente ne dau de altfel:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + a} g$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_1 (2m_2 + a)}{m_1 + m_2 + a} g$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2 (2m_1 + a)}{m_1 + m_2 + a} g.$$

Vedem că cele două tensiuni  $T_1, T_2$  sunt inegale; ele nu devin egale decât dacă presupunem  $a = 0$ , adică dacă neglijăm masa scripetelui. I fiind atunci nul, cele cinci ecuații dela început se reduc la acelea care corespund mișcării maselor  $m_1, m_2$  în cazul când scripetele ar fi fix și firul ar aluneca fără frecare pe gâtul lui (problemă analoagă cu problema I<sup>a</sup> din seria de exerciții a Părții a III<sup>a</sup>) adică

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - T$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - T$$

$$x_1 + x_2 = \text{const.}$$

În mașina lui Atwood, cantitatea  $a$  nu este însă neglijabilă.



## IV. MIȘCAREA UNUI SOLID IN JURUL UNUI PUNCT FIX.

### I. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII.

Să luăm punctul fix ca origină a unui sistem de trei axe dreptunghiulare fixe  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  precum și a unui sistem de trei axe dreptunghiulare  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  invariabil legate solidului.

Pentru a cunoaște într'un moment oare care poziția solidului, va fi suficient să cunoaștem în acel moment poziția sistemului mobil  $OXYZ$  față de sistemul fix  $Oxyz$ .

1. **Variabilele lui Euler.** Putem determina poziția sistemului mobil prin trei unghiuri  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  definite în modul următor:

$\phi$ , unghiul pe care-l face  $Ox$  cu intersecția  $OA$  a planului  $XOY$  cu planul  $xOy$ ;

$\theta$ , înclinarea planului  $XOY$  pe planul  $xOy$ , măsurată prin unghiul pe care-l face  $OZ$  cu  $Oz$ ;

$\varphi$ , unghiul axului  $OX$  cu dreapta  $OA$ .

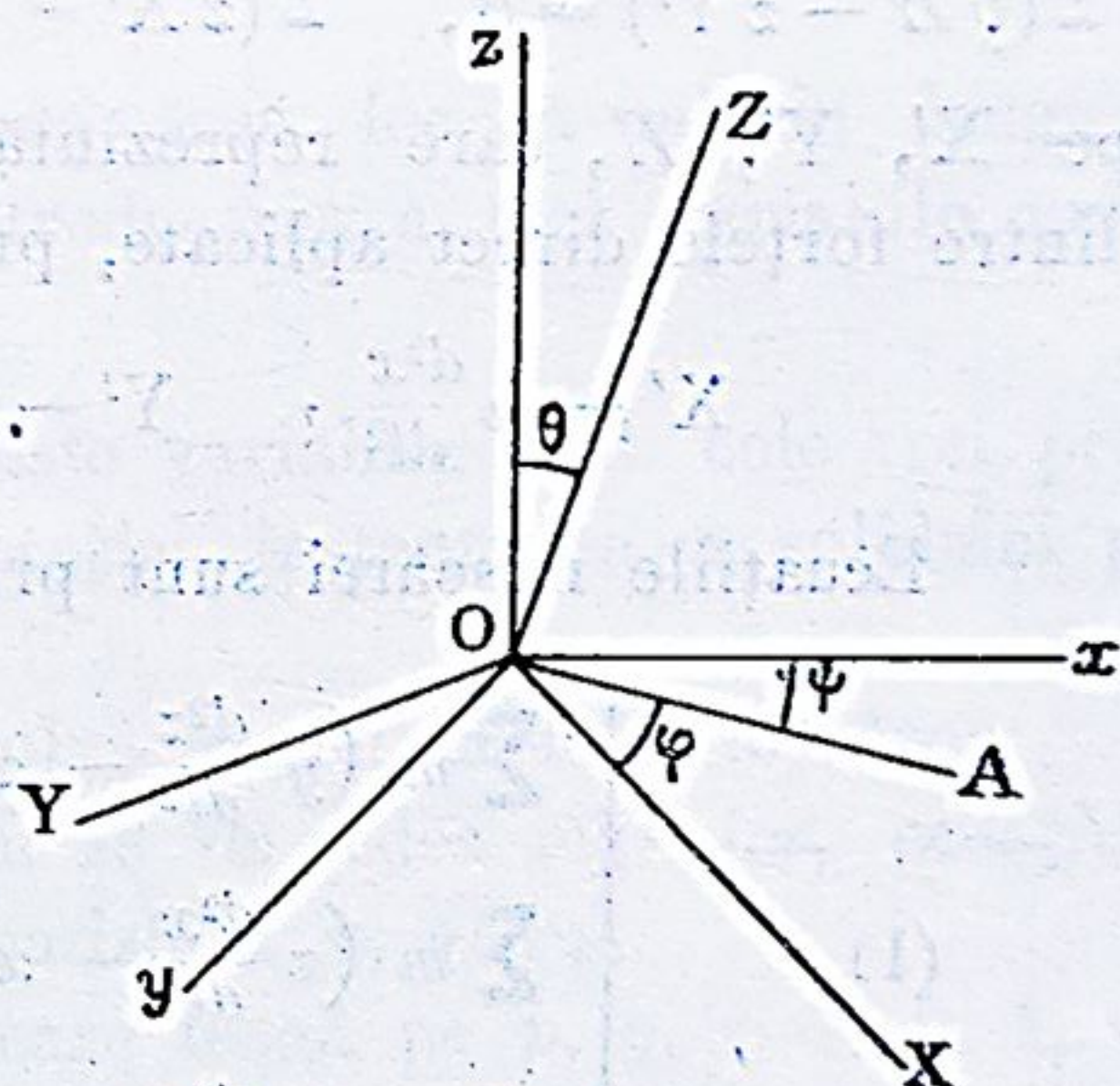


Fig. 181

Se vede, că putem trece dela sistemul de axe  $Oxyz$  la sistemul  $OXYZ$  prin trei rotații  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  executate în jurul axelor  $Oz$ ,  $OA$ ,  $OZ$ .

Rotația  $\phi$  în jurul axului  $Oz$  învârtă sistemul de axe  $XOY$  în jurul lui  $O$ , în planul lui  $xOy$ , până când  $OX$  vine să coincidă cu  $OA$ .

Rotația  $\theta$  în jurul dreptei  $OA$ , considerată ca fixă, învârtă planul  $XOY$  în jurul dreptei  $OA$ , devenită  $OX$ , de un-



ghiul  $\theta$ , care are ca măsură unghiul coprins între  $Oz$  și  $OZ$ , aceste axe fiind perpendiculare unul pe  $xOy$  iar celălalt pe  $XOY$ .

În sfârșit rotația  $\varphi$  în jurul axului  $OZ$ , considerat ca fix, învârteste sistemul  $XOY$  în planul său, care conține pe  $OA$ , până când axul  $OX$  face cu  $OA$  unghiul  $\varphi$ .

Unghiurile  $\psi$ ,  $\theta$  și  $\varphi$  vor fi socotite ca pozitive cu începere dela  $OX$ ,  $Oz$  și  $OA$ , când rotațiile în jurul celor trei axe  $Oz$ ,  $OA$  și  $OZ$ , care produc aceste unghiuri, vor avea sensul direct, adică dela stânga la dreapta; în cazul contrariu ele vor fi socotite ca negative.

Pentru a cunoaște mișcarea solidului, va fi de ajuns să exprimăm pe  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  zise *variabilele lui Euler*, în funcție de timp.

**2. Ecuațiile mișcării.** Acestea se obțin după cum se știe, înlocuind în condițiile de echilibru<sup>1)</sup>

$\Sigma (yZ' - zY') = 0$ ,  $\Sigma (zX' - xZ') = 0$ ,  $\Sigma (xY' - yX') = 0$   
pe  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , care reprezintă componentele uneia oarecare dintre forțele direct aplicate, prin

$$X' = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y' = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z' = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ecuațiile mișcării sunt prin urmare

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = L' \\ \Sigma m \left( z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = M' \\ \Sigma m \left( x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = N' \end{cases}$$

în care  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$  reprezintă proiecțiile pe axele fixe ale momentului resultant al forțelor direct aplicate în raport cu origina  $O$ , adică

$$L' = \Sigma (yZ' - zY'), \quad M' = \Sigma (zX' - xZ'), \quad N' = \Sigma (xY' - yX').$$

<sup>1)</sup> Însemnăm componentele forțelor prin litere cu accent, rezervând notațiunea  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  pentru coordonatele punctelor în raport de sistemul mobil.



Cordonatele  $x, y, z$  ale unui punct în raport de axele fixe, se exprimă în funcție de cordonatele  $X, Y, Z$  ale aceluiași punct în raport de axele mobile, prin relațiile cunoscute

$$x = aX + a'Y + a''Z$$

$$y = bX + b'Y + b''Z$$

$$z = cX + c'Y + c''Z$$

în care cele nouă cosinururi  $a, b, c, \dots$  sunt exprimabile în funcție de cele 3 unghiuri ale lui Euler:  $\psi, \theta, \varphi$ .

Înlocuind pe  $x, y, z$ , în ecuațiile (1) prin valorile de mai sus, cele 9 cosinusuri fiind înlocuite prin valorile lor în funcție de  $\psi, \theta, \varphi$ , ajungem la expresiuni ne-depinzând decât de timp, de derivatele unghiurilor  $\psi, \theta, \varphi$  și de coeficienții elipsoidului de inerție al solidului raportat la axele mobile, coeficienți ce trebuiesc priviți ca niște constante cunoscute.

Obținem astfel trei ecuații diferențiale de ordinul al doilea care integrate ne dau valorile în funcție de timp a celor 3 variabile  $\psi, \theta, \varphi$  și prin aceasta, problema mișcării se găsește complet rezolvată.

Acest fel de a proceda dă însă loc la calcule lungi și penibile care se evită prin introducerea a trei variabile auxiliare.

**3. Variabile auxiliare.** Aceste variabile sunt cele trei proiecții  $p, q, r$  ale vectorului rotației instantanee a solidului pe axele mobile  $OX, OY, OZ$ <sup>1)</sup>.

Problema mișcării se rezolvă atunci în felul următor:

1°. Se stabilesc, după cum se va vedea mai jos, ecuațiile diferențiale la care trebuie să satisfacă  $p, q, r$ ;

2°. Se stabilesc relațiile care leagă pe  $p, q, r$  de  $\psi, \theta, \varphi$ .

Se obține, procedând astfel, un sistem de 6 ecuații diferențiale de ordinul întâi care urmează a fi integrate, ținându-se seama de condițiile inițiale.

---

<sup>1)</sup> Reamintim din *Cinematică*, pag. 149, că rotația elementară a unui solid în jurul unui punct fix, este o rotație elementară în jurul unui ax trecând prin punctul fix, numit ax instantaneu de rotație, pe care se poartă vectorul rotației.



4. **Ecuatiile lui Euler.** Pentru a obține ecuațiile la care trebuie să satisfacă  $p, q, r$  sub forma simplă dată de Euler, vom lua ca axe  $OX, OY, OZ$  cele trei axe principale de inerție ale solidului pentru punctul  $O$  și vom scrie, potrivit teoremelor generale ale Dinamicii, că viteza extremității vectorului, care reprezintă momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ , este egală în proiecție pe fiecare din axele  $OX, OY, OZ$  cu proiecția respectivă a momentului rezultat al forțelor aplicate solidului, în raport de  $O$ .

a). *Momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ . (Momentul cinetic).*

Proiecțiile vitezei unui punct oarecare al solidului pe axele mobile  $OX, OY, OZ$  fiind <sup>1)</sup>

$$(2) \quad v_x = qZ - rY, \quad v_y = rX - pZ, \quad v_z = pY - qX$$

momentul cantității de mișcare a punctului are ca proiecții pe aceleași axe

$$m(Yv_z - Zv_y), \quad m(Zv_x - Xv_z), \quad m(Xv_y - Yv_x)$$

sau, înlocuind pe  $v_x, v_y, v_z$  prin valorile lor,

$$m[Y(pY - qX) - Z(rX - pZ)], \quad m[Z(qZ - rY) - X(pY - qX)], \\ m[X(rX - pZ) - Y(qZ - rY)].$$

În consecință proiecțiile momentului rezultat  $OK$  vor fi:

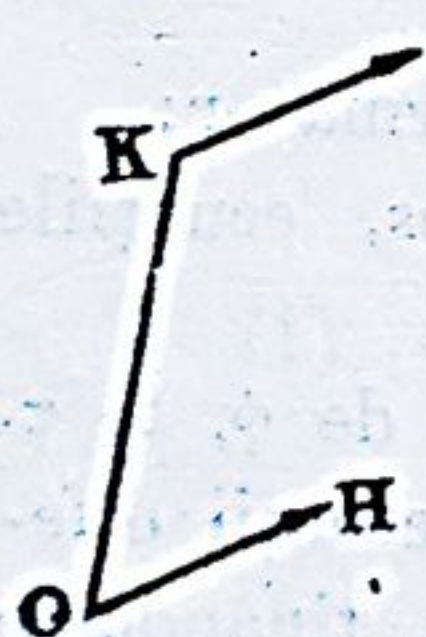


Fig. 182

$$OK_x = p \sum m(Y^2 + Z^2) - q \sum m XY - r \sum m XZ$$

$$OK_y = q \sum m(Z^2 + X^2) - r \sum m YZ - p \sum m YX$$

$$OK_z = r \sum m(X^2 + Y^2) - p \sum m ZX - q \sum m ZY$$

sau, utilizând coeficienții elipsoidului de inerție,

$$OK_x = Ap - Fq - Er$$

$$OK_y = Bq - Dr - Fp$$

$$OK_z = Cr - Ep - Dq.$$

Ori, prin ipoteză, axele  $OX, OY, OZ$  fiind chiar axele

<sup>1)</sup> *Cinematica*, pag. 155.



principale de inerție pentru punctul O, coeficienții D, E F, sunt nuli, așa încât

$$OK_x = Ap, \quad OK_y = Bq, \quad OK_z = Cr$$

$$\overline{OK}^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2.$$

b). *Momentul rezultat al forțelor aplicate solidului, în raport de O.*

Forțele aplicate se compun din forțele date, adică forțele direct aplicate, și acțiunea necunoscută a punctului O asupra solidului. Ori momentul acesteia din urmă în raport de O fiind nul, momentul rezultat al sistemului de forțe se reduce la acela al forțelor direct aplicate. Fie OH acest moment și L, M, N proiecțiile sale pe cele trei axe OX, OY, OZ.

c). *Pentru obținerea ecuațiilor lui Euler, trebuie să exprimăm că proiecțiile vitezei absolute a punctului K pe axele OX, OY, OZ sunt egale cu proiecțiile vectorului OH pe aceleași axe.*

Ori, viteza absolută a punctului K este suma geometrică a vitezei pe care o are acest punct în mișcarea sa relativă față de sistemul mobil OXYZ și a vitezei de antrenare.

Cordonatele punctului K față de sistemul mobil fiind

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr$$

viteza sa relativă are ca proiecții pe aceste axe

$$A \frac{dp}{dt}, \quad B \frac{dq}{dt}, \quad C \frac{dr}{dt}.$$

Pe de altă parte, viteza de antrenare a punctului K are ca proiecții pe axele mobile, ca ori care punct al solidului,

$$qZ - rY, \quad rX - pZ, \quad pY - qX$$

în care va trebui să facem

$$X = Ap, \quad Y = Bq, \quad Z = Cr.$$

Deci, aceste proiecții sunt

$$(C - B)qr, \quad (A - C)rp, \quad (B - A)pq.$$

Exprimând acum că proiecțiile vitezei absolute a punctului K, pe axele OX, OY, OZ, sunt egale cu proiecțiile vectorului



OH pe aceleași axe, obținem, potrivit celor de mai sus, cele trei ecuații

$$(3) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = M \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile lui Euler.

5. Relațiile între componentele  $p, q, r$  și unghiurile  $\psi, \theta, \varphi$ . Pentru a obține aceste relații, vom exprima că mișcarea elementară a solidului, adică rotația elementară în jurul axului instantaneu, este echivalentă celor trei rotații elementare de unghiuri  $d\psi, d\theta, d\varphi$  executate în jurul axelor  $Oz, OA, OZ$ .

Ori, rotația în jurul axului instantaneu se poate descompune în trei rotații elementare în jurul axelor  $OX, OY, OZ$  caracterizate prin vectoarele de rotații  $p, q, r$  iar, pe de altă parte, vectoarele rotațiilor elementare în jurul axelor  $Oz, OA, OZ$  sunt  $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ .

Pentru a exprima că cele două grupe de câte 3 vectoare de rotații sunt echivalente, vom scrie că proiecțiile lor pe trei axe oare care sunt egale. Să efectuăm aceste proiecțiuni pe cele 3 axe  $OA, OB, OZ$ , axul  $OB$  fiind dus perpendicular lui  $OA$  în planul  $XOY$ .

Vom observa pentru aceasta, că dreapta  $OA$  fiind perpendiculară pe fiecare din dreptele  $OB, Oz, OZ$ , aceste trei drepte sunt cuprinse în același plan, așa că unghiul  $BOz$  este egal cu  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .

Efectuând cele trei proiecțiuni găsim:

$$(4) \quad \begin{cases} OA \dots \frac{d\theta}{dt} = p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ OB \dots \frac{d\psi}{dt} \sin \theta = p \sin \varphi + q \cos \varphi \\ OZ \dots \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta = r. \end{cases}$$



Acestea sunt relațiile căutate. Ele pot fi puse și sub forma următoare:

$$p = \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi$$

$$q = -\frac{d\theta}{dt} \sin \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta.$$

În rezumat, componentele  $p, q, r$  și unghiurile  $\phi, \theta, \varphi$  satisfac celor 6 ecuații (3) și (4) care constituiesc împreună un sistem de ecuații diferențiale simultanee de ordinul întâi.

Integralele generale conțin 6 constante arbitrare care se determină dându-se valorile inițiale ale celor 6 necunoscute.

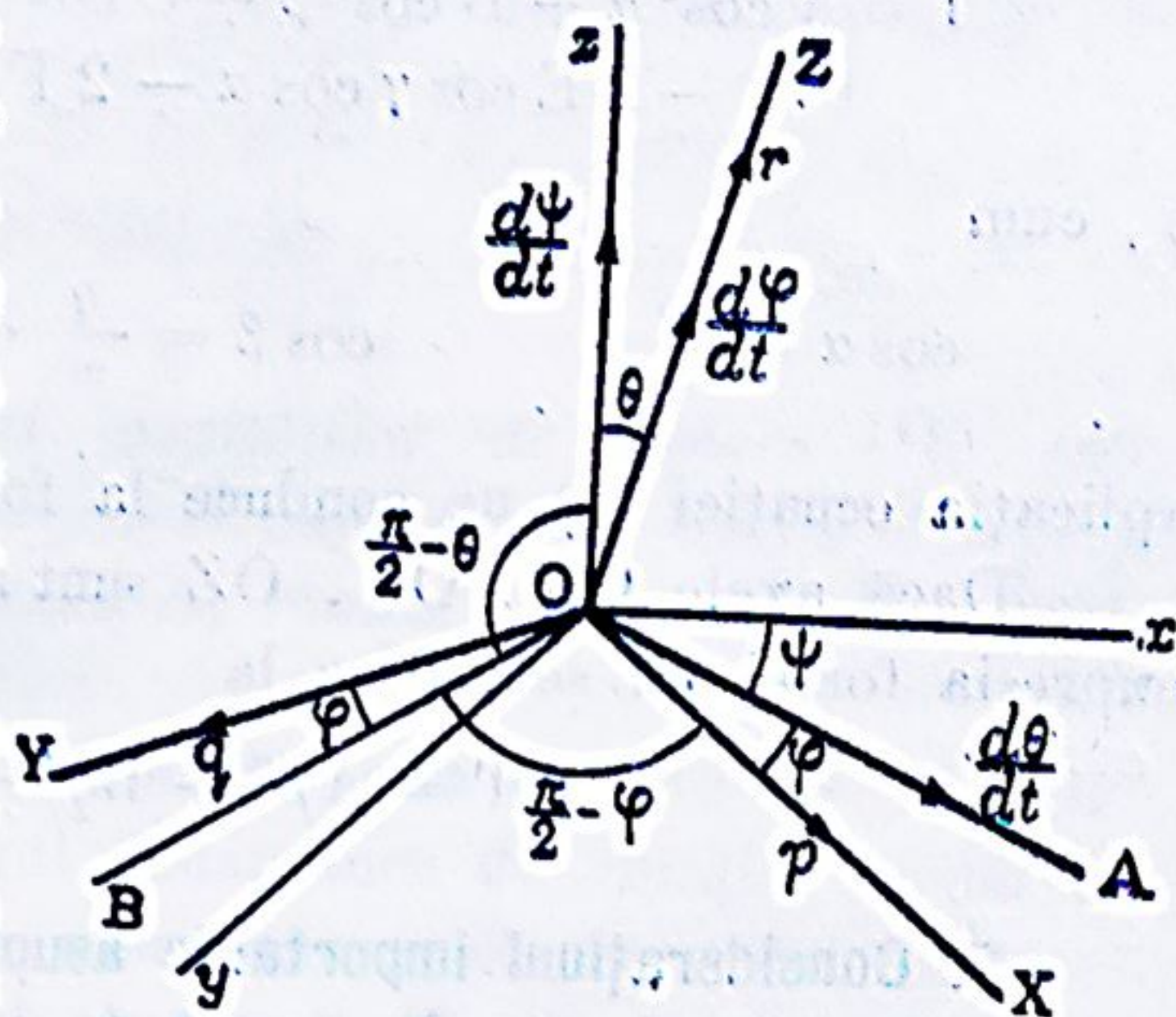


Fig. 188

Din punct de vedere mecanic, problema mișcării unui solid în jurul unui punct fix este deci rezolvată. Nu este însă tot astfel și din punct de vedere analitic, căci nu se știe a se integra sistemul de ecuații diferențiale decât numai în unele cazuri particulare.

#### 6. Expresia forței vii. Avem

$$2T = \sum m v^2 = \sum m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

adică, potrivit egalităților (2)

$$2T = \sum m [(qZ - rY)^2 + (rX - pZ)^2 + (pY - qX)^2].$$

Desvoltând și utilizând coeficienții elipsoidului de inerție găsim

$$(5) \quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$



Mai putem obține acest rezultat altfel. Insemnând prin  $\omega$  viteza unghiulară instantanee de rotație și prin  $I$  momentul de inerție în raport de axul instantaneu, avem, după cum se știe,

$$(6) \quad 2T = I \omega^2.$$

Însă, dacă însemnăm prin  $\alpha, \beta, \gamma$  unghiurile directoare ale axului instantaneu, teoria momentelor de inerție procură relația

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta$$

și, cum

$$\cos \alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{r}{\omega}$$

aplicația ecuației (6) ne conduce la formula (5).

Dacă axele  $OX, OY, OZ$  sunt axele principale de inerție, expresia forței vii se reduce la

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

### 7. Considerațiuni importante asupra momentului rezultat al cantităților de mișcare în raport de punctul fix, Fie:

$OI$ , axul instantaneu de rotație, dus în sensul vectorului rotației, și  $M$  punctul de coordonate  $X_1, Y_1, Z_1$  unde acest ax străpunge elipsoidul de inerție al solidului pentru punctul fix  $O$ ;

$P$ , planul tangent la elipsoid în punctul  $M$ , și  $MN$  normala elipsoidului din acest punct;

$OK$ , momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ .

Vom demonstra că momentul  $OK$  este perpendicular pe planul  $P$ .

În adevăr, cosinusurile directoare ale momentului  $OK$  sunt respectiv proporționale cu proiecțiile  $Ap, Bq, Cr$  ale acestui moment pe axele  $OX, OY, OZ$ .

Pe de altă parte, ecuația elipsoidului de inerție fiind

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$



ecuația planului tangent din punctul M este

$$AXX_1 + BYY_1 + CZZ_1 = 1$$

și cosinusurile directoare ale normalei M la elipsoid sunt deci proporționale cu  $AX_1, BY_1, CZ_1$ .

Însă proiecțiile  $X_1, Y_1, Z_1$  ale vectorului OM fiind evident proporționale cu proiecțiile  $p, q, r$  ale vectorului rotației  $\omega$ , vedem că cosinusurile directoare ale normalei MN sunt proporționale cu  $Ap, Bq, Cr$  adică cu cosinusurile directoare ale momentului OK. De aci, următoarea teoremă:

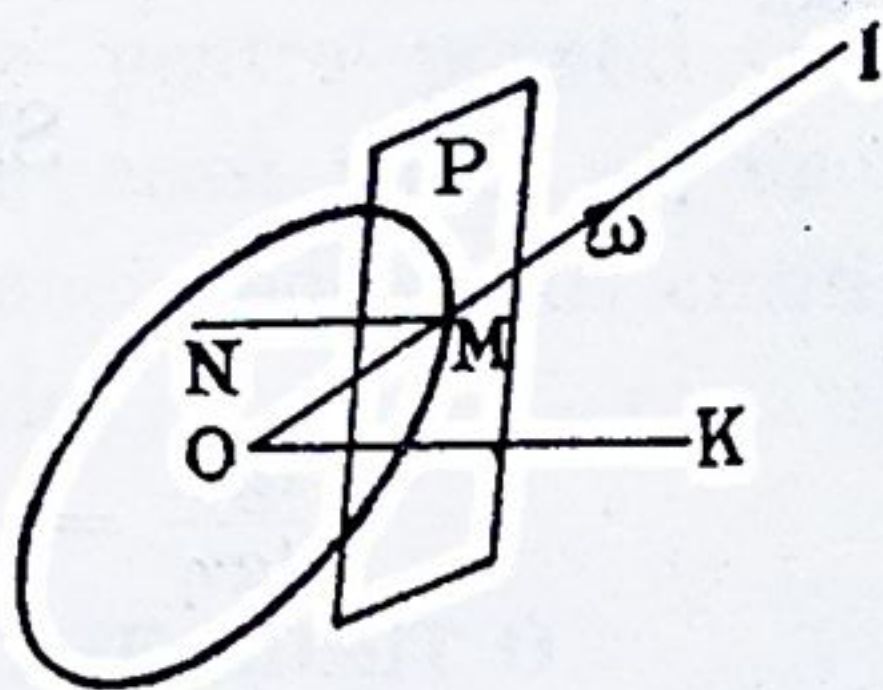


Fig. 184

*Momentul rezultat al cantităților de mișcare OK, este perpendicular pe planul tangent elipsoidului de inerție dus prin punctul unde axul instantaneu de rotație străpunge elipsoidul.*

*Cazul când elipsoidul de inerție este de revoluție. Fie OZ axul de revoluție și OI axul instantaneu de rotație. Luând ca plan al figurei planul ZOI, vom observa, că elipsoidul de inerție fiind de revoluție, planul tangent în M elipsoidului este perpendicular pe planul figurei. Rezultă că momentul OK al cantităților de mișcare este perpendicular pe tangenta MT, dusă*

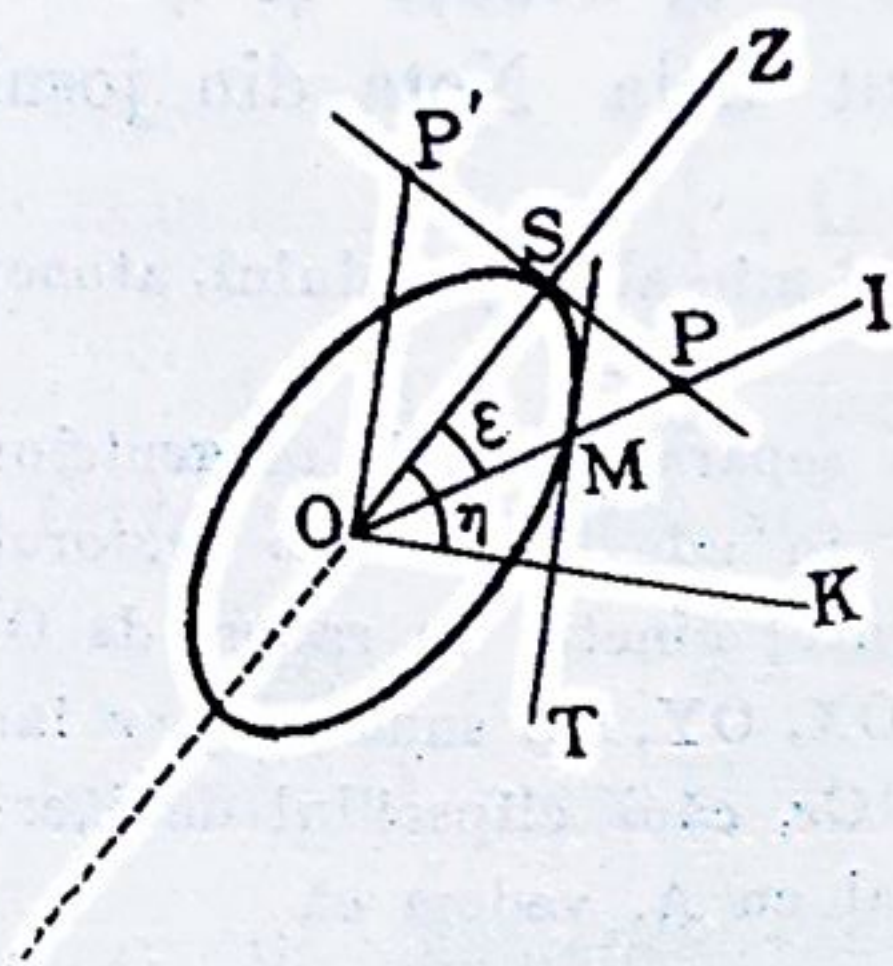


Fig. 185

avem egalitatea

curbei meridiane a elipsoidului de inerție din planul ZOI, și este prin urmare situat în același plan cu OZ și OI.

Fie P punctul unde axul instantaneu întâlnește perpendiculara SP ridicată din S pe axul OZ și P' punctul de intersecție al aceleiași perpendiculare cu paralela OP' dusă tangentei MT. Dreptele OP și OP' fiind conjugate, se știe din Geometrie că

$$SP \cdot SP' = a^2$$



însemnând prin  $a$  semi-axul cel mic al elipsei, cel mare fiind  $OS = c$  <sup>(1)</sup>.

Ori, pe figură,

$$SP = c \operatorname{tg} \varepsilon, \quad SP' = c \cotg \eta$$

deci

$$SP \cdot SP' = c^2 \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = a^2$$

și prin urmare

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{sau încă} \quad \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = \frac{C^{(2)}}{A}$$

de oare ce, după cum se știe,

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{și} \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

Așa dar, în cazul când elipsoidul de inerție este de revoluție, momentul resultant al cantităților de mișcare rămâne necălit coprins în planul format de axul de revoluție al elipsoidului și axul instantaneu de rotație, iar unghiul  $\eta$  rămâne de aceeași ordine de mărime ca  $\varepsilon$ .

În particular, dacă axul instantaneu de rotație  $OI$  rămâne pe timpul mișcării foarte vecin de axul de revoluție  $OZ$ , momentul  $OK$  va rămâne și el tot foarte vecin de acest ax și coprins în planul  $ZOI$ ; dacă însfârșit  $\varepsilon = 0$ , atunci și  $\eta = 0$ . Acest din urmă rezultat ne este cunoscut dela Nota din josul

(1) Dacă axul de revoluție  $OZ$  ar fi axul cel mic al elipsoidului, atunci acesta ar fi  $OS = c$ , celălalt fiind  $a$ .

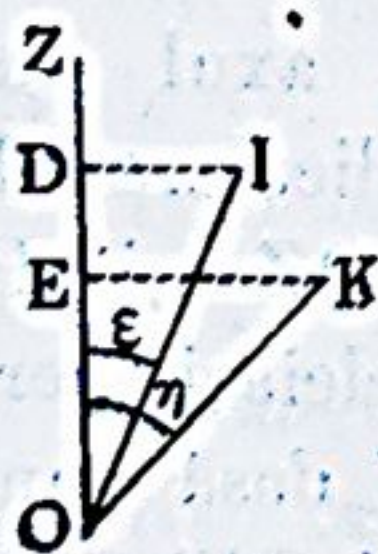


Fig. 186

(2) Putem dealtfel calcula separat valorile tangentelor celor două unghiuri  $\varepsilon$  și  $\eta$ . Fie în adevăr  $OI = \omega$  vectorul rotației instantanee și  $OK$  momentul cinetic în raport de  $O$ . Cum proiecțiile lui  $OI$  pe axele  $OX, OY, OZ$  sunt  $p, q, r$  iar acelea ale lui  $OK$  sunt  $Ap, Aq, Cr$ , căci elipsoidul de inerție fiind de revoluție,  $B$  este egal cu  $A$ , vedem că

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{ID}{OD} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}, \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{KE}{OE} = \frac{A \sqrt{p^2 + q^2}}{Cr}$$

Când  $p^2 + q^2 = 0$ , avem în același timp  $\varepsilon = 0$  și  $\eta = 0$ ;  $OI$  și  $OK$  coincidând atunci cu  $OZ$ .



paginei 326, unde s'a arătat, că pentru ca momentul cinetic în raport de un punct  $O$  al axului de rotație să fie identic cu momentul cinetic în raport de acest ax, trebuie ca axul de rotație să fie principal de inerție pentru punctul  $O$ . Cu alte cuvinte, dacă  $OZ$  este principal de inerție pentru punctul  $O$  și deci ax al elipsoidului de inerție pentru acest punct, și, dacă rotația se execută în jurul acestui ax, atunci momentul cinetic în raport de  $O$  coincide cu axul de rotație.

## II. CAZUL CÂND FORȚELE APLICATE ADMIT O REZULTANTĂ CARE TRECE PRIN PUNCTUL FIX.

Acesta este, spre exemplu, cazul unui solid supus numai acțiunii greutății și mobil în jurul centrului său de greutate, considerat ca fix<sup>1)</sup>.

Rezultanta forțelor aplicate putând fi socotită ca lucrând în punctul fix:

a). Componentele  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sunt nule și ecuațiile lui Euler devin:

$$(1) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = 0 \end{cases}$$

b). Trăvialiul forțelor aplicate este nul și prin urmare *forța vie a solidului este constantă*, adică avem

$$(2) \quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

însemnând prin  $H$  o constantă.

c). *Momentul rezultat al cantităților de mișcare, în raport de punctul fix, este un vector constant și ca mărime și ca poziție, căci viteza extremității acestui vector, fiind egală cu mo-*

<sup>1)</sup> De asemenea cazul unui solid având un punct fix și neacționat de nici o forță.



mentul rezultat al forțelor aplicate, este nulă. Avem deci, însemnând prin  $K$  o constantă,

$$(3) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2.$$

1. **Integrațiune (Jacobi).** 1). Pentru determinarea mișcării solidului, trebuie să integrăm sistemul de ecuații (1) adică să găsim expresiile variabilelor  $p, q, r$  în funcție de timp.

Ori, dacă înmulțim cele trei ecuații, la rând, cu  $p, q, r$  și le adunăm, obținem

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0$$

deci, integrând,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

care nu este altceva decât ecuația (2) de mai sus.

Inmulțind respectiv aceleași ecuații cu  $Ap, Bq, Cr$  și adunând, găsim

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0$$

și integrând

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$$

care este ecuația (3).

$H$  și  $K$  sunt două constante ale căror valori sunt determinate în funcție de componentele  $p_0, q_0, r_0$  ale vitezei inițiale de rotație prin egalitățile

$$(2)^{\text{bis}} \quad Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 = H$$

$$(3)^{\text{bis}} \quad A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 = K^2.$$

2). Să deducem mai întâi din ecuațiile (2)<sup>bis</sup> și (3)<sup>bis</sup> câteva consecințe de care ne vom servi. Avem

$$K^2 - AH = B(B - A)q_0^2 + C(C - A)r_0^2$$

$$K^2 - BH = C(C - B)r_0^2 + A(A - B)p_0^2$$

$$K^2 - CH = A(A - C)p_0^2 + B(B - C)q_0^2.$$

Dacă presupunem

$$A < B < C$$



relațiile precedente arată că avem

$$K^2 - AH > 0 \quad \text{și} \quad K^2 - CH < 0.$$

În ceea ce privește diferența  $K^2 - BH$ , aceasta se compune dintr'un termen pozitiv și un termen negativ așa că semnul ei nu se poate cunoaște mai de dinainte; valoarea acestei diferențe va putea deci să fie pozitivă, nulă sau negativă, potrivit condițiilor inițiale ale mișcării.

3). Să trecem acum la *metoda de integrațiune*. Ea constă în eliminarea a două din variabilele  $p$ ,  $q$ ,  $r$  între ecuațiile (2) și (3) și una din ecuațiile (1). Se obține astfel o ecuație diferențială care determină pe variabila a treia. Noi vom elimina pe  $p$  și  $r$  pentru ca să putem calcula mai întâi pe  $q$ , componentă a vectorului rotației instantanee pe direcția axului mijlociu al elipsoidului de inerție.

Rezolvind ecuațiile (2) și (3) în raport pe  $p^2$  și  $r^2$ , găsim

$$(4) \quad p^2 = \frac{(CH - K^2) - B(C - B)q^2}{A(C - A)}$$

$$(5) \quad r^2 = \frac{(K^2 - AH) - B(B - A)q^2}{C(C - A)}$$

și substituind aceste valori în a doua dintre ecuațiile (1) pusă sub forma

$$dt = \frac{B}{(C - A)pr} dq$$

obținem

$$dt = \pm \frac{B \sqrt{AC} dq}{\sqrt{[CH - K^2] - B[C - B]q^2} \sqrt{[K^2 - AH] - B[B - A]q^2}}$$

iar, cum  $dt$  este pozitiv, se va lua pentru membrul al doilea semnul  $+$  sau  $-$  după cum  $dq$  va fi pozitiv sau negativ.

Ecuația precedentă se poate scrie

$$(6) \quad dt = \pm \frac{B \sqrt{AC}}{\sqrt{[CH - K^2][K^2 - AH]}} \frac{dq}{d q}$$

$$\sqrt{\left[1 - \frac{B(C - B)}{CH - K^2} q^2\right] \left[1 - \frac{B(B - A)}{K^2 - AH} q^2\right]}$$



Să facem acum schimbarea de variabilă

$$(7) \quad q = u \sqrt{\frac{CH - K^2}{B(C - B)}}.$$

Substituind în ecuația (3) și punând pentru prescurtare

$$(8) \quad m = \sqrt{\frac{(B - A)(CH - K^2)}{(C - B)(K^2 - AH)}}$$

$$(9) \quad n = \pm \sqrt{\frac{(C - B)(K^2 - AH)}{ABC}}$$

se obține

$$n dt = \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - m^2 u^2)}}.$$

Integrațiunea acestei ecuații diferențiale, care depinde de funcțiuni eliptice <sup>1)</sup> ne dă pe  $u$  în funcție de  $t$  și de o constantă arbitrară  $\alpha$ .

Inlocuind în formulele (4) și (5) pe  $q^2$  în funcție de  $u^2$  potrivit ecuației (7), avem

$$p^2 = \frac{CH - K^2}{A(C - A)} (1 - u^2)$$

$$r^2 = \frac{K^2 - AH}{C(C - A)} (1 - m^2 u^2).$$

Ajungem astfel la următorul sistem, care din punct de vedere analitic dă soluția completă a problemei:

$$(10) \quad \begin{cases} p = \sqrt{\frac{CH - K^2}{A(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - u^2} \\ q = \sqrt{\frac{CH - K^2}{B(C - B)}} \cdot u \\ r = \sqrt{\frac{K^2 - AH}{C(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - m^2 u^2}. \end{cases}$$

Constantele arbitrare în număr de trei sunt  $H$ ,  $K$  și  $\alpha$ .

(4). Cum, prin ipoteză,  $A < B < C$ , radicalii din formulele (8), (9) și (10) sunt toți reali.

<sup>1)</sup> Integrala membrului al doilea este o integrală eliptică de prima speță.



Pe de altă parte, pentru ca valoarea lui  $m$  să fie mai mică decât unitatea, așa după cum se presupune în teoria funcțiilor eliptice, trebuie să avem

$$(C - B) (K^2 - AH) > (B - A) (CH - K^2)$$

adică

$$(C - A) (K^2 - BH) > 0$$

inegalitate, care din cauză că diferența  $C - A$  este pozitivă, se reduce la

$$K^2 - BH > 0.$$

În cazul contrariu, adică dacă avem  $K^2 - BH < 0$ , atunci în loc de schimbarea de variabilă (7) vom lua

$$q = u \sqrt{\frac{K^2 - AH}{B(B - A)}}$$

și valoarea respectivă a lui  $m$  fiind

$$m = \sqrt{\frac{(C - B) (K^2 - AH)}{(B - A) (CH - K^2)}}$$

este mai mică decât unitatea. Pentru  $n$  vom lua în acest caz

$$n = \pm \sqrt{\frac{(B - A) (CH - K^2)}{A B C}}.$$

Sistemul (10) ia forma

$$p = \sqrt{\frac{CH - K^2}{A(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - m^2 u^2}, \quad q = \sqrt{\frac{K^2 - AH}{B(B - A)}} \cdot u$$

$$r = \sqrt{\frac{K^2 - AH}{C(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Ne rămâne de examinat cazul când  $K^2 - BH = 0$ . În acest caz, făcând pe  $K^2$  egal cu  $BH$ , vedem că valoarea lui  $m$  se reduce la unitate iar ecuația (6) devine

$$dt = \pm \frac{B \sqrt{AC}}{H \sqrt{(C - B)(B - A)}} \cdot \frac{dq}{1 - \frac{B}{H} q^2}.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă  $q = u \sqrt{\frac{H}{B}}$  obținem



$$dt = \pm \sqrt{\frac{A B C}{(C-B)(B-A)H}} \cdot \frac{du}{1-u^2}$$

sau, mai simplu,

$$(11) \quad n \, dt = \frac{du}{1-u^2}$$

punând

$$n = \pm \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)H}{A B C}}$$

Integrațiunea ecuației (11) ne dă

$$nt + \varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+u}{1-u}$$

de unde

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2(nt + \varepsilon)}$$

și prin urmare

$$u = \frac{e^{nt + \varepsilon} - e^{-nt - \varepsilon}}{e^{nt + \varepsilon} + e^{-nt - \varepsilon}}$$

Avem deci

$$q = \sqrt{\frac{H}{B}} \cdot \frac{e^{nt + \varepsilon} - e^{-nt - \varepsilon}}{e^{nt + \varepsilon} + e^{-nt - \varepsilon}}$$

și, potrivit ecuațiilor (4) și (5) în care înlocuim pe  $K^2$  prin  $BH$ ,

$$p = \sqrt{\frac{(C-B)H}{A(C-A)}} \cdot \frac{2}{e^{nt + \varepsilon} + e^{-nt - \varepsilon}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(B-A)H}{C(C-A)}} \cdot \frac{2}{e^{nt + \varepsilon} + e^{-nt - \varepsilon}}$$

Se vede, că dacă timpul crește indefinit,  $p$  și  $r$  tind către zero, pe când  $q$  tinde către  $\sqrt{\frac{H}{B}}$ . Ori,  $q$  corespunde axului mijlociu de inerție, deoarece s'a presupus  $A < B < C$ . Așa dar:



Când  $K^2 - BH$  este nul, adică în cazul când componentele vitezei unghiulare inițiale pe axul cel mare și pe axul cel mic al elipsoidului de inerție satisfac condiției

$$A(B - A)p_0^2 = C(C - B)r_0^2$$

axul instantaneu de rotație tinde, când timpul crește indefinit, către axul mijlociu de inerție.

5). În rezumat, când  $L, M, N$  sunt nuli, ori care ar fi diferența  $K^2 - BH$ , putem determina pe  $p, q, r$  în funcție de timp.

Trebue să calculăm acum pe  $\psi, \theta, \varphi$ .

2. Calculul unghiurilor  $\psi, \theta, \varphi$ . Să luăm ca ax fix  $Oz$ , vectorul momentului rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ , care știm că rămâne invariabil și ca poziție și ca lungime pe tot timpul mișcării. Fie  $OK$  acest vector și să însemnăm ca și mai sus prin litera  $K$  lungimea sa.

Proiecțiile lui  $OK$  pe axele mobile  $OX, OY, OZ$  se știe că sunt egale cu  $Ap, Bq, Cr$ . Ajutându-ne de figură, să calculăm [direct aceste proiecții și să egalăm, apoi rezultatele dobândite cu  $Ap, Bq, Cr$ .

Pe  $OZ$  și  $OB$  proiecțiile lui  $OK$  sunt  $K \cos \theta$  și  $K \sin \theta$ . Din proiecția pe  $OB$  deducem proiecțiile pe  $OX$  și pe  $OY$  care, potrivit figurei, se vede că sunt egale cu  $K \sin \theta \sin \varphi$  și  $K \sin \theta \cos \varphi$ . Avem deci egalitățile

$$(12) \quad \begin{cases} K \sin \theta \sin \varphi = Ap \\ K \sin \theta \cos \varphi = Bq \\ K \cos \theta = Cr. \end{cases}$$

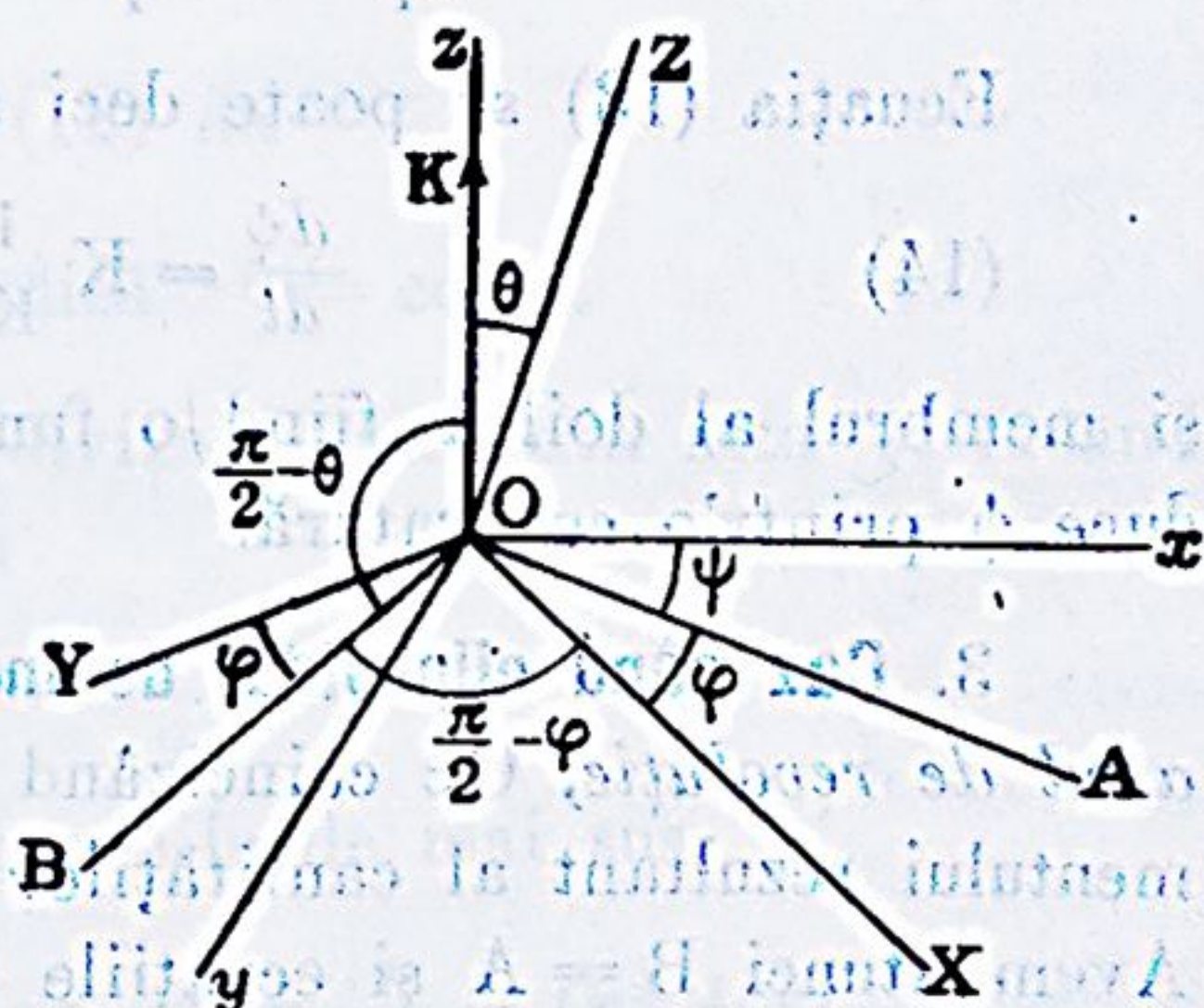


Fig. 187



Aceste egalități permit de a calcula pe  $\theta$  și  $\varphi$  în funcție de timp, de oare-ce  $p$ ,  $q$ ,  $r$  sunt cunoscuți.

Pentru a avea pe  $\psi$ , să reluăm formula generală

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = p \sin \varphi + q \cos \varphi$$

și să înlocuim în ea pe  $\sin \varphi$  și  $\cos \varphi$  prin valorile deduse din egalitățile precedente. Obținem

$$(13) \quad K \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = Ap^2 + Bq^2.$$

Insă, pe de o parte, ultima din egalitățile (12) ne dă

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{C^2 r^2}{K^2}$$

iar pe de altă parte, din integrala (12) deducem

$$Ap^2 + Bq^2 = H - Cr^2.$$

Ecuția (13) se poate deci scrie

$$(14) \quad \frac{d\psi}{dt} = K \frac{H - Cr^2}{K^2 - C^2 r^2}$$

și membrul al doilea fiind o funcție cunoscută de  $t$ , se va deduce  $\psi$  printr'o cuadratură.

**3. Caz când elipsoidul de inerție este de revoluție.** Fie  $OZ$  axul de revoluție,  $Oz$  coincidând ca și mai sus cu vectorul momentului rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ . Avem atunci  $B = A$  și ecuațiile lui Euler devin

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A) r q = 0 \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) r p = 0 \\ \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuație ne dă  $r = \text{const.}$  Celelalte două formează un sistem de ecuații lineare cu coeficienți constanți. Dacă punând

$$n = \frac{C - A}{A} r$$



derivăm pe cea dintâi și înlocuim în derivată pe  $\frac{dq}{dt}$  prin valoarea dedusă din ecuația a doua, găsim

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -n^2p$$

ecuație, a cărei integrală generală știm că este

$$p = \beta \cos (nt + \epsilon)$$

$\beta$  și  $\epsilon$  fiind constante arbitrare. Pe de altă parte, cum

$$\frac{dq}{dt} = np = n\beta \cos (nt + \epsilon)$$

deducem

$$q = \beta \sin (nt + \epsilon)^{1)}.$$

Rămâne să determinăm unghiurile lui Euler prin formulele dela paragraful precedent.

Ultima dintre egalitățile (12) dă

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K} \text{ adică } \theta = \text{const.}$$

Celelalte două egalități, divizate una prin alta și făcând în ele pe B egal cu A, ne dau

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{q}$$

și, înlocuind pe  $p$  și  $q$  prin expresiile de mai sus,

$$\operatorname{tg} \varphi = \cotg (nt + \epsilon) \text{ sau } \varphi = \frac{\pi}{2} - (nt + \epsilon).$$

Însfârșit formula (14) se transformă în felul următor: Din integralele (2) și (3), adică

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H \quad \text{și} \quad A^2\dot{p}^2 + B^2\dot{q}^2 + C^2\dot{r}^2 = K^2$$

deducem, făcând pe B egal cu A,

$$H - Cr^2 = A(p^2 + q^2) \quad \text{și} \quad K^2 - C^2\dot{r}^2 = A^2(\dot{p}^2 + \dot{q}^2).$$

<sup>1)</sup> Avem deci  $p^2 + q^2 = \beta^2 = \text{const.}$  și prin urmare  $\omega^2 = \dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 = \text{const.}$  Viteza unghiulară a rotației instantanee este astfel și ea constantă pe tot timpul mișcării. Vectorul  $\omega$  al acestei rotații este coprim, după cum se știe în planul  $zOZ$ .



Introducând aceste valori în formula (14) obținem

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K}{A} \quad \text{de unde} \quad \psi = \frac{K}{A} t + \psi_0.$$

În rezumat, însemnând prin  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  valorile inițiale ale unghiurilor  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  și observând că  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , avem

$$\psi = \frac{K}{A} t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \frac{(A - C)r}{A} t + \varphi_0.$$

Aceste formule stabilesc, că axul de revoluție al elipsoidului de inerție descrie cu o mișcare uniformă un con de revoluție în jurul vectorului fix al momentului rezultat al cantităților de mișcare<sup>1)</sup>, în timp ce solidul se învâртеște cu o mișcare uniformă în jurul axului de revoluție.

## METODĂ GEOMETRICĂ.

Poinsot a dat o formă geometrică teoriei rotației unui solid în jurul unui punct fix în cazul particular de care ne am ocupat până acum, adică acela când forțele direct aplicate admit o resultantă care trece neconținut prin punctul fix, sau când nu există forțe direct aplicate, rotația având loc numai în virtutea unor condiții inițiale de mișcare a solidului.

Studiul făcut de Poinsot nu se bazează pe stabilirea prealabilă a ecuațiilor lui Euler; toate proprietățile mișcării se deduc numai din aplicația ecuațiilor generale ale Dinamicii, printr'o serie de considerațiuni pur geometrice.

Știm în adevăr că aplicația ecuațiilor generale ale Dinamicii la cazul considerat, conduce pe de o parte la concluzia că *forța vie a solidului este constantă pe tot timpul mișcării*, ceea ce corespunde ecuației

$$(1) \quad I\omega^2 = H \quad \text{sau} \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

<sup>1)</sup> Dreapta OA fiind perpendiculară pe planul zOZ, viteza unghiulară a rotației acestui plan în jurul axului Oz este egală cu viteza unghiulară a rotației dreptei OA în jurul aceluiasi ax Oz, adică egală cu  $\frac{d\psi}{dt}$ .



iar pe de altă parte la concluzia că *momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de punctul fix păstrează neconținut în spațiu aceeași mărime și aceeași direcție*, ceea ce se exprimă prin ecuația

$$(2) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2.$$

Aceasta stabilit, fie într'un moment oarecare:

$OX, OY, OZ$  axele principale de inerție ale solidului pentru punctul fix  $O$ ;

$M$  punctul numit *pol* de către Poinsot, unde axul instantaneu de rotație, dus în sensul vectorului rotației, întâlnește elipsoidul de inerție;

$I$  momentul de inerție al solidului în raport de axul instantaneu;

$\rho$  lungimea razei vectoriale  $OM$ .

Avem, prin definiția însăși a elipsoidului de inerție  $\rho = \frac{1}{\sqrt{I}}$  deci  $I = \frac{1}{\rho^2}$ .

Introducând această valoare în integrala (1) a forțelor vii, obținem  $\frac{\omega^2}{\rho^2} = H$  de unde

$$(3) \quad \frac{\omega}{\rho} = \sqrt{H}.$$

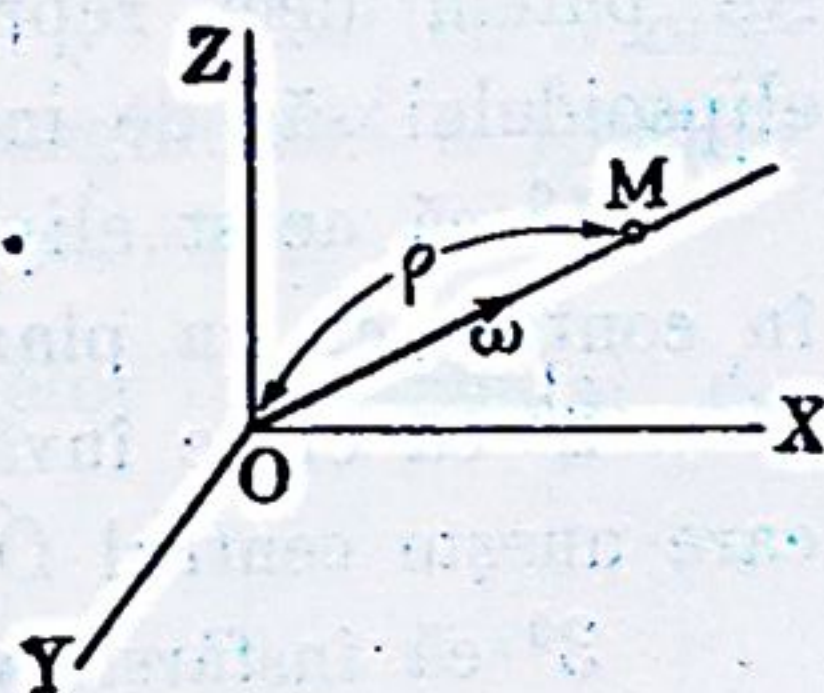


Fig. 188

Conchidem: **Teorema I.** *Viteza unghiulară a rotației instantanee este proporțională cu distanța punctului fix la pol.*

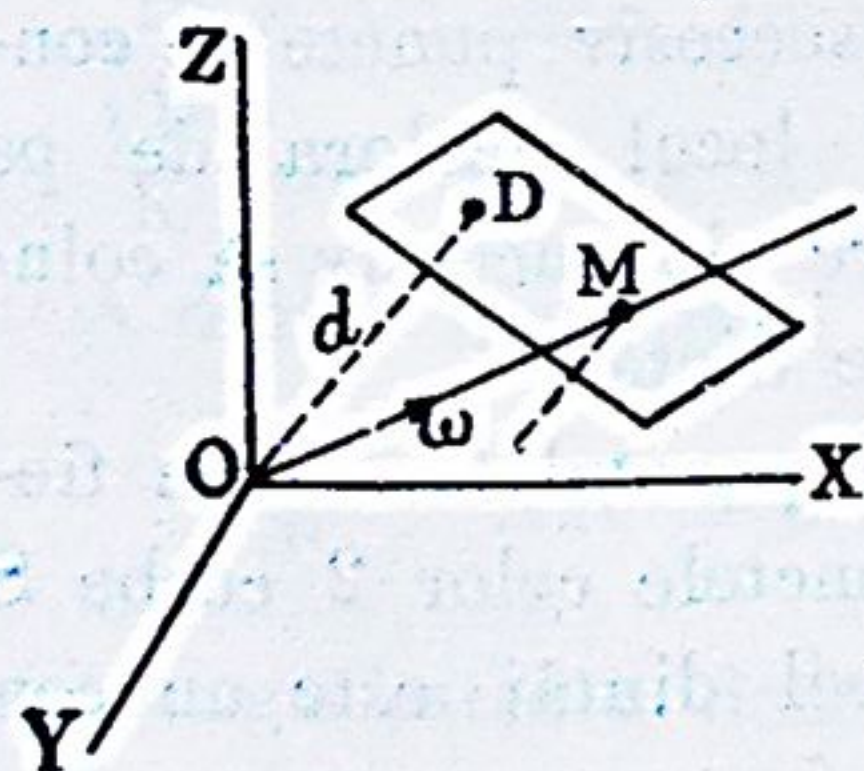


Fig. 189

Să considerăm, pe de altă parte, planul tangent elipsoidului de inerție în punctul  $M$ . După cum am demonstrat la pag. 347, normala în  $M$  dusă acestui plan este paralelă cu momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de punctul fix, care știm că este un vector de direcție invariabilă.

Deci: **Teorema II.** *Planul tangent în pol elipsoidului de inerție are totdeauna aceeași direcție.*



Să calculăm însfârșit distanța  $d$  dela origină la planul tangent. Avem

$$d = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}$$

sau, ținând socoteală de relația (2)

$$d = \frac{\sqrt{H}}{K} \quad \text{adică } d = \text{const.}$$

Așa dar: **Teorema III.** *Planul tangent în pol elipsoidului de inerție, rămâne totdeauna la aceeași distanță de punctul fix.*

*Prima reprezentare geometrică a mișcării.* Din teoremele II și III rezultă că planul tangent considerat este complet fix. Ne putem deci reprezenta mișcarea solidului, invariabil legat elipsoidului său de inerție pentru punctul fix, imaginând:

1° că acest elipsoid, al căruia centru  $O$  este fix, rămâne în contact cu un plan fix  $P$ ;

2° că el se învâртеște în fiecare moment în jurul dreptei care unește centrul  $O$  cu punctul de contact  $M$ ;

3° că însfârșit vectorul  $\omega$  al rotației este proporțional cu lungimea  $OM$ .

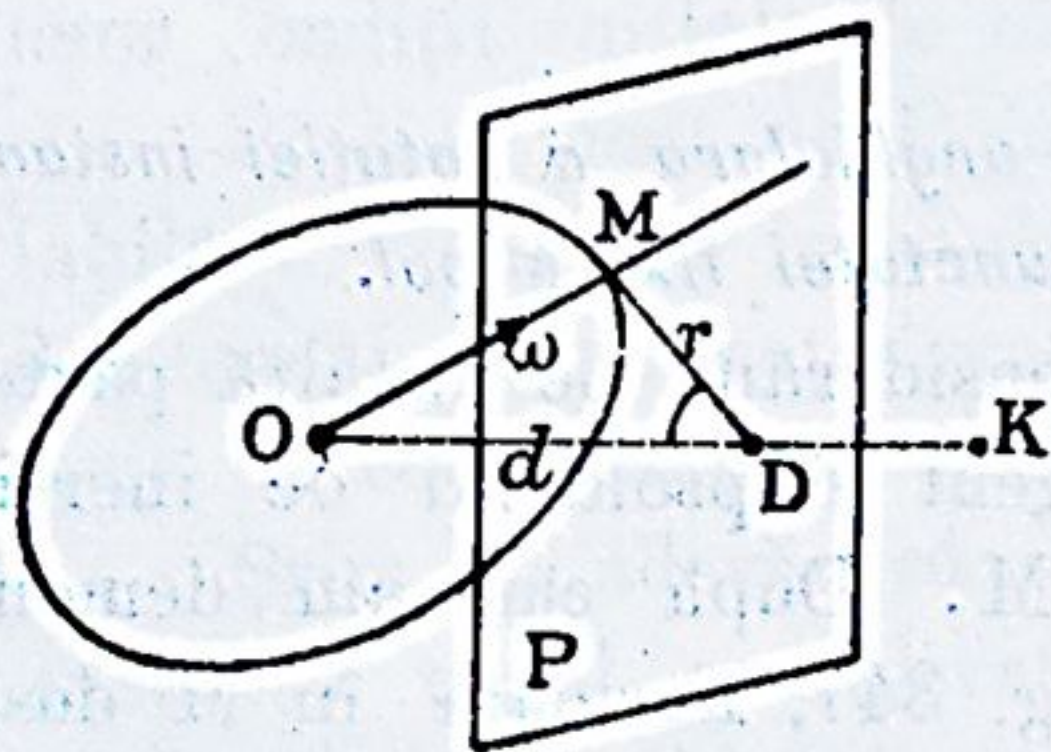


Fig. 190

*A doua reprezentare geometrică a mișcării.* Fie  $S$  locul geometric al punctelor din planul  $P$  care devin succesiv puncte de contact și  $S'$  locul acelor de pe elipsoid care vin succesiv să coincidă cu cele dintâi.

Unind punctul fix  $O$  cu fiecare din punctele celor 2 curbe  $S$  și  $S'$ , obținem două conuri, dintre care cel dintâi este un con fix și reprezintă locul pozițiilor axului instantaneu în spațiu. Celălalt con este mobil odată cu solidul și reprezintă locul dreptelor invariabil legate solidului care devin succesiv axe instantanee de rotație.



După cum știm din Cinematică (pag. 149) *mișcarea solidului poate să fie produsă prin rostogolirea conului mobil pe conul fix.*

Curbele  $S'$  și  $S$  poartă respectiv numele de *polodia* și *herpolodia* lui Poinot.

În cazul particular când elipsoidul de inerție este de revoluție, raza vectoare  $\rho$  este constantă de oare-ce punctele elipsoidului care devin succesiv puncte de contact cu planul  $P$  sunt toate situate pe același paralel al acestui elipsoid așa că herpolodia se reduce la un cerc. Cum pe figura de mai sus avem

$$r^2 = \rho^2 - d^2$$

rezultă că și  $r$  este constant, adică polodia este și ea tot un cerc, descris din punctul  $D$  ca centru. Cele două conuri sunt deci de revoluție și ele se rostogolesc unul pe altul cu o mișcare uniformă, căci  $\rho$  fiind constant viteza unghiulară a rotației instantanee este și ea constantă potrivit teoremei I.

*Notă.* Fie  $a, b, c$  lungimile semi-axelor elipsoidului de inerție. Să presupunem  $a > b > c$ . Avem

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Să vedem la ce se reduce în mod geometric inegalitățile cunoscute:

$$K^2 - AH > 0 \quad \text{și} \quad K^2 - CH < 0.$$

În acest scop, plecăm dela egalitatea mai sus obținută  $d = \frac{\sqrt{H}}{K}$  care ne dă  $K^2 = \frac{H}{d^2}$ . Introducând această valoare, prima dintre inegalități devine

$$\frac{H}{d^2} - AH > 0 \quad \text{adică} \quad d < \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{sau} \quad d < a.$$

Inegalitatea a doua devine la rândul ei

$$\frac{H}{d^2} - CH < 0 \quad \text{adică} \quad d > \frac{1}{\sqrt{C}} \quad \text{sau} \quad d > c.$$

Vedem astfel că cele două inegalități în chestiune exprimă pur și simplu, că distanța punctului fix la planul  $P$  tangent



elipsoidului de inerție, este coprinsă între semi-axul cel mare și semi-axul cel mic al elipsoidului.

### III. MIȘCAREA UNUI SOLID DE REVOLUȚIE, OMOGEN, ÎN JURUL UNUI PUNCT AL AXULUI SĂU DE FIGURĂ.

1. **Definiții.** Vom lua axul de revoluție ca ax mobil OZ. Elipsoidul de inerție pentru punctul O fiind și el de revoluție în jurul lui OZ avem  $B = A$ .

Se numește:

*ecuator*, planul XOY al axelor principale egale;

*linia nodurilor*, intersecția OA a ecuatorului cu planul fix  $xOy$ ;

*precesiune*, rotația solidului în jurul axului fix Oz, viteza de

*precesiune* fiind viteza unghiulară  $\frac{d\psi}{dt}$  a liniei nodurilor în jurul axului Oz, care este de altfel viteza unghiulară de rotație a planului ZOz în jurul lui Oz;

*nutațiune*, rotația solidului în jurul liniei nodurilor, viteza de

*nutațiune* fiind viteza unghiulară  $\frac{d\theta}{dt}$  a axului de revoluție în jurul liniei nodurilor;

*rotație proprie*, rotația solidului în jurul axului său de revoluție

OZ, viteza de rotație proprie fiind  $\frac{d\varphi}{dt}$ .

2. **Schimbare de variabile.** Ecuațiile mișcării sunt cele trei ecuații ale lui Euler, în care facem  $B = A$ , adică

$$(1) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A) qr = L \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) pr = M \\ C \frac{dr}{dt} = N \end{cases}$$

la care se adaugă cele trei relații de corespondență

$$(2) \quad \begin{cases} p \cos \varphi - q \sin \varphi = \frac{d\theta}{dt} \\ p \sin \varphi + q \cos \varphi = \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \\ r = \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$



Elipsoidul de inerție fiind de revoluție, este avantajos de a lua ca axe mobile sistemul  $OZ$ ,  $OA$ ,  $OB$ , axul  $OB$  fiind perpendicular pe  $OA$  în planul  $XOY$ . Axele  $OA$  și  $OB$  sunt în același timp mobile și în solid și în spațiu.

Să însemnăm prin  $p'$  și  $q'$  componentele vectorului rotației instantanee pe direcțiile  $OA$  și  $OB$ . Expresiile acestor componente se obțin proiectând succesiv pe  $OA$  și  $OB$ , componentele  $p$  și  $q$  de pe axe  $OX$  și  $OY$ , ceea ce dă

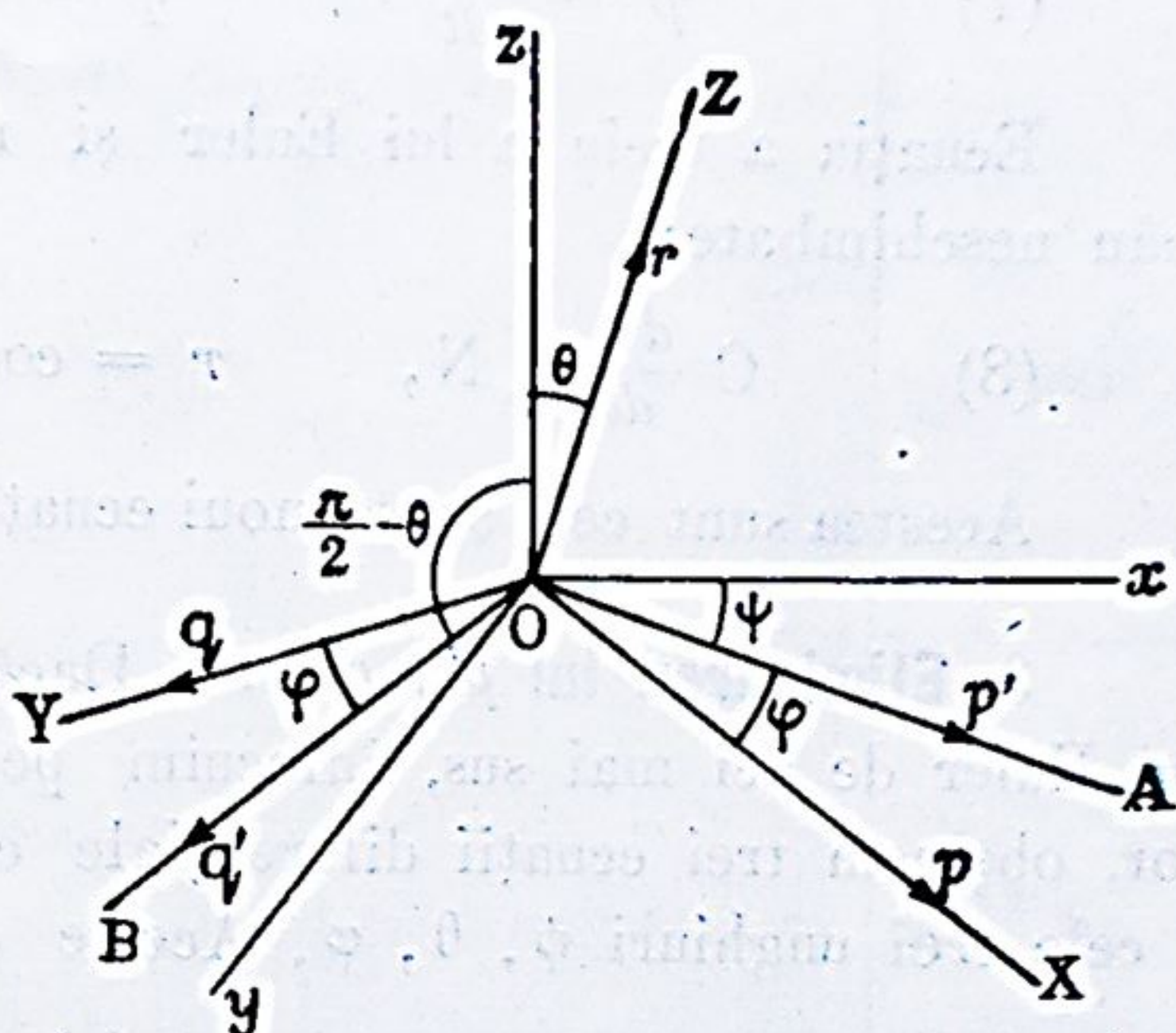


Fig. 191

$$(3) \quad \begin{aligned} p' &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ q' &= p \sin \varphi + q \cos \varphi. \end{aligned}$$

De asemenea, însemnând prin  $L'$  și  $M'$  componentele pe  $OA$  și  $OB$  ale momentului rezultat al forțelor aplicate, avem

$$(4) \quad \begin{aligned} L' &= L \cos \varphi - M \sin \varphi \\ M' &= L \sin \varphi + M \cos \varphi. \end{aligned}$$

Deducem de altfel din ecuațiile (3) prin derivare,

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \left( \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi \frac{dq}{dt} \right) - q' \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dq'}{dt} &= \left( \sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt} \right) + p' \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Aceasta stabilit, pentru a introduce noile variabile  $p'$  și  $q'$  este suficient de a aduna cele două dintâi ecuații ale lui Euler înmulțite respectiv mai întâi cu  $\cos \varphi$  și  $-\sin \varphi$ , apoi cu  $\sin \varphi$  și  $\cos \varphi$ . Se obține, ținând socoteală de relațiile (3), (4) și (5),

$$(6) \quad \begin{aligned} A \frac{dp'}{dt} + (C - A) q' r + A q' \frac{d\varphi}{dt} &= L' \\ A \frac{dq'}{dt} - (C - A) p' r - A p' \frac{d\varphi}{dt} &= M' \end{aligned}$$



iar pe de altă parte, cele două dintâi relații (2) se scriu

$$(7) \quad p' = \frac{d\theta}{dt}, \quad q' = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Ecuatia a treia a lui Euler și relația treia dela (2) rămân neschimbate:

$$(8) \quad C \frac{dr}{dt} = N, \quad r = \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Acestea sunt cele șase noi ecuații diferențiale ale mișcării.

**3. Eliminarea lui  $p'$ ,  $q'$ ,  $r$ .** Dacă în cele trei ecuații ale lui Euler de aci mai sus, înlocuim pe  $p'$ ,  $q'$ ,  $r$  prin expresiile lor, obținem trei ecuații diferențiale care definesc în funcție de  $t$  cele trei unghiuri  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Aceste ecuații sunt următoarele:

$$(9) \quad \begin{cases} A \frac{d^2\theta}{dt^2} + (C - A) \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + C \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = L' \\ A \sin \theta \frac{d^2\psi}{dt^2} + (2A - C) \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} - C \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = M' \\ C \frac{d}{dt} \left( \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) = N. \end{cases}$$

Problema determinării mișcării solidului este astfel redusă la o chestiune de pură Analiză. Obținerea soluției dă însă loc la dificultăți ce nu pot fi învinse. Dacă totuși s'au putut rezolva unele probleme de acest gen, aceasta se datorează faptului că s'au putut înlocui una sau două din ecuațiile (9) prin una sau două integrale de ordinul întâi, date de teorema momentelor cantităților de mișcare și de teorema forțelor vii. Vom vedea mai departe un exemplu.

**4. Caz când solidul este supus unei singure forțe, aplicată într'un punct al axului de figură.** Fie  $F$  forța și  $S$  punctul ei de aplicație, situat pe axul de revoluție  $OZ$  la distanța  $l$  de punctul fix  $O$ .

Dacă însemnăm cu  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z$  componentele forței pe direcțiile  $OA$ ,  $OB$ ,  $OZ$ , avem

$$L' = -lY', \quad M' = lX', \quad N = 0.$$



N, fiind nul, ecuația a treia din sistemul (9) se integrează și ne dă, însemnând prin  $n$  o constantă,

$$(10) \quad \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n \quad \text{adică } r = n.$$

Să presupunem că solidul se învâртеște cu o foarte mare viteză în jurul axului său de figură OZ. În acest caz  $\frac{d\varphi}{dt}$  fiind foarte mare, ecuația

(10) se reduce sensibil la  $\frac{d\varphi}{dt} = n$  și, în mod analog, reducând primii membri ai celorlalte două ecuații ale sistemului (9) la valorile lor principale, găsim relațiile aproximative

$$(11) \quad C n \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = -l Y', \quad C n \frac{d\theta}{dt} = -l X'.$$

Aceste ecuații permit de a calcula pe  $\psi$  și  $\theta$  când se dă  $X'$  și  $Y'$ , și invers.

a). *Mișcare de nutațiune fără precesiune.* Dacă presupunem că forța rămâne coprinsă în planul AOZ, avem  $Y' = 0$  și prin urmare  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  adică  $\psi = \text{const.}$  Rezultă, că axul de figură OZ se învâртеște în jurul dreptei OA, care rămâne fixă, cu o viteză unghiulară  $\frac{d\theta}{dt}$  dată de ecuația a doua din sistemul (11); acest ax se mișcă deci într'un plan fix perpendicular direcției forței motrice  $X'$  (planul BOzZ). Dacă  $X'$  este pozitiv,  $\frac{d\theta}{dt}$  și  $n$  vor fi de semne contrarii, așa că axul de figură se va apropia sau se va depărta de Oz după cum rotația solidului în jurul axului de figură va avea loc dela stânga la dreapta sau dela dreapta la stânga. Dacă  $X'$  este negativ, mișcarea se produce în sens invers.

b). *Mișcare de precesiune fără nutațiune.* Să presupunem

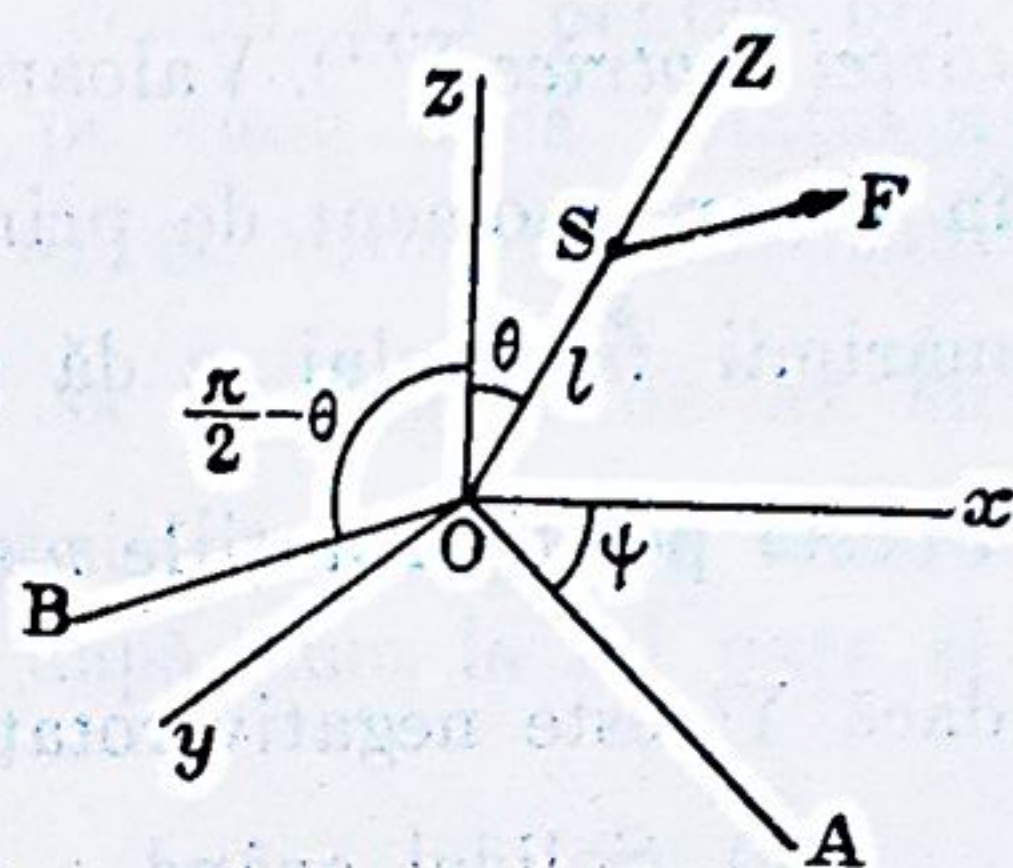


Fig. 192



din potrivă că forța rămâne neconținut coprinsă în planul BOZ. Avem atunci  $X' = 0$  și prin urmare  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  adică  $\theta = \text{const.}$  Axul de figură OZ descrie deci o mișcare conică în jurul dreptei fixe Oz, deplasarea lui fiind astfel *perpendiculară direcției forței motrice*  $Y'^1$ ). Valoarea vitezei de precesiune  $\frac{d\psi}{dt}$  este dată în fiecare moment de prima din ecuațiile (11), care din cauza mărimii factorului  $n$  dă pentru  $\frac{d\psi}{dt}$  o valoare foarte mică. Dacă  $Y'$  este pozitiv rotațiile  $n$  și  $\frac{d\psi}{dt}$  vor fi de, sensuri. contrarii, iar dacă  $Y'$  este negativ rotația  $\frac{d\psi}{dt}$  va avea același sens ca rotația  $n$ .

c). Solidul având o mișcare inițială de rotație rapidă în jurul axului de figură OZ, și fără a fi supus acțiunii vre unei forțe, să acționăm cu mâna acest ax făcându-l să descrie cu o mișcare uniformă un con de revoluție în jurul axului fix Oz. Vom avea  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  și  $\frac{d\psi}{dt} = \text{const.}$  În consecință  $X' = 0$ . Realizăm astfel cazul dela litera b) însă cu viteză de precesiune constantă, și avem

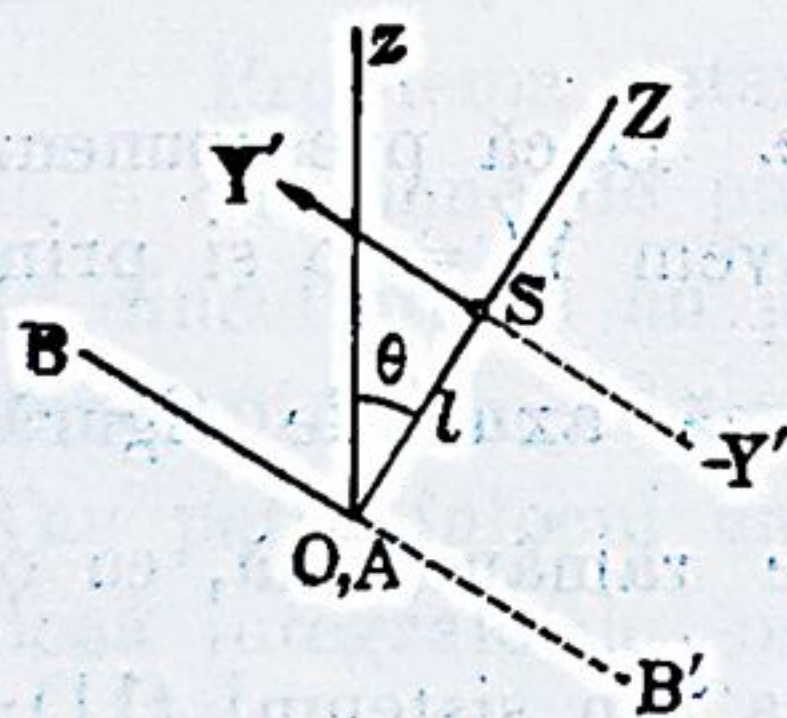


Fig. 193.

$$Y' = - \frac{C n \sin \theta}{l} \cdot \frac{d\psi}{dt}.$$

Aceasta este forța care produce mișcarea conică și care este egală și direct opusă reacțiunii axului asupra mânei<sup>2)</sup>.

Dacă  $\frac{d\psi}{dt}$  nu este foarte mic, reacțiunea este foarte mare; paralelă cu OB, ea este *perpendiculară direcției în care se depla-*

<sup>1)</sup> Viteza unghiulară a planului zOZ în rotația din jurul lui Oz este egală cu viteza unghiulară  $\frac{d\varphi}{dt}$  a dreptei OA din planul xOy, această dreaptă fiind perpendiculară pe zOZ.

<sup>2)</sup> Putem scrie

$$Y' = - \frac{Cn}{l^2} \cdot (l \sin \theta) \frac{d\psi}{dt} = - \frac{Cn}{l^2} V$$

însemnând prin  $V$  viteza punctului de aplicație S. Forța motrice este deci proporțională cu produsul  $Vn$  și invers proporțională cu  $l^2$ .



sează axul  $OZ$ , contrariu de ceea ce ar avea loc dacă n'ar exista rotația.

Dacă rotația  $n$  are loc dela stânga la dreapta și voim să realizăm un  $\frac{d\psi}{dt}$  de același sens, cum  $Y'$  trebuie să fie atunci negativ va trebui să tragem de ax în sensul  $OB'$  pentru producerea mișcării conice în sensul voit, pe când dacă rotația  $n$  are loc dela dreapta la stânga ( $n < 0$ ) și voim să realizăm aceeași mișcare ( $\frac{d\psi}{dt} > 0$ ) va trebui să împingem de ax în sensul  $OB$  pentru ca  $Y'$  să fie astfel pozitiv. La prima vedere aceasta pare cu adevărat paradoxal, după cum la fel pare și rezultatul dela litera a).

*Notă.* Să considerăm cazul când forța aplicată solidului ar fi greutatea sa  $P$  aplicată în centrul de greutate  $G$ , la distanța  $a$  de punctul fix  $O$ .

Luând axul  $Oz$  vertical, greutatea  $P$  va fi neconținut coprinsă în planul  $BOZ$  și vom avea  $Y' = -P \sin \theta$ . Deci

$$P \sin \theta = \frac{Cn \sin \theta}{a} \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

de unde

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cn}$$

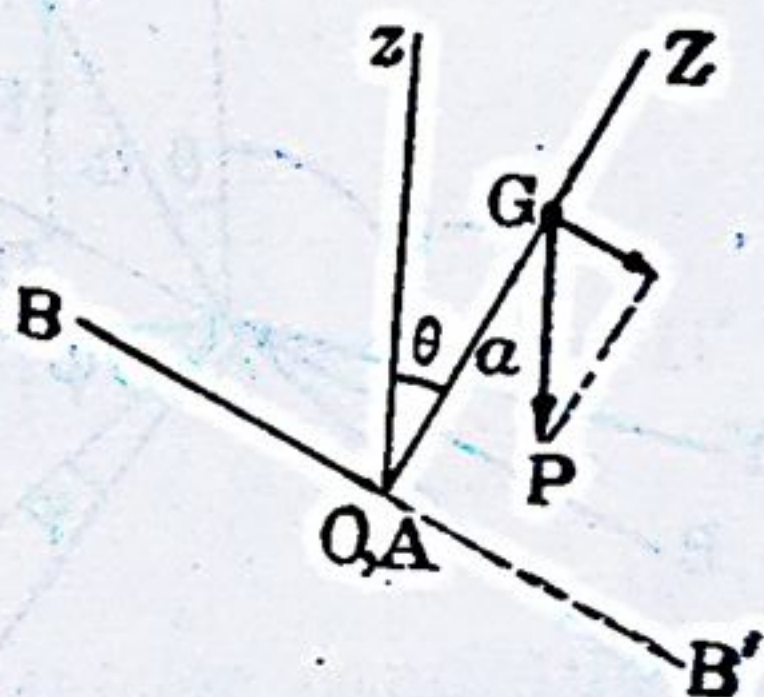


Fig. 194

Aceasta nu este decât o valoare mijlocie. În ceea ce urmează vom stabili o valoare mai precisă, studiind cu mai multă rigurozitate chestiunea mișcării unui solid greu în jurul unui punct al axului său de figură.

#### IV. MIȘCAREA UNUI SOLID DE REVOLUȚIE, OMOGEN, ÎN JURUL UNUI PUNCT AL AXULUI SĂU DE FIGURĂ, ÎN CAZUL CÂND EL NU ESTE SUPUS DECÂT ACȚIUNEI GREUTĂȚII.

1. **Ecuatiile mișcării.** a). Să considerăm un solid de revoluție omogen, mobil în jurul unuia din punctele axului său de figură  $O$  și supus numai acțiunii greutății.



Axul fix  $Oz$  fiind vertical și îndreptat în sus, fie:  
 $G$ , centrul de greutate al solidului;  
 $a$ , distanța lui  $G$  la punctul fix  $O$ ;  
 $P$ , greutatea solidului.

Forțele direct aplicate reducându-se la forța  $P$  aplicată în punctul  $G$  și coprinsă în planul dreptelor  $OZ$ ,  $Oz$ ,  $OB$  care este perpendicular direcției  $OA$ , componentele  $L'$ ,  $M'$ ,  $N$  ale momentului resultant în raport de axe  $OA$ ,  $OB$ ,  $OZ$  sunt

$$(12) \quad \begin{aligned} L' &= P \cdot OD = P \cdot a \sin \theta \\ M' &= 0, \quad N = 0. \end{aligned}$$

Inlocuind în ecuațiile (9) pe  $L'$ ,  $M'$ ,  $N$  prin aceste valori, obținem ecuațiile mișcării. Nu

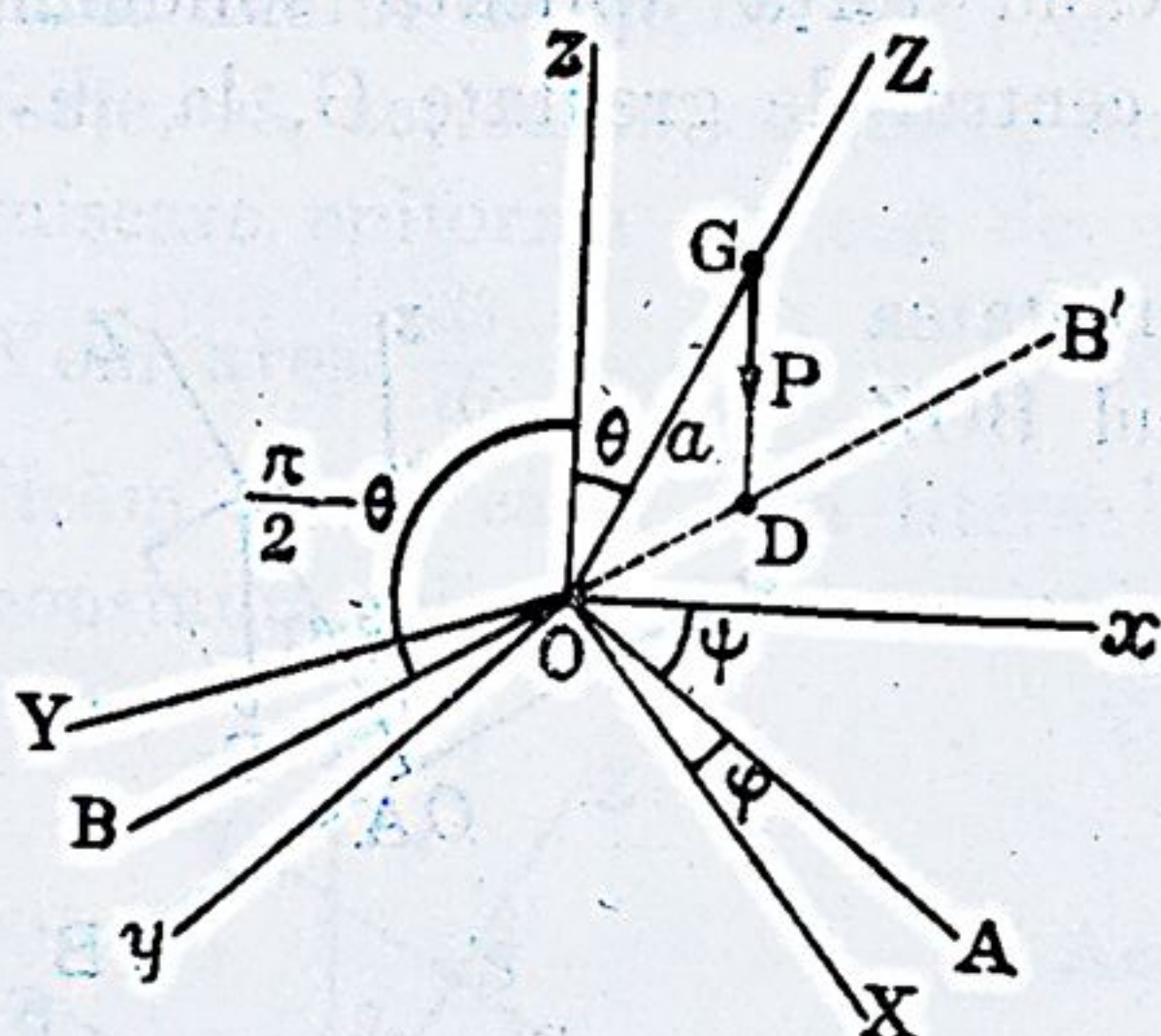


Fig. 195

vom utiliza însă decât pe a treia dintre aceste ecuații, substituind celorlalte două integralele de ordinul întâi pe care ni le dă teorema forțelor vii și teorema momentelor cantităților de mișcare.

Ecuația a treia din sistemul (9) care nu este altceva decât ecuația a treia a lui Euler:

$$C \frac{dr}{dt} = N, \text{ se integrează când}$$

facem pe  $N$  egal cu zero și ne dă

$$\cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n$$

$n$  reprezentând valoarea constantă a lui  $r$  pe tot timpul mișcării.

b). Să aplicăm acum *teorema forțelor vii*. Cum solidul fiind de revoluție în jurul axului  $OZ$  avem  $B = A$ , forța sa vie are ca expresie

$$T = \frac{1}{2} \left[ A (p^2 + q^2) + Cr^2 \right].$$



Insă relațiile cunoscute (3):

$$p' = p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad q' = p \sin \varphi + q \cos \varphi$$

ne dau

$$p'^2 + q'^2 = p^2 + q^2 \quad ^1)$$

deci

$$T = \frac{1}{2} \left[ A (p'^2 + q'^2) + Cr^2 \right].$$

Pe de altă parte, greutatea  $P$  admite ca potențial  $V = Pz$ ,  
adică

$$V = P \cdot a \cos \theta.$$

Exprimând potrivit teoremei forțelor vii că suma  $T + V$  este o constantă, obținem ecuația

$$A (p'^2 + q'^2) + Cr^2 + 2 P a \cos \theta = \text{const.}$$

care, ținând socoteală de relațiile (7) adică

$$p' = \frac{d\theta}{dt}, \quad q' = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}$$

se scrie

$$(13) \quad A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] + 2 P a \cos \theta = H'$$

$H'$  fiind o constantă.

c). Să aplicăm în sfârșit *teorema momentelor cantităților de mișcare*. Fie  $OK$  momentul rezultat al cantităților de mișcare în raport de  $O$ . Știm că proiecția pe un ax a vitezei punctului  $K$  este egală cu momentul rezultat al forțelor direct aplicate în raport de axul considerat.

Să luăm ca ax de proiecțiune axul fix  $Oz$ . Momentul forței  $P$  în raport de  $Oz$  fiind neconținut nul, rezultă că proiecția pe acest ax a vitezei punctului  $K$  este neconținut nulă și prin urmare că proiecția vectorului  $OK$  pe  $Oz$  este o constantă.

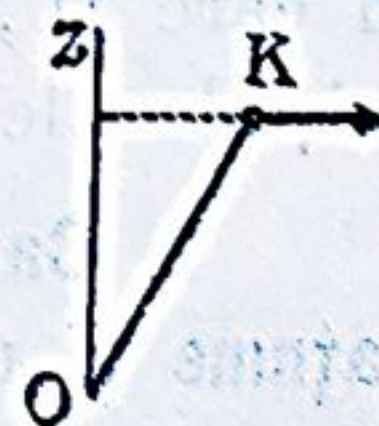


Fig 196

<sup>1)</sup> Relație de altfel evidentă, căci  $\omega$  fiind vectorul rotației instantanee, avem  $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = p'^2 + q'^2 + r^2$ .



Ori, proiecțiile lui OK pe axele mobile OX, OY, OZ sunt

$$Ap, \quad Aq, \quad Cr$$

deci proiecțiile pe axele OA, OB, OZ vor fi

$$Ap \cdot \cos \varphi - Aq \cdot \sin \varphi, \quad Ap \cdot \sin \varphi + Aq \cdot \cos \varphi, \quad Cr$$

$$\text{adică} \quad Ap', \quad Aq', \quad Cr.$$

Să proiectăm aceste segmente pe axul Oz. Proiecția lui  $Ap'$  este nulă, OA fiind perpendiculară pe Oz. Proiecția lui  $Aq'$  este egală cu  $Aq' \sin \theta$ , iar aceea a lui  $Cr$  egală cu  $Cr \cos \theta$ . Așa dar, proiecția vectorului OK pe Oz este  $Aq' \sin \theta + Cr \cos \theta$ .

Înlocuind pe  $q'$  prin  $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$ , pe  $r$  prin  $n$  și exprimând că suma respectivă este o constantă  $K'$ , obținem ecuația

$$(14) \quad A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + Cn \cos \theta = K'.$$

d). În rezumat, sistemul de ecuații (9) poate fi înlocuit în cazul de față prin următorul sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul întâi, care determină pe  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  în funcție de  $t$ :

$$(15) \quad \begin{cases} A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] + 2Pa \cos \theta = H' \\ A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + Cn \cos \theta = K' \\ \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n \end{cases}$$

în care  $H'$ ,  $K'$ ,  $n$  reprezintă constante depinzând de condițiile inițiale ale mișcării.

**2. Caz particular când la începutul mișcării vitezele de rotație și de precesiune sunt amândouă nule, iar solidul este animat de o foarte mare viteză de rotație în jurul axului său de figură.**

Punând pentru simplitate

$$\frac{Pa}{A} = l, \quad \frac{Cn}{A} = m$$



ecuațiile precedente se pot scrie, introducând condițiile inițiale, adică  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0$ ,  $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ :

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2l(\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = m(\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n. \quad \left[ n = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 \right] \end{cases}$$

Eliminând pe  $\frac{d\psi}{dt}$  între cele două dintâi ecuații, se obține

$$(17) \quad \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2l \sin^2 \theta (\cos \theta_0 - \cos \theta) - m^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2.$$

Această ecuație determină pe  $\theta$ ; a doua din ecuațiile (16) dă atunci pe  $\frac{d\psi}{dt}$  adică viteza de precesiune, iar ecuația a treia procură însfârșit viteza rotației proprii  $\frac{d\varphi}{dt}$  în jurul axului de figură.

Să ținem acum socoteală de faptul că, prin ipoteză, viteza inițială  $n$  este foarte mare. Cantitatea  $m$  este și ea atunci foarte mare, și, pentru ca membrul al 2<sup>lea</sup> al ecuației (17) să fie pozitiv, după cum este și membrul întâi, trebuie, pe de o parte ca diferența  $\cos \theta_0 - \cos \theta$  să fie pozitivă pentru ca primul termen din membrul al doilea să fie pozitiv, iar pe de altă parte această diferență trebuie să fie și foarte mică pentru ca termenul  $m^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2$  să poată fi mai mic decât  $2l \sin^2 \theta (\cos \theta_0 - \cos \theta)$ . Vom putea deci pune

$$(18) \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon$$

$\varepsilon$  fiind o cantitate pozitivă și foarte mică, al căreia patrat va putea fi neglijat, afară de cazul când acest patrat se va găsi multiplicat cu un factor de aceeași ordine de mărime ca  $n^2$ <sup>1)</sup>. În consecință, vom putea scrie:

<sup>1)</sup> Aceasta pentru motivul că în ecuația (17) termenul final este tot mai de ordinul  $n^2 \varepsilon^2$ , ceea ce se poate vedea punându-l sub forma

$$4 m^2 \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta - \theta_0}{2} \quad \text{adică} \quad \frac{C^2}{A^2} n^2 \varepsilon^2 \sin^2 \frac{2 \theta_0 + \varepsilon}{2}.$$



$$\cos \theta = \cos (\theta_0 + s) = \cos \theta_0 - s \sin \theta_0$$

$$\sin^2 \theta = \sin^2 (\theta_0 + s) = \sin^2 \theta_0 + 2 s \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

și ecuația (17) devine prin aceste substituiri, neglijând termenii în  $s^2$ , păstrând pe acela în  $m^2 s^2$  și simplificând cu  $\sin \theta_0$ ,

$$(\sin \theta_0 + 2 s \cos \theta_0) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 l s \sin^2 \theta_0 - m^2 s^2 \sin \theta_0$$

de unde

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2 l s \sin^2 \theta_0 - m^2 s^2 \sin \theta_0}{\sin \theta_0 + 2 s \cos \theta_0}$$

și, efectuând diviziunea din membrul al doilea cu respectarea aceluiași principiu ca mai sus, ceea ce revine la neglijarea lui  $2 s \cos \theta_0$  înaintea lui  $\sin \theta$ ,

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 l s \sin \theta_0 - m^2 s^2$$

sau

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = m^2 s \left( \frac{2 l \sin \theta_0}{m^2} - s \right).$$

Dacă punem

$$\alpha = \frac{2 l \sin \theta_0}{m^2}$$

putem scrie

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = m^2 s (\alpha - s)$$

de unde, observând că potrivit egalității (18) avem  $d\theta = ds$ ,

$$\frac{ds}{\sqrt{s(\alpha - s)}} = m dt.$$

Integrațiunea acestei ecuații, ținând socoteală că pentru  $t = 0$  avem  $\theta = \theta_0$  și prin urmare  $s = 0$ , ne dă

$$\arccos \left( 1 - \frac{2s}{\alpha} \right) = mt.$$

Din această egalitate rezultă

$$(19) \quad s = \frac{\alpha}{2} (1 - \cos mt)$$

sau

$$s = \alpha \sin^2 \frac{mt}{2}.$$



Cantitatea pozitivă  $\varepsilon$  este deci periodică și  $\alpha$  este valoarea sa maximă. Avem de altfel, substituind lui  $l$  și  $m$  valorile lor

$$\alpha = \frac{2l \sin \theta_0}{m^2} = \frac{2AP a \sin \theta_0}{C^2 n^2}.$$

Unghiul  $\theta$  pornește deci dela valoarea  $\theta_0$ , crește până la valoarea  $\theta_0 + \alpha$  apoi se micșorează, revine la valoarea  $\theta_0$  când  $\varepsilon = 0$  și tot așa mai departe. Valoarea lui  $\alpha$  este de altfel foarte mică și cu atât mai mică cu cât  $n$  este mai mare.

a). *Viteza de nutațiune.* Egalitățile (18) și (19) ne dau

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{m\alpha}{2} \sin mt$$

sau

$$(20) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Pa \sin \theta_0}{Cn} \sin mt.$$

b). *Viteza de precesiune.* Valoarea  $\frac{d\psi}{dt}$  rezultă, după cum s'a mai spus, din a doua din ecuațiile (16) care dă

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{m(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{m\varepsilon}{\sin \theta_0 + 2\varepsilon \cos \theta_0}$$

adică, în aceeași ordine de aproximație,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{m\varepsilon}{\sin \theta_0}$$

sau, înlocuind pe  $m$  prin valoarea sa și pe  $\varepsilon$  prin expresia (19),

$$(21) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cn} (1 - \cos mt).$$

Cum  $1 - \cos mt$  variază între 0 și 2, valoarea mijlocie a vitezei de precesiune este egală cu  $\frac{Pa}{Cn}$ .

c). *Viteza de rotație proprie.* Ecuația a treia din sistemul (16) ne dă

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} = n - (\cos \theta_0 - \varepsilon \sin \theta_0) \frac{Pa}{Cn} (1 - \cos mt)$$

adică

$$(22) \quad \frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{Pa}{Cn} \cos \theta_0 (1 - \cos mt).$$



d). *Valoarea perioadei.* Cele trei expresiuni (20), (21) și (22) arată că vitezele de nutațiune, de precesiune și de rotație proprie trec respectiv prin aceleași valori când cantitatea  $mt$  se mărește cu  $2\pi$ , adică, când timpul se mărește cu  $\frac{2\pi}{m}$ . Valoarea

$$T = \frac{2\pi}{m} \quad \text{sau} \quad T = \frac{2\pi A}{Cn}$$

reprezintă deci perioada fenomenului. Ea este foarte mică.

*Notă.* Rezultatele, atât dela capitolul de față cât și dela capitolul precedent, se aplică nu numai solidelor de revoluție omogene, dar și solidelor de revoluție care fără a fi omogene prezintă particularitatea că punotele lor care se corespund simetric față de axul de revoluție au aceeași massă (Nota dela pag. 153).

**3. Giroscoape.** Rezultatele de mai sus se verifică cu ajutorul *sfârlezei giroscopice* și a *balanței giroscopice*.

*Sfârleaza giroscopică* este constituită dintr'un tor metalic T, al căruia ax AA' este menținut de un cadru circular C, acesta formând corp cu o vergea OZ dispusă în prelungirea axului torului.

Extremitatea O a vergelei se dispune, după învârtirea

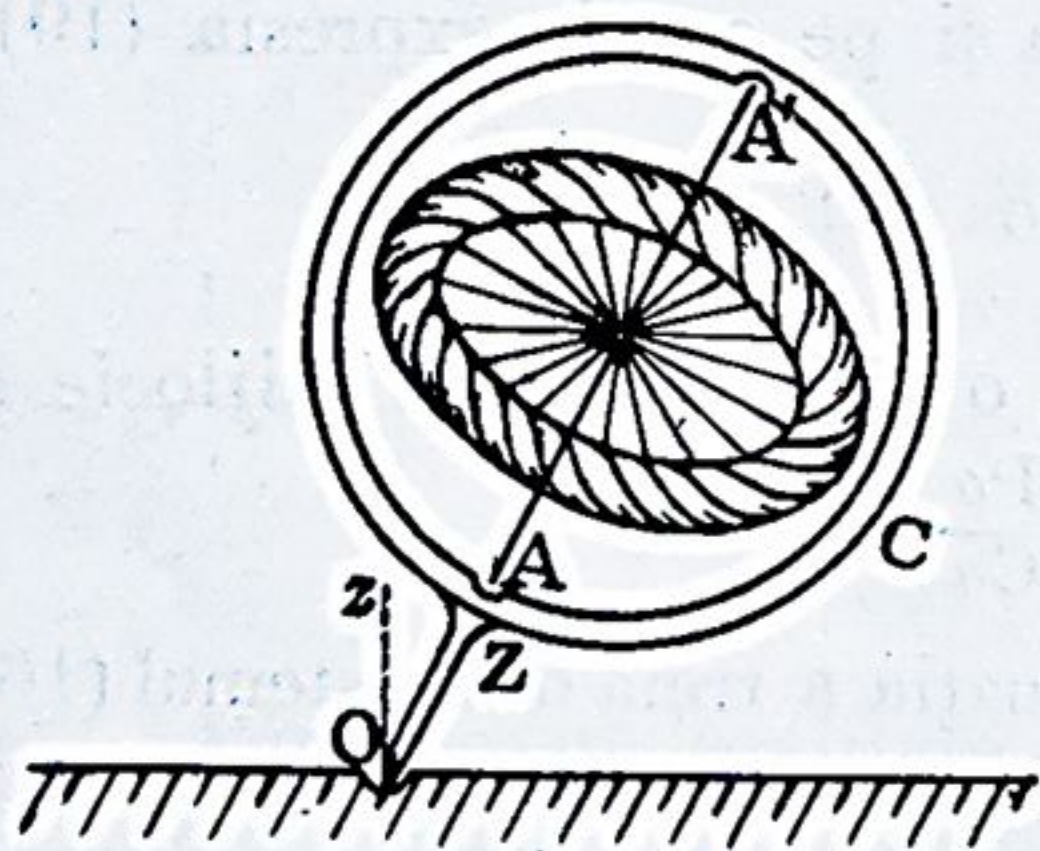


Fig. 197

prealabilă a torului, în scobitura unui suport. Axul AA' va părea atunci că descrie un con de revoluție în jurul verticalei, cu o viteză unghiulară cu atât mai mică cu cât rotația dată torului a fost mai mare. În realitate, unghiul axului AA' cu verticala, adică unghiul nutațiunii, nu este constant, însă variațiile sale fiind foarte mici nu pot fi prinse cu ochiul. De asemenea, viteza de precesiune a axului în jurul verticalei nu este constantă, însă, perioada variației sale fiind



foarte scurtă, ochiul nu poate prinde decât valoarea sa mijlocie  $\frac{Pa}{Cn}$  <sup>1)</sup>).

Rotația în jurul verticalei are de altfel același sens ca rotația sfârlezei în jurul axulei ei.

**Balanța giroscopică** se compune din două sfere metalice inegale S și S', montate pe aceeași vergea ZOZ', mobilă în jurul punctului O. Se dă sistemului o rotațiune rapidă în jurul axului OZ.

Sfera S' poate culisa în lungul vergelei. Se poate astfel modifica poziția centrului de greutate G a sistemului, așa fel ca distanța  $a$  din formulele de mai sus să poată trece dela pozitiv la negativ și să se realizeze în consecință o viteză de precesiune pozitivă sau negativă, potrivit formulei (21).

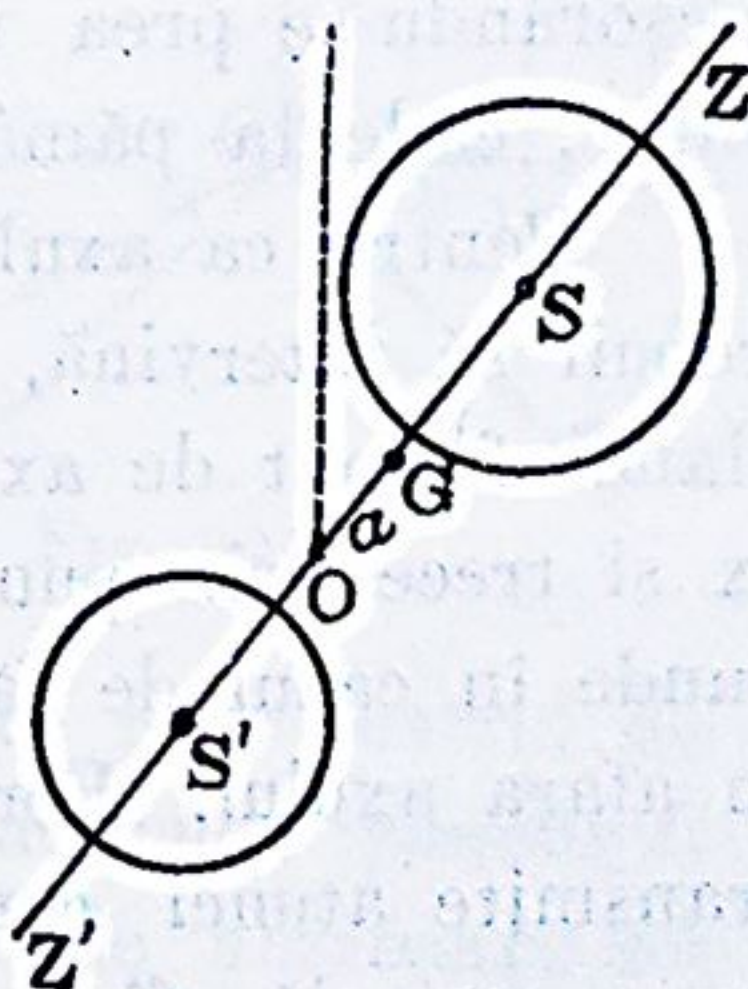


Fig. 199

<sup>1)</sup> Cum pe de o parte această valoare este foarte mică, iar pe de altă parte, dacă neglijăm oscilațiile insensibile ale axului de figură, avem  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , rezultă potrivit formulelor (7) adică:

$$p' = \frac{d\theta}{dt}, \quad q' = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}$$

că  $p'$  este nul iar  $q'$  neglijabil. Componentele  $Ap'$ ,  $Aq'$ ,  $Cr$  ale momentului cinetic se reduc deci sensibil la  $Cr$ . Cu alte cuvinte, *momentul cinetic OK în raport de O coincide sensibil cu axul de figură OZ al solidului.*

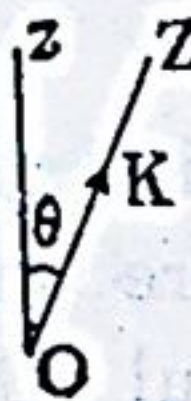


Fig. 198

Astfel fiind, aplicația teoremei momentului cinetic în raport de O, determină viteza punctului K și deci pe aceea a axului de figură Oz. Aceasta constituie ceea ce se numește *principiul efectului giroscopic*. Viteza punctului K fiind  $Cr \sin \theta \cdot \frac{d\psi}{dt}$  iar momentul greutății P în raport de O fiind  $Pa \sin \theta$ , avem, prin aplicațiunea directă a acestui principiu,  $Cr \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = Pa \sin \theta$  de unde  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cn}$  pentru  $r = n$ .

A se revedea și Nota din josul paginei 343. Condiția  $p^2 + q^2 = 0$  de acolo, este aici realizată, căci avem  $p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2$  și  $p'$  este nul iar  $q'$  neglijabil.



**Notă.** Dacă în loc de sfârleaza giroscopică considerăm o sfârlează ordinară, având extremitatea piciorului ei rotunjită și angajată într'o scobitură, constatăm, că axul sfârlezei în loc de a descrie o mișcare conică în jurul verticalei punctului de contact, se aproprie cu repeziciune de verticală și rămâne tot timpul în această poziție, până când viteza de rotație a sfârlezei micșorându-se prea mult, sfârleaza, după câteva oscilații neregulate, cade la pământ.

Pentru ca axul sfârlezei să se aproprie de verticală, a trebuit să intervină, după cum știm, o forță perpendiculară pe planul format de axul sfârlezei și verticala care întâlnește acest ax și trece prin punctul de contact. Acest punct nu mai corespunde în cazul de față cu extremitatea axului sfârlezei, ci este în afara axului. Forța de frecare ce ia naștere la contact, se transmite atunci centrului de greutate al sfârlezei și ea este aceea care dă sfârlezei mișcarea despre care vorbim.

### GIROSCOPUL LUI FOUCAULT.

Acest giroscop e format dintr'un tor de bronz, al căruia ax  $AA'$  este montat pe o suspensiune „à la Cardan”, ceea ce permite deplasări absolut libere în jurul centrului de greutate care rămâne fix. Un mecanism cu roate dințate permite de a se da torului o rotațiune foarte rapidă în jurul axului său de figură.

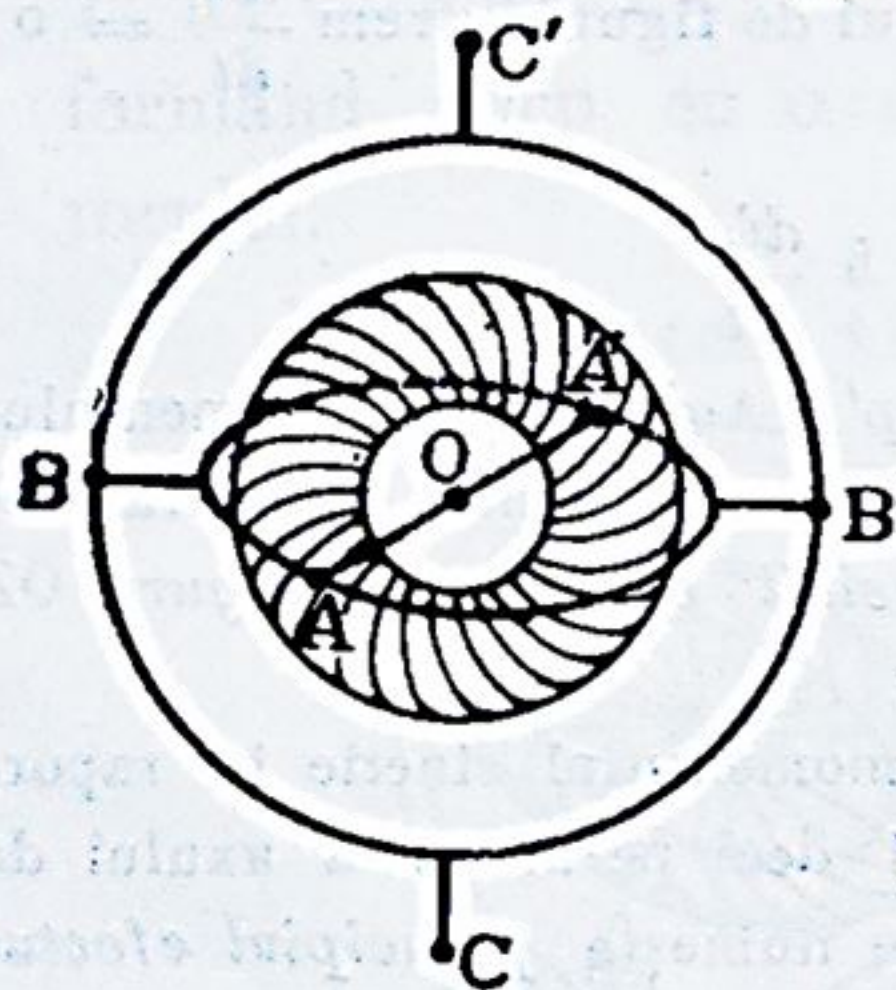


Fig. 200

Fie  $O$  centrul de greutate și  $Oxyz$  un sistem de axe dreptunghiulare invariabil legate pământului, axul  $Oz$  fiind paralel liniei polurilor și îndreptat spre Nord, axul  $Ox$  în planul meridian și îndreptat tot spre Nord, iar axul  $Oy$  perpendicular pe celelalte două și îndreptat spre Est, presupunând că ne aflăm în emisfera boreală.

Fie de asemenea  $OA$ ,  $OB$ ,  $OZ$  cele trei axe pe care le am utilizat la studiul mișcării solidelor de revoluție omogene



în jurul unui punct fix, axul OZ coincizând de altfel cu axul torului.

Știm că putem trata mișcarea unui corp la suprafața pământului ca o mișcare absolută, dacă alăturăm forțelor realmente aplicate, forța de inerție de antrenare și forța centrifugă compusă a fiecăruia din punctele sale. Ori, în cazul giroscopului lui Foucault, forțele realmente aplicate sunt atracțiunea terestră și acțiunea punctului fix<sup>1)</sup>. Atracțiunea terestră, compusă cu forța de inerție de antrenare dă greutatea, și rezultanta tuturor greutateilor trece prin centrul de greutate, adică prin punctul fix. Așa dar, acțiunea punctului fix, atracțiunea terestră și forțele de inerție de antrenare nu intervin în ecuațiile mișcării, momentul lor resultant fiind nul în raport de punctul fix. Rămân deci numai forțele centrifuge compuse.

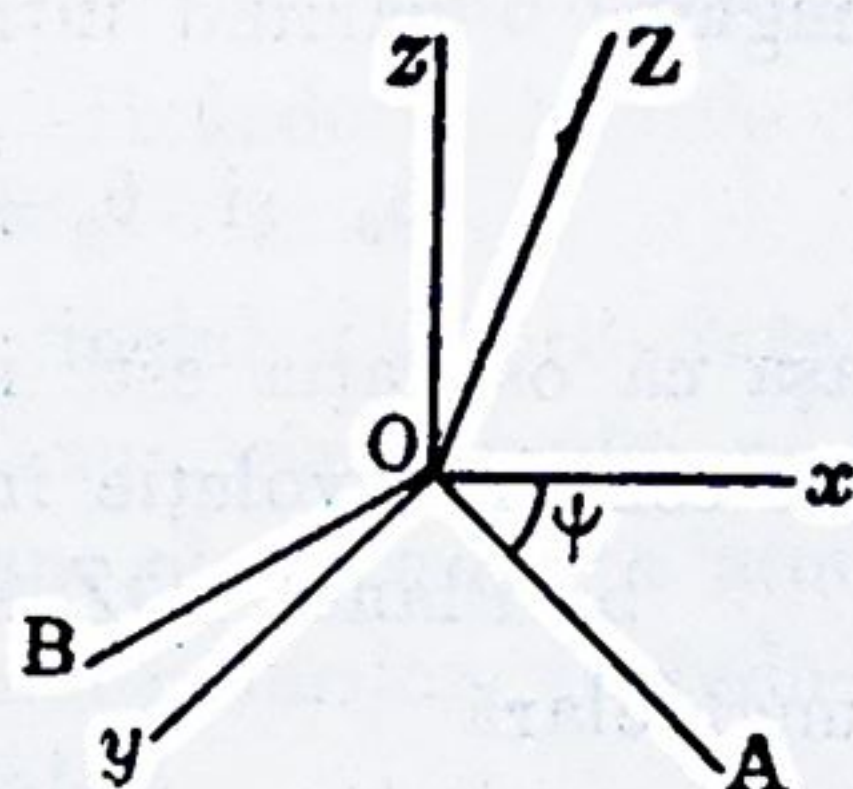


Fig. 201

Acestea intervin în ecuații prin momentele lor rezultante în raport de axe OA, OB, OZ. Fie L', M', N aceste momente. Se stabilește, că dacă presupunem rotația proprie  $\frac{d\varphi}{dt}$  a giroscopului ca fiind foarte mare, valorile componentelor L', M', N se reduc aproximativ la

$$L' = C \omega \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}, \quad M' = 0, \quad N = 0$$

$\omega$  fiind viteza unghiulară de rotație a pământului.

Dacă comparăm aceste formule cu formulele (12) adică

$$L' = Pa \sin \theta, \quad M' = 0, \quad N = 0$$

conchidem că tot ce s'a spus referitor la mișcarea unui solid de revoluție omogen și greu în jurul unui punct al axului său de figură, se aplică și giroscopului lui Foucault, înlocuindu-se în

<sup>1)</sup> Această acțiune este de fapt exercitată de către legăturile giroscopului; cum punctul O rămâne fix, acțiunea legăturilor echivalează însă pe aceea a punctului O considerat ca realmente fixat.



rezultatele dobândite productul  $Pa$  prin  $C\omega \frac{d\varphi}{dt}$  sau  $Cn\omega$ . Astfel:

a) Axul  $OZ$  al giroscopului oscilează în planul mobil  $zOZ$ , unghiul  $\theta$  variind între limitele foarte apropiate

$$\theta_0 \text{ și } \theta_0 + \alpha, \quad \text{unde } \alpha = \frac{2 A \omega \sin \theta_0}{C n}$$

asa că oscilația este imperceptibilă și axul  $OZ$  pare a descrie un con de revoluție în jurul axului boreal:

b) Planul  $zOZ$  se învâртеște în jurul lui  $Oz$  cu o viteză unghiulară

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega (1 - \cos m t) \quad \text{unde } m = \frac{C n}{A}.$$

Valoarea mijlocie a vitezei de precesiune este deci egală cu  $\omega$ , adică cu viteza unghiulară de rotație a pământului. Cum, pe de altă parte,  $\frac{d\psi}{dt}$  este totdeauna pozitiv, mișcarea de precesiune a axului giroscopului are loc dela stânga la dreapta, adică în sensul contrariu al mișcării pământului.

În rezumat, *axul giroscopului descrie sensibil un con de revoluție, cu o mișcare uniformă, în jurul liniei boreale, și viteza unghiulară mijlocie a acestei mișcări este egală și de sens contrariu vitezei unghiulare de rotație a pământului*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Putem ajunge mult mai repede la acest rezultat prin aplicația principiului efectului giroscopic, luând ca axe duse prin centrul giroscopului un sistem de axe de direcții absolut fixe în spațiu. Deplasarea acestui sistem de axe fiind o translație, mișcarea relativă a giroscopului va depinde de efectul atracției terestre și de acela al forțelor de inerție de antrenare. Ambele aceste forțe sunt aplicate în centrul de greutate al giroscopului, adică în punctul  $O$ .

Ori, în virtutea principiului efectului giroscopic, momentul cinetic  $OK$  coincide sensibil cu direcția  $OZ$  a axului giroscopului.

Cum momentele celor două forțe considerate sunt amândouă nule, viteza punctului  $K$  este nulă și prin urmare axul de figură  $OZ$  păstrează același direcție absolută în spațiu, adică rămâne îndreptat spre același stea fixă. Rezultă atunci imediat, că pentru un observator terestru, axul giroscopului, întocmai ca și steaua către care rămâne îndreptat, va părea că se învâртеște în jurul liniei boreale, în sensul invers al mișcării pământului și cu o viteză unghiulară egală ca mărime cu aceea a rotației terestre.



Fig. 202



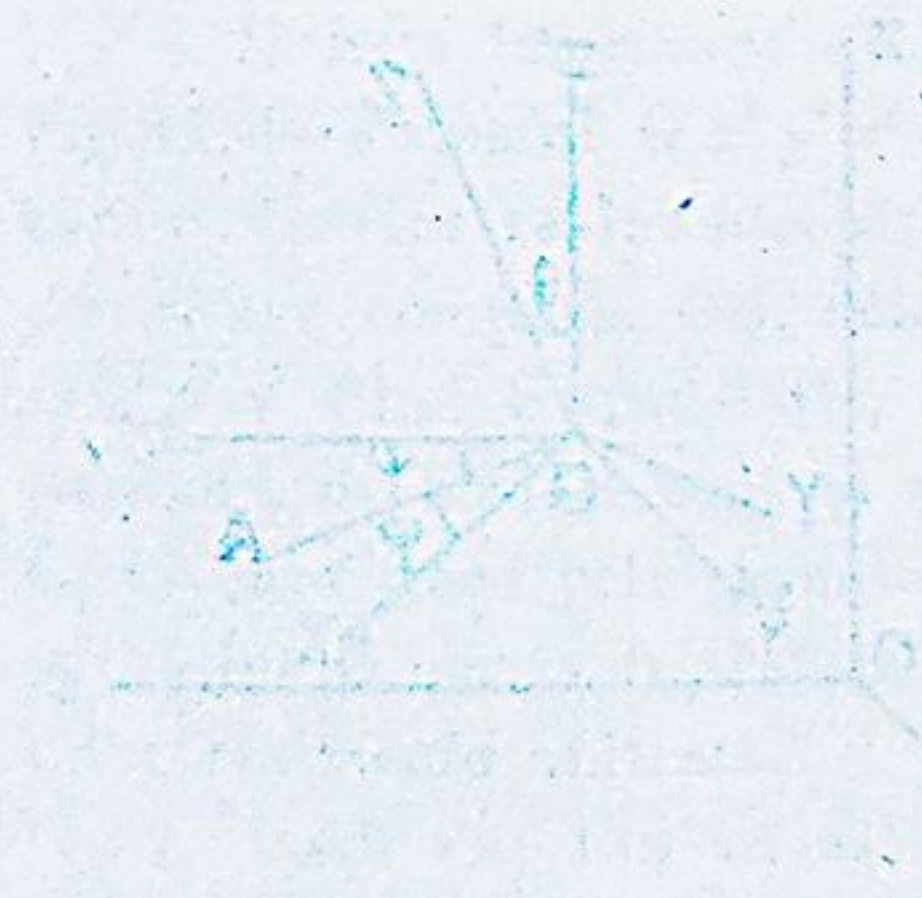
Dacă se fixează inelul de suspensiune  $BAB'A'$  într'un plan orizontal, axul  $CC'$  fiind vertical, axul giroscopului nu se va putea deplasa decât orizontal; el va oscila de o parte și de alta a meridianei adevărate, așa după cum acul unui declinator oscilează în jurul meridianei magnetice, fixându-se în cele din urmă pe meridiană.

Dacă din potrivă se imobilizează inelul  $CBC'B'$  într'un plan perpendicular planului meridian, axul giroscopului nu se va putea deplasa decât în planul meridian; el va executa atunci o serie de oscilații în jurul paralelei liniei polurilor, fixându-se în cele din urmă pe direcția acestei paralele.

Din cele de mai sus se vede că giroscopul lui Foucault poate servi pentru a demonstra mișcarea de rotație a pământului și a determina într'un loc meridianul adevărat și latitudinea locului. Aceste din urmă determinări nu au însă, după cum se înțelege, decât un interes teoretic.

*Notă.* Mișcările sfârlezei și balanței giroscopice despre care s'a vorbit mai înainte, sunt tot mișcări relative, însă în ele efectul forței centrifuge compuse are o slabă influență pe lângă acela al greutății, care nu se găsește aplicată în punctul fix ca în cazul giroscopului lui Foucault.

Experiența însăși dovedește acest fapt.





## V. MIȘCAREA UNUI SOLID LIBER.

Să considerăm un corp solid, liber în spațiu și solicitat de anumite forțe. Pentru a-i cunoaște mișcarea, va fi suficient să determinăm mișcarea în spațiu a centrului său de greutate, apoi mișcarea solidului în jurul acestui punct.

Fie  $Oxyz$  un sistem de axe fixe și  $G$  centrul de greutate al solidului, de coordonate  $a, b, c$ .

Ecuatiile mișcării lui  $G$  sunt, după cum se știe,

$$(1) \quad M \frac{d^2 a}{dt^2} = \Sigma X, \quad M \frac{d^2 b}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M \frac{d^2 c}{dt^2} = \Sigma Z$$

în care  $M$  reprezintă masa solidului.

Prin punctul  $G$  să ducem axele  $Gx', Gy', Gz'$  paralele cu  $Ox, Oy, Oz$ . Știm (pag. 238) că teorema momentelor cantităților de mișcare se aplică față de sistemul  $Gx'y'z'$  ca și cum acest sistem de axe ar fi fix în spațiu, adică fără a fi nevoie de a alătura vre-o forță aparentă, forțelor reale care lucrează asupra solidului. Ori, *ecuațiile care determină mișcarea unui solid în jurul unui punct fix, rezultă numai din aplicarea teoremei momentelor cantităților de mișcare.*

Vom scrie deci acele ecuații ca și cum sistemul  $Gx'y'z'$  ar fi fix în spațiu și vom avea, prin aceasta, cele trei ecuații ale

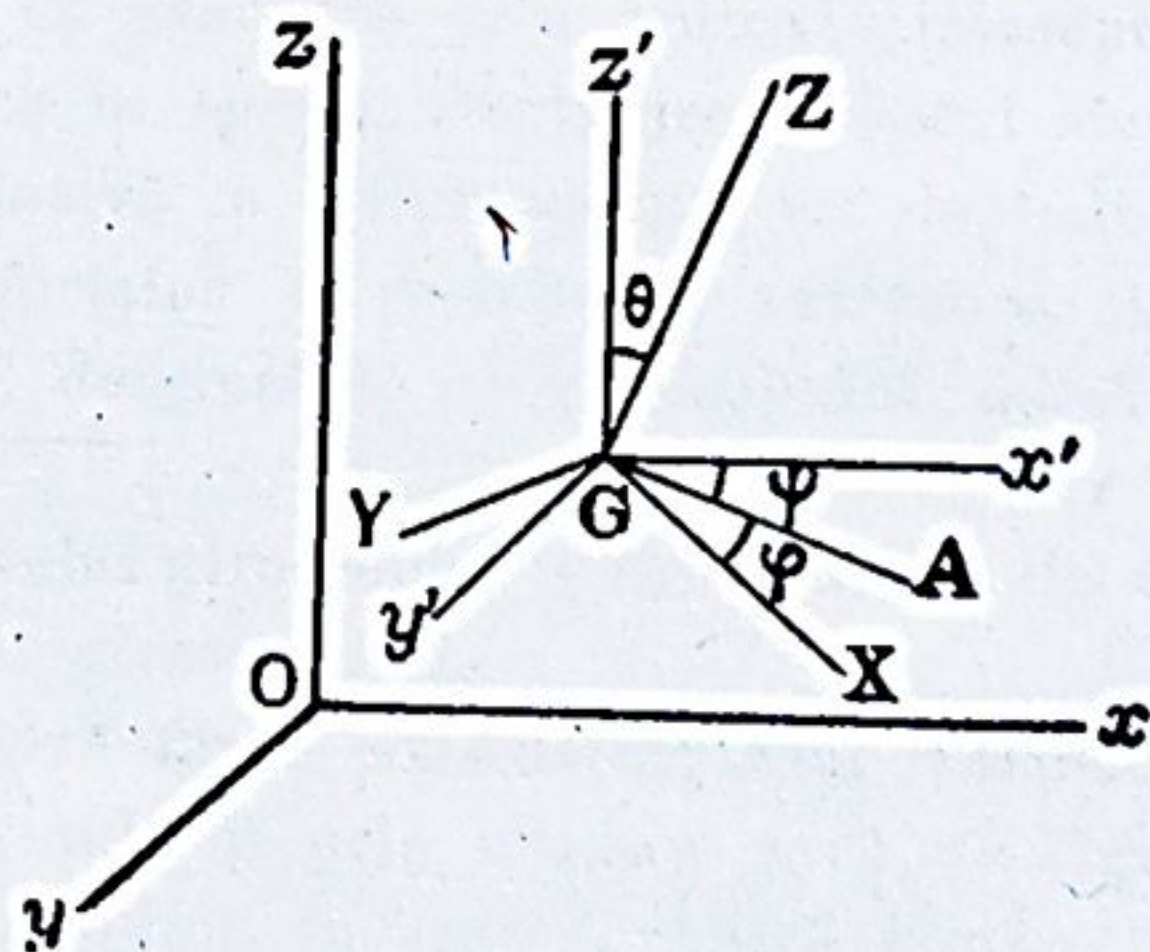


Fig. 203



mişcării relative a solidului în jurul centrului său de greutate<sup>1)</sup>.

Dacă luăm ca axe invariabil legate solidului cele trei axe principale de inerție pentru punctul  $G$ , poziția solidului va putea fi definită prin cele trei unghiuri ale lui Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  și aplicațiunea teoremei momentelor cantităților de mișcare va conduce, după cum se știe, la ecuațiile lui Euler:

$$(2) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = M \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N. \end{cases}$$

Ecuațiile (1) și (2) considerate simultan ne dau pe  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  în funcție de  $t$ . Se vor determina apoi unghiurile  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  prin relațiile cunoscute în funcție de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

**Exemplu. Mișcarea unui solid în vid sub simpla acțiune a greutății.** Mișcarea inițială a solidului se va caracteriza prin poziția și viteza centrului său de greutate și prin rotația instantanee în jurul unui anumit ax trecând prin centrul de greutate.

Ecuațiile (1) se vor putea integra separat, ele ne depin-

<sup>1)</sup> Este interesant de a mai raționa și astfel: Mișcarea solidului în raport de sistemul  $Gx'y'z'$  poate fi tratată ca o mișcare absolută, dacă alăturăm forțelor realmente aplicate forțele de inerție de antrenare și forțele centrifuge compuse. Ori, cele din urmă sunt nule, mișcarea sistemului de axe  $Gx'y'z'$  fiind o translație, iar forțele de inerție de antrenare, fiind toate paralele, de același sens și proporționale cu masele punctelor, dau o rezultantă care trece prin punctul  $G$ . Așa dar, mișcarea relativă a solidului în jurul lui  $G$  poate fi tratată ca o mișcare absolută, sub simplul efect al forțelor realmente aplicate.

Dacă s'ar lua un alt punct în loc de  $G$  — oăci mișcarea solidului în spațiu rezultă dintr'o translație identică cu mișcarea unuia oarecare din punctele sale și dintr'o rotație în jurul acestui punct — atunci rezultanta forțelor de inerție de antrenare n'ar trece prin acel punct și ar trebui să se țină seama de ea. De aci, interesul alegerii lui  $G$ , pe lângă acela pe care îl prezintă utilizarea ecuațiilor (1).



zând decât de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și corespunzând ecuațiilor care ne dau mișcarea în vid a unui punct de masă  $M$  supus acțiunii greutății. Traectoria centrului de greutate va fi deci o parabolă. Apoi, în ecuațiile (2) va trebui să facem pe  $L$ ,  $M$ ,  $N$  egali cu zero, căci singura forță care lucrează asupra solidului este greutatea sa, aplicată în  $G$ . Vom fi deci în cazul mișcării unui solid supus la forțe care admit o rezultantă trecând prin punctul fix, problemă care a fost studiată.



## VI. EFECTUL PERCUȚIILOR ASUPRA UNUI SOLID IN MIȘCARE.

### I. TEORIA PERCUȚIILOR.

1. Fie  $M$  un punct material liber, de masă  $m$ , mișcându-se în linie dreaptă sub acțiunea unei forțe  $F$ . Creșterea pe care o dă forța vitezei și deci cantității de mișcare a punctului într'un interval de timp  $dt$ , este infinit de mică potrivit egalității

$$m dv = F dt \quad \text{sau} \quad d. mv = F dt.$$

Să considerăm un interval de timp  $\theta$ , care fără a fi infinit de mic să fie totuși foarte mic, egal spre exemplu cu a suta parte dintr'o secundă. Fie  $v$  viteza punctului în momentul  $t$ , pe care să-l luăm ca moment inițial, și  $u$  noua valoare a vitezei după timpul  $\theta$ . Avem

$$\Delta. mv = mu - mv = \int_0^\theta F dt.$$

Membrul al doilea este o cantitate foarte mică, căci, însemnând prin  $F'$  valoarea mijlocie a lui  $F$  în intervalul de timp dela  $0$  la  $\theta$ , avem destul de aproximativ

$$\int_0^\theta F dt = F' \cdot \theta.$$

Să presupunem însă că forța  $F$  conservă o valoare foarte mare în tot intervalul de timp considerat. Atunci valoarea sa mijlocie  $F'$  va fi tot foarte mare și produsul  $F'\theta$  va dobândi o valoare finită, în raport bine înțeles cu mărimea lui  $F$ . În asemenea caz, variația cantității de mișcare a punctului va fi



deci finită și se va zice că, în intervalul de timp  $\theta$ , *punctul a primit o percuție P definită prin egalitatea*

$$P = \int_0^\theta F dt.$$

Vom admite totdeauna că, în intervalul de timp considerat, *deplasarea punctului este neglijabilă.*

Iată un exemplu din care se poate vedea că asemenea ipoteză este admisibilă. Fie forța, de direcție constantă,

$$F = A \frac{t}{\theta}$$

care crește uniform dela 0 la A când  $t$  crește dela 0 la  $\theta$ ; să presupunem că ea lucrează asupra punctului M plecând din repaus. Cantitatea de mișcare dobândită de punct după timpul  $\theta$ , va fi

$$mu = \int_0^\theta F dt = \frac{1}{2} A \theta.$$

Dacă A este destul de mare, se înțelege că productul  $A\theta$  poate dobândi ori ce valoare finită.

Spațiul  $s$  parcurs în același timp, rezultă din relația

$$m s = \int_0^\theta mu dt$$

care ne dă, înlocuind pe  $mu$  prin  $\frac{1}{2} A \theta$ ,

$$m s = \frac{1}{2} A \theta^2$$

și el este prin urmare foarte mic<sup>1)</sup>.

2. Dacă în intervalul de timp  $\theta$ , forța  $F$  este variabilă și ca intensitate și ca direcție, vom avea, proiectând pe trei axe cordonate,

---

<sup>1)</sup> Astfel izbind o bilă de billard cu tacul, putem considera bila ca și imobilă pe timpul  $\theta$  cât durează izbirea. După acest scurt interval de timp, centrul de greutate al bilei va dobândi o viteză finită, bila rostogolindu-se pe postavul billardului așa după cum se va arăta la capitolul următor al *Mișcării solidelor naturale*.



$$(1) \begin{cases} \Delta \cdot m \frac{dx}{dt} = m u_x - m v_x = \int_0^\theta X dt \\ \Delta \cdot m \frac{dy}{dt} = m u_y - m v_y = \int_0^\theta Y dt \\ \Delta \cdot m \frac{dz}{dt} = m u_z - m v_z = \int_0^\theta Z dt \end{cases}$$

$X, Y, Z$  fiind componentele forței  $F$ ,  $mv$  cantitatea de mișcare a punctului în momentul inițial și  $mu$  cantitatea sa de mișcare după timpul  $\theta$ . Formulele (1) exprimă că cele trei integrale

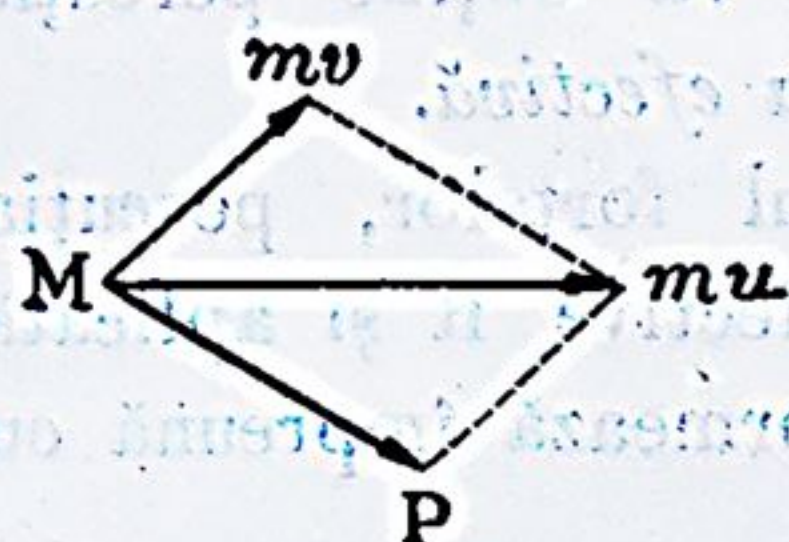


Fig. 204

corespund unui vector  $P$ , egal cu diferența geometrică a vectorilor  $mu$  și  $mv$ . Percuțiile pot fi deci reprezentate prin vectoare, ca și forțele, putându-li-se aplica în consecință toate regulile de compunere ale acestora.

**3. Problema percuțiilor pentru un punct material.** Fie un punct material liber asupra căruia lucrează diferite forțe ordinare. Intr'un anumit moment al mișcării, când punctul ocupă o poziție  $M$  și este animat de o viteză  $v$ , intervine o forță foarte mare  $F$  care lucrează asupra punctului numai un timp  $\theta$  foarte scurt. Presupunând că în timpul  $\theta$  punctul nu schimbă sensibil de poziție, se cere noua viteză  $u$  cu care punctul își va continua mișcarea cu începere din  $M$ , sub acțiunea forțelor ordinare ce-i rămân aplicate.

Problema se rezolvă în felul următor:

1° Se neglijează, în intervalul de timp  $\theta$  cât durează percuția, acțiunea forțelor ordinare față de aceea a forței  $F$ ;

2° Se calculează cele trei integrale din formulele (1) care determină pe  $P$ ;

3° Se compune însfârșit vectorul  $P$  cu vectorul  $mv$ , obți-



nându-se prin aceasta cantitatea de mișcare  $mu$  și prin urmare valoarea  $u$  a vitezei căutate.

**Punct supus la legături.** Dacă punctul este obligat, spre exemplu, de a rămâne pe o suprafață, atunci percuția dată  $P$  ocazionează din partea suprafeței o acțiune normală tot de per-

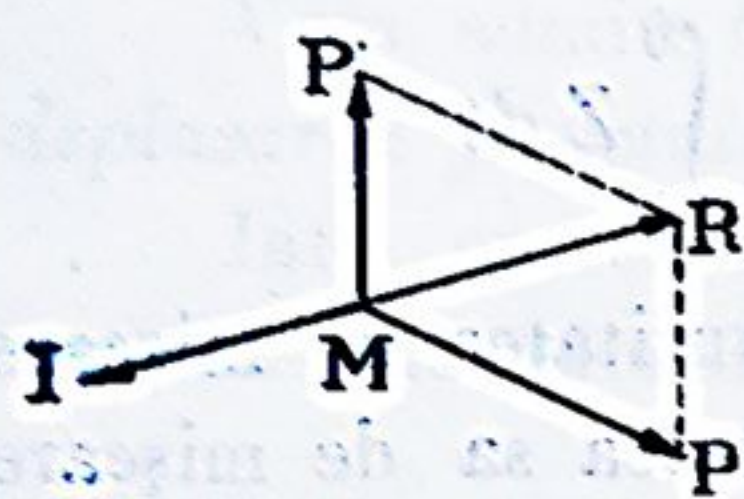


Fig. 205

cuție  $P'$  și așa fel că rezultanta  $R$  a celor două percuții  $P$  și  $P'$  este tangențial suprafeței. Odată calculat  $P$ , se va proiecta prin urmare acest vector pe planul tangent suprafeței în  $M$  și se va obține percuția  $R$  care va fi *percuția efectivă*.

Ca și în cazul forțelor, percuția fictivă  $I$ , egală și direct opusă percuției efective  $R$  și aplicată în  $M$ , este zisă *percuție de inerție*; ea formează împreună cu  $P$  și  $P'$  un sistem de percuții în echilibru.

Componentele percuției de inerție sunt:

$$-\Delta \cdot m \frac{dx}{dt}, \quad -\Delta \cdot m \frac{dy}{dt}, \quad -\Delta \cdot m \frac{dz}{dt}.$$

**4. Percuții aplicate unui sistem de puncte materiale.** Să presupunem că punctele unui sistem material, sau numai o parte din ele, sunt supuse la percuții de durate care pot fi diferite însă toate foarte mici.

**Teorema I.** *Dacă se consideră centrul de greutate ca un punct având ca masă masa totală a sistemului, creșterea geometrică a cantității sale de mișcare este egală cu aceea pe care ar dobândi-o acest punct dacă toate percuțiile i-ar fi aplicate în mod echipolent.*

Din egalitățile (1) deducem, în adevăr,

$$\sum \Delta \cdot m \frac{dx}{dt} = \sum \int_0^{\theta} X dt$$

sau

$$\Delta \cdot \sum m \frac{dx}{dt} = \sum P_x$$

și alte două ecuații analoage. Dar, însemnând prin  $a$ ,  $b$ ,  $c$  cor-



donatele centrului de greutate și prin  $M$  masa sistemului, avem

$$Ma = \Sigma mx, \quad Mb = \Sigma my, \quad Mc = \Sigma mz$$

deci

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{da}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{db}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dc}{dt}$$

și, în consecință,

$$\Delta. M \frac{da}{dt} = \Sigma P_x$$

$$(2) \quad \Delta. M \frac{db}{dt} = \Sigma P_y$$

$$\Delta. M \frac{dc}{dt} = \Sigma P_z$$

Cele 3 componente ale creșterii de viteză ce dobândește centrul de greutate prin efectul percuțiilor, vor avea deci ca valori

$$\frac{\Sigma P_x}{M}, \quad \frac{\Sigma P_y}{M}, \quad \frac{\Sigma P_z}{M}.$$

**Teorema II.** *Creșterea geometrică a momentului rezultat al cantităților de mișcare în raport de un ax, este egală cu momentul rezultat al percuțiilor în raport de același ax.*

Tot din egalitățile (1) deducem, în adevăr,

$$\Sigma \left( y \Delta. m \frac{dx}{dt} - z \Delta. m \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma \left( y \int_0^\theta Z dt - z \int_0^\theta Y dt \right)$$

sau, pentru că creșterile coordonatelor  $y, z$  sunt neglijabile, adică socotind pe  $y$  și  $z$  ca pe niște constante în intervalul de timp dela 0 la  $\theta$ , însă bine înțeles nu și pe derivatele lor,

$$\Delta. \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma (y P_z - z P_y).$$

Dacă axul considerat a fost luat ca ax  $Ox$  al unui sistem de axe dreptunghiulare, egalitatea precedentă corespunde tocmăi enunțului teoremei în chestiune.



În raport de trei axe cordonate, avem în același timp,

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \sum \left( y P_z - z P_y \right) \\ (3) \quad \Delta \cdot \sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \sum \left( z P_x - x P_z \right) \\ \Delta \cdot \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \sum \left( x P_y - y P_x \right) \end{aligned}$$

și aceste ecuații exprimă că *creșterea geometrică a momentului rezultat al cantităților de mișcare în raport de origina sistemului* (care poate fi un punct arbitrar) *este egală cu momentul rezultat al percuțiilor în raport de acel punct.*

5. *Notă.* Din cele de mai sus se vede că teoremele I și II se deduc din teoremele generale ale Dinamicii ce le corespund, înlocuind în acestea din urmă notațiunea  $\frac{d}{dt}$  prin  $\Delta$  iar forțele prin percuții.

Făcând aceiași înlocuire în ecuația generală a Dinamicii, se obține

$$(4) \quad \sum \left[ \left( P_x - \Delta \cdot m \frac{dx}{dt} \right) \delta x + \left( P_y - \Delta \cdot m \frac{dy}{dt} \right) \delta y + \left( P_z - \Delta \cdot m \frac{dz}{dt} \right) \delta z \right] = 0.$$

Această ecuație poate fi de altfel obținută în mod direct, în felul următor:

Ecuația generală a Dinamicii

$$\sum \left[ \left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

în care  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  reprezintă numai forțe de percuții (cele ordinare fiind neglijabile) având loc în tot intervalul de timp dela 0 la  $\theta$ , poate fi înmulțită cu  $dt$  și integrată dela 0 la  $\theta$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Tot așa după cum, spre exemplu, ecuația  $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$  se înmulțește cu  $dt$  și se integrează, obținându-se

$$\Delta \cdot m \frac{dx}{dt} = \int_0^\theta X dt.$$



Cum, în intervalul de timp considerat, cordonatele  $x, y, z, \dots$  se presupune că rămân constante, variațiile  $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$  care rezultă din ecuațiile de legătură de forma  $f(x, y, z, \dots, t) = 0$  vor trebui privite și ele tot ca constante. În consecință, rezultatul integrațiunei va fi

$$\Sigma \left[ \left( \int_0^t X dt - \Delta \cdot m \frac{dx}{dt} \right) \delta x + \left( \int_0^t Y dt - \Delta \cdot m \frac{dy}{dt} \right) \delta y + \left( \int_0^t Z dt - \Delta \cdot m \frac{dz}{dt} \right) \delta z \right] = 0$$

adică tocmai ecuația (4).

## II. EFECTUL PERCUȚILOR ASUPRA UNUI SOLID CARE SE ÎNVÂRTEȘTE ÎN JURUL UNUI AX FIX.

Percuțiile aplicate unui solid care se învârtește în jurul unui ax fix, au ca efect de a da solidului o creștere bruscă de viteză unghiulară,  $\Delta \omega$ , precum și de a determina asupra axului de rotație două percuții aplicate în cele două puncte fixe ale acestui ax<sup>1)</sup>.

1. **Calculul lui  $\Delta \omega$ .** Fie  $I$  momentul de inerție al solidului în raport de axul de rotație și  $N$  momentul resultant al percuțiilor aplicate solidului în raport de același ax. Știm că momentul resultant al cantităților de mișcare în raport de axul de rotație este egal cu  $I \omega$ .

Aplicațiunea teoremei II ne dă imediat

$$\Delta \cdot I \omega = N \text{ sau } I \cdot \Delta \omega = N$$

de unde

$$(1) \quad \Delta \omega = \frac{N}{I}$$

Așa dar: Creșterea vitezei unghiulare de rotație se obține, divizând momentul resultant al percuțiilor, în raport de axul de rotație, prin momentul de inerție al solidului în raport de același ax.

<sup>1)</sup> Fie care din punctele solidului dobândind o creștere a cantității sale de mișcare egală cu  $m r \cdot \Delta \omega$ ,  $r$  fiind depărtarea punctului de ax, trebuie considerat ca supus unei percuții echivalente.



**2. Calculul percuțiilor determinate asupra axului de rotație.**  
Vom presupune că solidul este supus unei singure percuții  $P$ .

Fie  $O_1$  și  $O_2$  cele două puncte fixe ale axului de rotație, pe care să-l luăm ca ax  $Oz$  al unui sistem dreptunghiular  $Oxyz$ . Pentru simplitatea formulelor, vom alege axul  $Ox$  astfel ca în momentul considerat planul  $xOz$  să treacă prin centrul de greutate  $G$  al solidului, origina  $O$  a lui  $Ox$  fiind pe de altă parte aleasă așa fel ca acest ax să treacă prin punctul  $A$  unde percuția dată  $P$  întâlnește planul  $xOz$ .

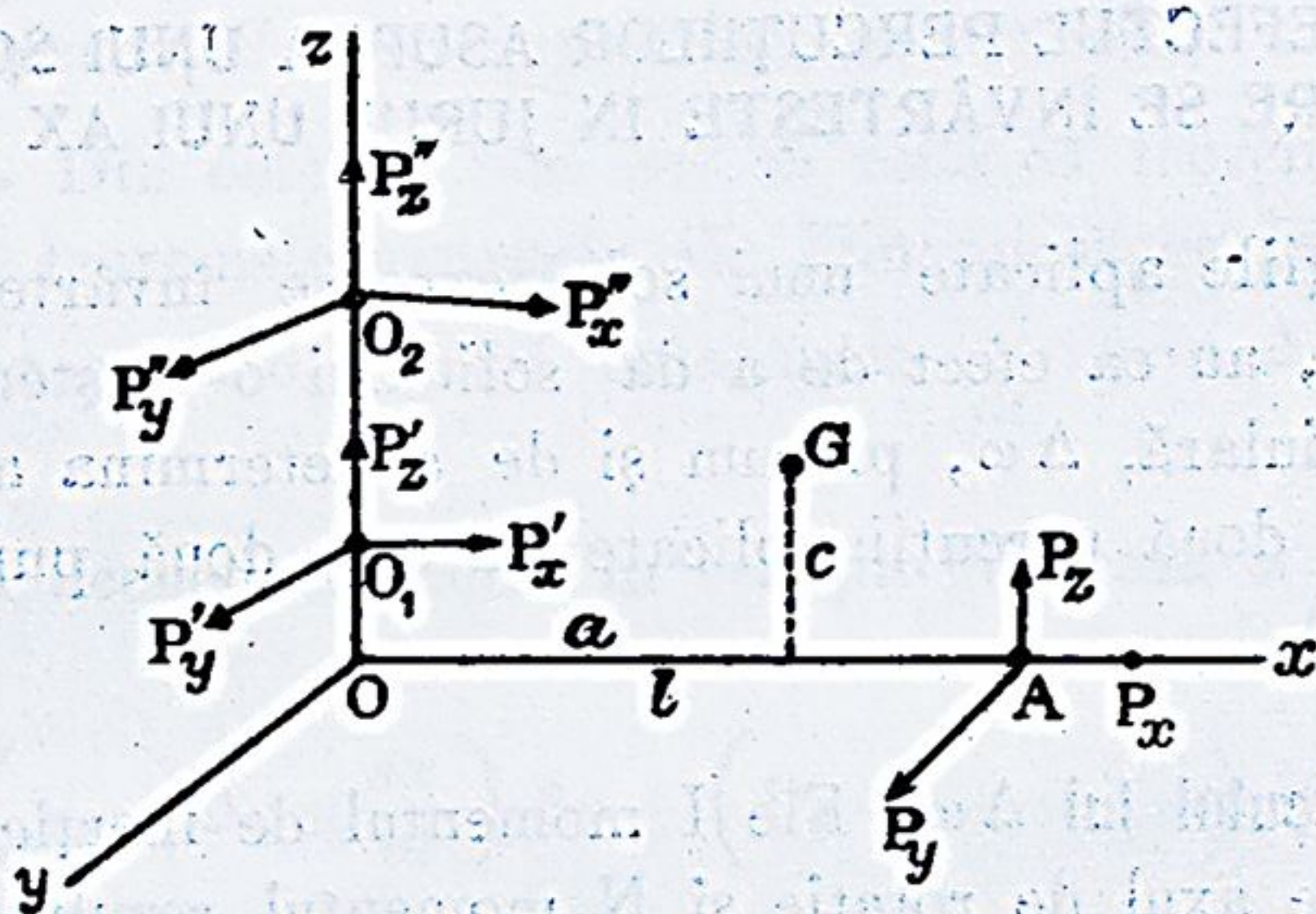


Fig. 206

Fie  $P'$  și  $P''$  percuțiile de legătură, adică acțiunile de percuție ale celor două puncte fixe  $O_1$  și  $O_2$  asupra solidului. Percuțiile căutate sunt egale și direct opuse percuțiilor  $P'$  și  $P''$ . Să le calculăm pe acestea din urmă.

Potrivit principiului lui d'Alembert, există echilibru între percuția dată  $P$ , percuțiile de legătură  $P'$ ,  $P''$  și percuțiile de inerție. Dacă prin urmare însemnăm prin  $P_x, P_y, P_z$ ;  $P'_x, P'_y, P'_z$ ;  $P''_x, P''_y, P''_z$  componentele percuțiilor  $P, P', P''$ ; prin  $Q_x, Q_y, Q_z$  componentele vectorului rezultat al percuțiilor de inerție și prin  $L, M, N$  componentele momentului rezultat în raport de  $O$  al acestor percuții; prin  $l$  distanța  $OA$  și prin  $h_1, h_2$  distanțele  $OO_1, OO_2$ ; avem următoarele 6 ecuații de echilibru:



$$(2) \begin{cases} P_x + P'_x + P''_x + Q_x = 0 \\ P_y + P'_y + P''_y + Q_y = 0 \\ P_z + P'_z + P''_z + Q_z = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -h_1 P'_y - h_2 P''_y + L = 0 \\ -l P_z + h_1 P'_x + h_2 P''_x + M = 0 \\ l P_y + N = 0 \end{cases}$$

a). Componentele  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ . Aceste componente au ca expresiuni:

$$Q_x = -\Delta \cdot \sum m \frac{dx}{dt}, \quad Q_y = -\Delta \cdot \sum m \frac{dy}{dt}, \quad Q_z = -\Delta \cdot \sum m \frac{dz}{dt}.$$

Ori, însemnând prin  $\omega$  viteza unghiulară de rotație, avem

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

deci

$$Q_x = \Delta \omega \sum m y, \quad Q_y = -\Delta \omega \sum m x, \quad Q_z = 0.$$

Cum însă, prin ipoteză, centrul de greutate al solidului este coprins în planul  $xOz$ , avem însemnând prin  $a$  abscisa acestui punct și prin  $M$  masa sistemului,

$$\sum m y = 0, \quad \sum m x = Ma.$$

In consecință

$$Q_x = 0, \quad Q_y = -Ma \Delta \omega, \quad Q_z = 0.$$

Vectorul rezultat al percuțiilor de inerție este deci perpendicular pe planul  $xOz$  și egal ca mărime cu  $Ma \Delta \omega$ .

b). Componentele  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Componentele percuției de inerție dintr'un punct  $x$ ,  $y$ ,  $z$  fiind

$$-\Delta \cdot m \frac{dx}{dt}, \quad -\Delta \cdot m \frac{dy}{dt}, \quad -\Delta \cdot m \frac{dz}{dt}$$

adică

$$m y \Delta \omega, \quad -m x \Delta \omega, \quad 0$$



componentele momentului acestei percuții în raport de  $O$  sunt  
 $m\bar{x}z \Delta\omega$ ,  $m\bar{y}z \Delta\omega$ ,  $-m(x^2 + y^2) \Delta\omega$ .

Deducem, pentru componentele momentului rezultat,

$$L = \Delta\omega \Sigma m\bar{x}z, \quad M = \Delta\omega \Sigma m\bar{y}z, \quad N = -I \Delta\omega$$

însemnând prin  $I$  momentul de inerție al solidului în raport de axul de rotație.

c). Înlocuind în ecuațiile (2) și (3) pe  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  și  $L$ ,  $M$ ,  $N$  prin valorile lor, obținem

$$(4) \quad \begin{cases} P_x + P'_x + P''_x = 0 \\ P_y + P'_y + P''_y - Ma \Delta\omega = 0 \\ P_z + P'_z + P''_z = 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} -h_1 P'_y - h_2 P''_y + \Delta\omega \Sigma m\bar{x}z = 0 \\ -l P_z + h_1 P'_x + h_2 P''_x + \Delta\omega \Sigma m\bar{y}z = 0 \\ l P_y - I \Delta\omega = 0 \end{cases}$$

Ecuația a seasea dă creșterea de viteză unghiulară  $\Delta\omega$ ; a treia dă suma  $P'_z + P''_z$ , iar celelalte patru procură valorile componentelor  $P'_x$ ,  $P'_y$ ,  $P''_x$ ,  $P''_y$ .

**3. Condiții pentru ca axul să nu sufere nici o percuție.**  
 Trebuie pentru aceasta ca cele șase ecuații precedente să fie satisfăcute când facem în ele pe  $P'_x$ ,  $P'_y$ ,  $P'_z$  și  $P''_x$ ,  $P''_y$ ,  $P''_z$  egali cu zero. Ori, ele devin atunci,

$$(6) \quad P_x = 0, \quad P_y = Ma \Delta\omega, \quad P_z = 0$$

$$(7) \quad \Sigma m\bar{x}z = 0, \quad \Sigma m\bar{y}z = 0, \quad P_y = \frac{I}{l} \Delta\omega$$

Condițiile  $P_x = 0$ ,  $P_z = 0$  exprimă că percuția dată  $P$  trebuie să fie normală planului  $xOz$ .

Egalitățile  $\Sigma m\bar{x}z = 0$ ,  $\Sigma m\bar{y}z = 0$  exprimă că axul  $Oz$  este ax principal de inerție pentru punctul  $O$ .



Cât privește celelalte două ecuații :

$$P_y = Ma \Delta\omega, \quad P_y = -\frac{I}{l} \Delta\omega$$

ele ne dau, prin eliminarea simultană a lui  $P_y$  și a lui  $\Delta\omega$ , relația

$$Ma = \frac{I}{l} \text{ de unde } l = \frac{I}{Ma}.$$

Expresia distanței  $l$  este, după cum se vede, aceeași ca expresia lungimii pendulului sincron al unui pendul compus.

Cu această valoare pentru  $l$ , ambele ecuații de mai sus ne dau pentru creșterea de viteză unghiulară  $\Delta\omega$  aceeași valoare

$$\text{și anume } \Delta\omega = \frac{P_y}{Ma}.$$

În rezumat, pentru ca axul de rotație să nu sufere nici o percuție este necesar și suficient:

1° ca percuția aplicată solidului să fie perpendiculară pe planul care trece prin axul de rotație și centrul de greutate;

2° ca axul de rotație să fie ax principal de inerție pentru punctul unde el întâlnește planul perpendicular dus prin direcția percuției;

3° ca percuția să lucreze la distanța  $l = \frac{I}{Ma}$  de axul de rotație.

În asemenea condițiuni, punctul A, unde direcția percuției întâlnește planul dus prin axul de rotație și centrul de greutate, se numește *centru de percuție*.

**Aplicație.** Fie o bară omogenă cilindrică, susținută orizontal de mână și putând a se învârti în jurul axului orizontal proiectat în O, de unde o ține mâna. Se aplică barei o percuție P. Se întreabă, în ce condiții nu va suferi mâna nici-o izbire de pe urma acestei percuții ?

**Răspuns:**

1° Trebuie ca percuția P să fie perpendiculară pe planul care trece prin axul orizontal proiectat în O și prin centrul de greutate G al barei, deci să fie o percuție verticală;



2°. Axul de rotație proiectat în O este principal de inerție

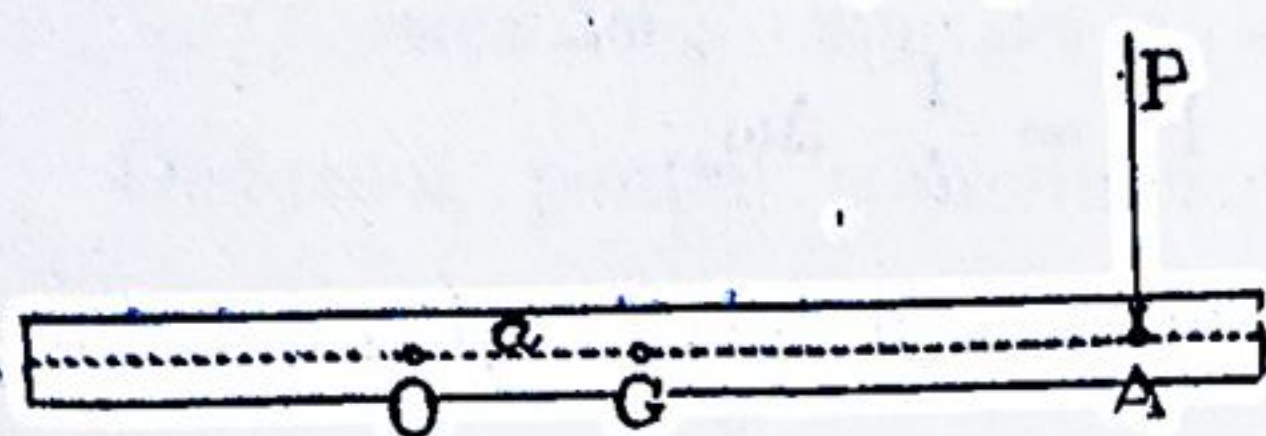


Fig. 207

pentru punctul O situat pe axul barei<sup>1)</sup>; trebuie deci ca percuția verticală P să întâlnească acest ax. Fie A punctul de întâlnire;

3° Trebuie înșfârșit ca punctul A să fie situat dincolo de centrul de greutate G al barei și anume la depărtarea  $l = \frac{I}{Ma}$  de punctul O; I fiind momentul de inerție al barei în raport de axul de rotație O, M masa barei și a distanța OG.

Dacă însemnăm prin K raza de girație corespunzătoare momentului de inerție în raport de axul dus prin G paralel axului de rotație, știm că avem

$$I = MK^2 + Ma^2 = M(K^2 + a^2).$$

Putem deci scrie

$$l = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}$$

$\frac{K^2}{a}$  reprezentând prin urmare lungimea GA.

Rolul punctelor O și A poate fi inversat, adică putem susține bara în A și aplica percuția în O; mâna nu va suferi nici atunci vre-o izbire.

În adevăr, noua lungime  $l'$  privitoare cazului când axul de rotație este în A, fiind dată de formula

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'}$$

unde  $a'$  reprezintă distanța GA, egală după cum s'a spus cu  $\frac{K^2}{a}$ , avem

$$l' = \frac{K^2}{a} + K^2 \cdot \frac{a}{K^2} = a + \frac{K^2}{a}$$

deci  $l' = l$ .

Să observăm înșfârșit, că dacă punem  $GA = d$ , avem

$$ad = K^2.$$

<sup>1)</sup> Pag. 318 litera b) sau a)



### III. EFECTUL PERCUȚIILOR ASUPRA UNUI SOLID CARE SE ÎNVÂRTEȘTE ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX.

1. Să presupunem solidul în repaus. Sub acțiunea percuțiilor, el va dobândi o viteză unghiulară  $\omega$  în jurul unui anumit ax instantaneu trecând prin punctul fix. Trebuie să determinăm poziția acestui ax și valoarea lui  $\omega$ .

Pentru aceasta va fi suficient să aplicăm teorema II exprimând că, în raport de punctul fix, momentul rezultat al cantităților de mișcare dobândite este egal cu momentul rezultat al percuțiilor.

Fie  $A, B, C$  momentele de inerție principale ale solidului pentru punctul fix;  $p, q, r$  componentele lui  $\omega$  pe cele trei axe ale elipsoidului de inerție și  $L, M, N$  componentele pe aceleași axe ale momentului rezultat al percuțiilor.

Știm că proiecțiile momentului rezultat al cantităților de mișcare pe axele considerate sunt egale cu  $Ap, Bq, Cr$ . Avem deci egalitățile

$$(1) \quad Ap = L, \quad Bq = M, \quad Cr = N.$$

Aceste ecuații ne dau soluția chestiunii, căci ele determină componentele  $p, q, r$  ale vectorului rotației și prin urmare atât pe  $\omega$  cât și poziția axului instantaneu.

Dacă solidul nu pleacă din repaus, ecuațiile (1) au forma

$$A \cdot \Delta p = L, \quad B \cdot \Delta q = M, \quad C \cdot \Delta r = N$$

$\Delta p, \Delta q, \Delta r$  fiind creșterile geometrice ale componentelor  $p, q, r$  ale vectorului rotației instantanee inițiale.

**2. Teoremă.** Când unui solid, care are un punct fix și este în stare de repaus, i se aplică percuții, axul rotației instantanee ce dobândește este diametrul conjugat, în elipsoidul de inerție, al planului dus prin punctul fix perpendicular pe momentul rezultat al percuțiilor în raport de acest punct.

În adevăr, ecuația planului dus prin origina axelor cordonate (punctul fix) perpendicular pe vectorul  $L, M, N$  fiind

$$LX + MY + NZ = 0$$



iar elipsoidul de inerție având ca ecuație

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

cosinusurile directoare ale diametrului conjugat în chestiune sunt proporționale cu  $\frac{L}{A}$ ,  $\frac{M}{B}$ ,  $\frac{N}{C}$  și deci cu  $p$ ,  $q$ ,  $r$  potrivit egalităților (1).

**3. Notă.** Teoria percuțiilor este o teorie aproximativă, care se sprijină pe presupunerea că pe timpul duratei percuțiilor deplasarea corpului e neglijabilă. Această teorie nu se poate deci aplica unui giroscop animat de o foarte mare viteză de rotație. Astfel, o percuție aplicată giroscopului poate să nu schimbe direcția axului său de rotație.

#### IV. EFECTUL PERCUȚIILOR ASUPRA UNUI SOLID LIBER.

În cazul unui solid liber, se determină mai întâi creșterea geometrică a vitezei pe care o dobândește centrul de greutate al solidului prin efectul percuțiilor, apoi rotația instantanee a solidului în jurul centrului de greutate considerat ca fix.

Presupunând că solidul ar pleca din repaus, aplicația formulelor (2) dela teorema I ne dă

$$M \frac{da}{dt} = \sum P_x, \quad M \frac{db}{dt} = \sum P_y, \quad M \frac{dc}{dt} = \sum P_z$$

ecuații care determină componentele vitezei ce dobândește centrul de greutate.

Raportând mișcarea relativă a solidului, în jurul centrului de greutate, la trei axe cordonate de direcții invariabile trecând prin acest punct, poziția axului instantaneu și viteza unghiulară a rotației nu vor depinde decât de percuțiile aplicate solidului. Determinarea acestor elemente se va face deci ca la capitolul precedent.

**Exemplu.** Un elipsoid omogen și greu, cu unul din axe vertical, este supus unei percuții  $P$  conținută în planul orizontal care



trece prin centrul său. Să se determine mișcarea pe care o imprimă elipsoidului percuția dată, presupunând că elipsoidul se găsea în stare de repaus.

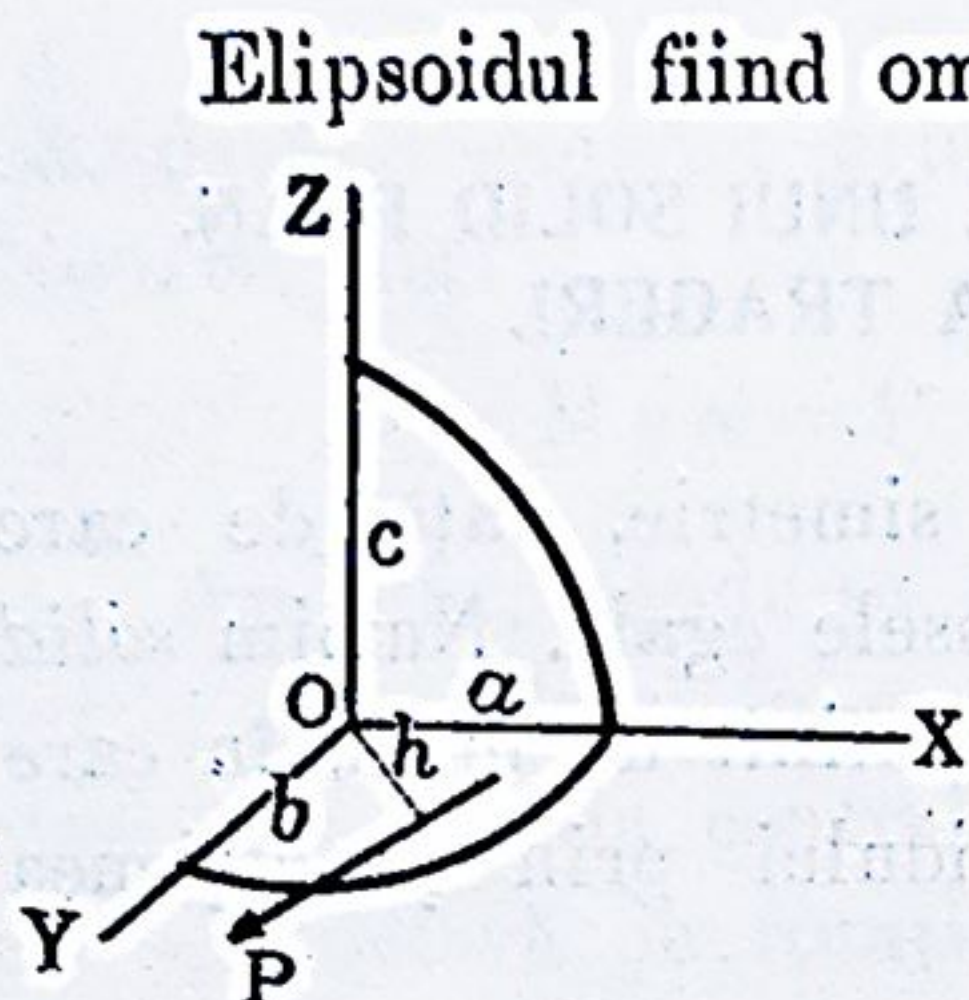


Fig. 208

Elipsoidul fiind omogen, cele trei axe ale sale sunt principale de inerție pentru centrul său O care este și centru de greutate.

Viteza  $V$  pe care o dobândește centrul de greutate prin efectul percuției, rezultă după cum știm din egalitatea

$$MV = P$$

în care se va face

$$M = \frac{4}{3} \pi abc \cdot \rho$$

$\rho$  fiind densitatea. Centrul de greutate va dobândi deci o viteză orizontală în direcția percuției.

În cât privește mișcarea relativă în jurul punctului O, știm că componentele  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ale vectorului rotației instantanee sunt date de formulele

$$p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C}.$$

Însă, în exemplul considerat,  $L$  și  $M$  sunt nuli iar  $N$  este egal cu  $Ph$ , însemnând prin  $h$  distanța dela O la vectorul P. Așa dar

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \frac{Ph}{C}.$$

Axul instantaneu este deci axul OZ

După încetarea percuției, centrul de greutate, găsindu-se animat de viteza  $V$  și solidul fiind abandonat greutatei, va descrie o parabolă cu axul vertical.

Mișcarea în jurul centrului de greutate va fi aceea a unui solid în jurul unui punct fix, când rezultanta forțelor aplicate trece prin acest punct. Cum mișcarea dată de percuția P este o rotație în jurul unui ax principal de inerție, acest ax va deveni ax permanent de rotație.

În rezumat, centrul de greutate al elipsoidului va descrie,



ulterior percuției, o parabolă cu axul vertical, în timp ce elipsoidul se va învârti cu o viteză constantă în jurul axului său vertical care se va deplasa paralel cu el însuși.

## V. EFECTUL PERCUȚIILOR ASUPRA UNUI SOLID PLAN. PERCUȚIILE TUNURILOR LA TRAGERI.

Fie un solid având un plan de simetrie, față de care punctele solidului simetric așezate au masele egale. Numim *solid plan* acest plan de simetrie cu grosime infinit de mică, în care presupunem concentrată toată masa solidului prin proiecțiunea tuturor maseilor pe suprafața lui.

Vom studia efectul percuțiilor aplicate unui solid plan în planul său. Acesta este unul din cazurile cele mai interesante ce se prezintă în practică. Astfel este, spre exemplu, cazul unui tun așezat pe o platformă orizontală în poziție de tragere și supus percuției ce i-o imprimă gazele pulberii de încărcare. Efectul acestei percuții asupra tunului întreg, va fi acela pe care îl imprimă percuția, solidului plan la care reducem tunul.

1. **Solid plan liber.** Fie un solid plan, în stare de repaus, având centrul de greutate în  $G$ . Sub efectul unei percuții  $P$ , so-

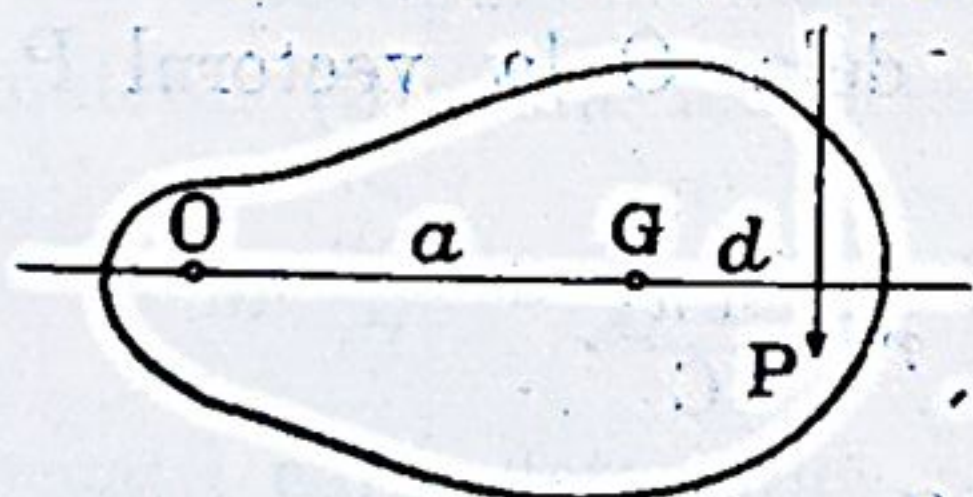


Fig. 209

lidul ia o mișcare elementară de rotație în jurul unui centru instantaneu  $O^1$ ). Viteza acestui centru fiind nulă cantitatea sa de mișcare este și ea nulă. Punctul  $O$  ne suferind astfel nici-o percuție, știm că se găsește pe perpendiculară ridicată din  $G$  pe direcția percuției și la o distanță  $a$  de punctul  $G$  astfel încât

$$a \cdot d = K^2$$

însemnând prin  $d$  depărtarea punctului  $G$  de percuție și prin  $K$  raza de girație corespunzătoare momentului de inerție al solidului în raport de  $G$ .

<sup>1)</sup> Olhematto, pag. 102.



Pe de altă parte, mai știm că viteza  $V$  pe care o dobân-  
dește centrul de greutate  $G$  prin efectul percuției, rezultă din  
egalitatea

$$M \cdot V = P$$

Însă, dacă însemnăm prin  $\omega$  viteza unghiulară a rotației, avem  
 $V = a \omega$ , deci

$$M a \omega = P \quad \text{de unde} \quad \omega = \frac{P}{M a}.$$

Așa dar, dându-se centrul de greutate  $G$ , momentul de  
inerție al solidului în raport de  $G$  și percuția  $P$ , putem deter-  
mina atât poziția centrului instantaneu de rotație  $O$  cât și vi-  
teza unghiulară de rotație  $\omega$ <sup>1)</sup>.

**Notă.** Din punctul  $G$  ca centru și cu raza de girație  $K$ , să  
descriem un cerc. Polara punctului  $O$  față de acest cerc, zis  
*cercul de inerție*, este dreapta  $CD$ . Ori, avem

$$\overline{CG}^2 = OG \cdot IG \quad \text{adică} \quad K^2 = a \cdot IG$$

și, cum  $K^2 = a \cdot d$ , rezultă că  $IG$  este egal cu  $d$ .

Așa dar, simetrica polarei  $CD$  în raport de  $G$ , care este

<sup>1)</sup> Aceste elemente se puteau determina și pe baza celor expuse la ca-  
pitoul precedent intitulat *Efectul percuțiilor asupra unui solid liber*. În a-  
devăr, dacă în locul solidului din spațiu considerăm un solid din planul  $XGY$ ,  
centrul de greutate fiind în origină, viteza  $V$  a acestui centru, paralelă cu  
direcția percuției, rezultă din egalitatea  $MV = P$ , iar valoarea vitezei unghi-  
ulare de rotație  $\omega$  în jurul lui  $G$ , este dată de ecuația momentelor  $I\omega = Pd$ ,  
în care  $I$  este momentul de inerție în raport de  $G$ , egal de altfel cu  $MK^2$ ,  
 $K$  fiind raza de girație. Însă, în cazul de față, mișcarea de translație de vi-  
tează  $V$  a solidului plan compusă cu mișcarea de rotație de viteză unghiulară  
 $\omega$  din jurul lui  $G$ , dau ca mișcare rezultantă o rotație de aceeași viteză un-  
ghiulară în jurul unui punct  $O$  situat pe perpendiculara coborâtă din  $G$  pe  
direcția percuției, la distanța  $GO = a = \frac{V}{\omega}$  (*Cinematica*, pag. 188). Cele 3  
egalități:

$$MV = P, \quad MK^2 \omega = Pd, \quad a = \frac{V}{\omega}$$

ne dau imediat

$$Ma \omega = P, \quad a \cdot d = K^2$$

adică aceleași formule ca mai sus pentru determinarea lui  $\omega$  și a lui  $a$ .



perpendiculara  $C'D'$ , reprezintă poziția percuției  $P$  față de punctele  $O$  și  $G$ .

Rezultă de aci un mijloc geometric de a determina poziția

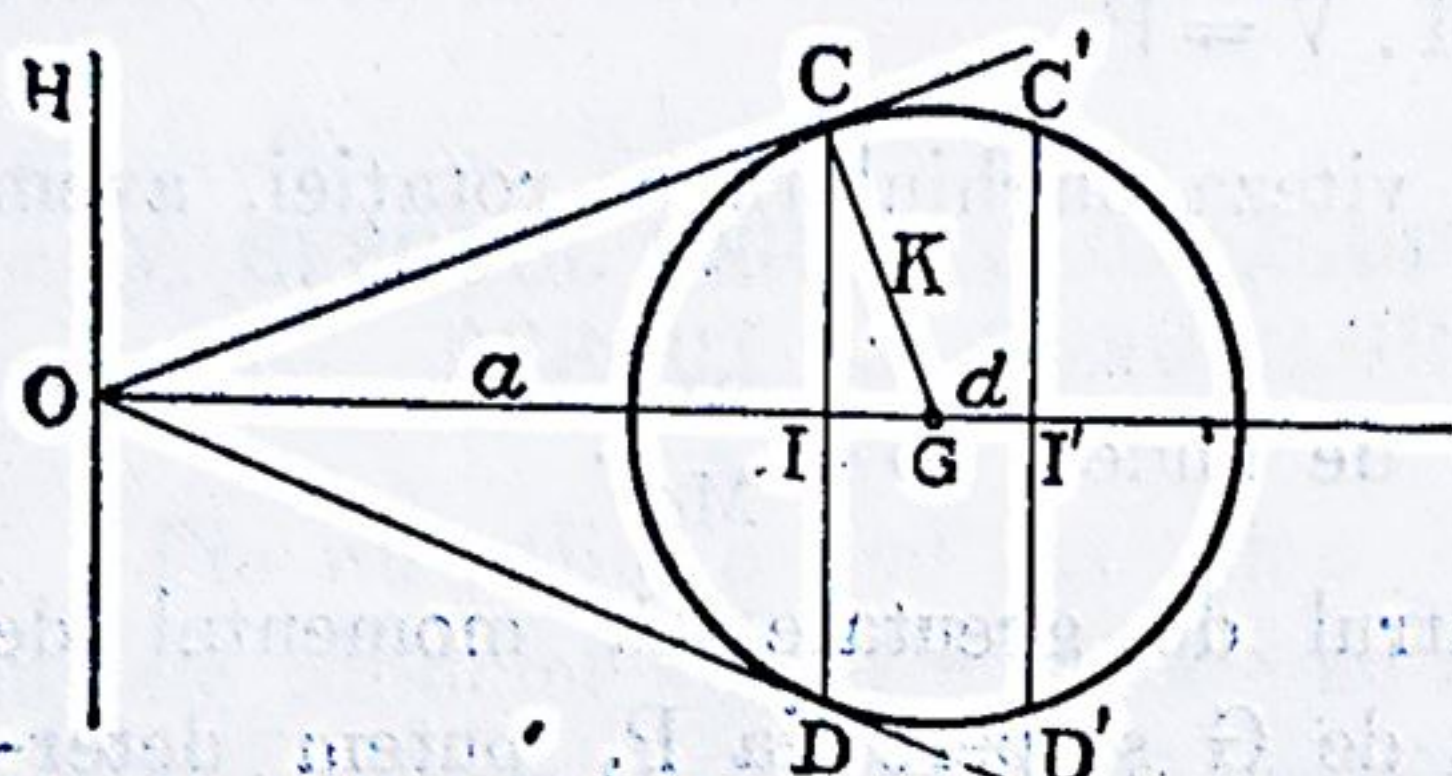


Fig. 210

punctului  $O$  când se dă  $G$  și  $P$ , sau poziția percuției  $P$  când se dă  $G$  și  $O$  presupunând pe  $K$  cunoscut.

Știm pe de altă parte din Geometrie, că polara ori-cărui punct de pe perpendiculara  $OH$  trece prin

punctul  $I$ , care este polul dreptei  $OH$  în cercul considerat. Ne vom servi la paragraful 4 de acest rezultat.

**2. Solid plan care are un punct fix.** Fie  $O$  punctul fix,  $G$  centrul de greutate al solidului și  $P$  percuția dată, aplicată pe direcția  $SS'$ .

Ca și în cazul forțelor ordinare, solidul își ia mișcarea sa liberă sub efectul percuției motrice, sau efective, care este re-

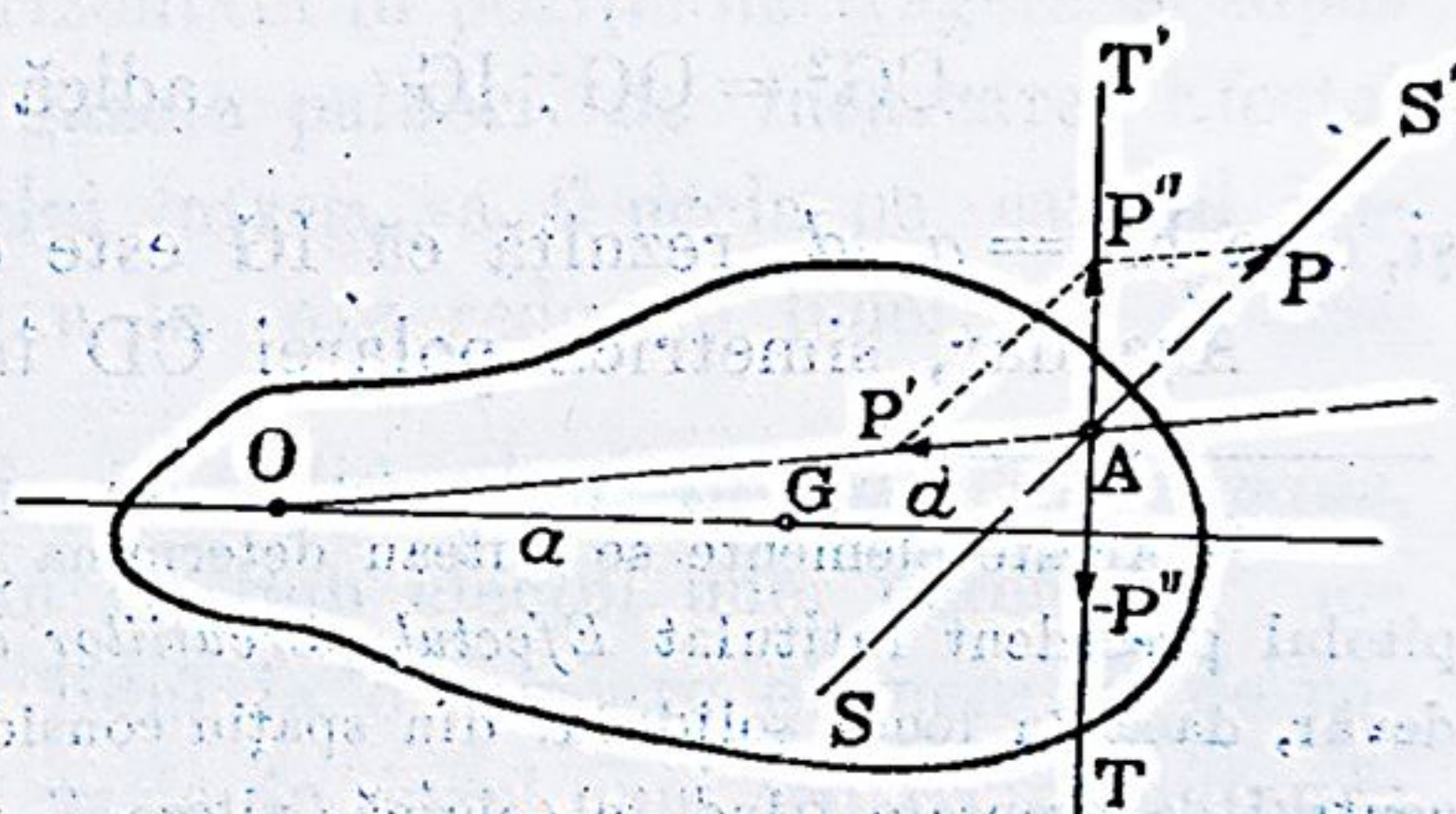


Fig. 211

zultanta percuției direct aplicate  $P$  și a acțiunii percuției punctului fix  $O$  asupra solidului, pe care să o numim  $P'$ . Direcția acesteia din urmă trece neapărat prin punctul  $O$ .

Ori, percuția efectivă știm că este perpendiculară pe dreapta  $OG$  și depărtată de punctul  $G$  de lungimea  $d$  egală cu  $\frac{K^2}{a}$ , adică este simetrica polarei punctului  $O$  în cercul de inerție. Fie  $TT'$  această dreaptă și  $A$  punctul ei de intersecție cu direcția  $SS'$  a percuției  $P$ .

Luând punctul  $A$  ca punct de aplicație al percuției  $P$  și formând paralelogramul  $APP''P'A$ , obținem atât percuția  $P'$  cât



și percuția efectivă  $P''$ , care este, după cum am spus, rezultanta percuțiilor  $P$  și  $P'$ . Dealtfel, după cum știm, avem

$$P'' = Ma\omega \quad \text{și prin urmare} \quad \omega = \frac{P''}{Ma}.$$

Să mai observăm că percuția de inerție fiind percuția —  $P''$ , egală și direct opusă lui  $P''$ , potrivit principiului lui d'Alembert solidul poate fi considerat ca fiind în echilibru sub efectul celor 3 percuții  $P$ ,  $P'$  și —  $P''$  <sup>1)</sup>.

**3. Solid plan cu diferite legături.** Metoda generală constă în aplicația principiului lui d'Alembert, scriind că există echilibru între percuțiile direct aplicate, percuțiile ocazionate de legături asupra solidului și percuțiile de inerție.

**4. Aplicațiune. Percuțiile tunurilor la trageri.** Fie un tun în poziție de tragere, așezat pe o platformă orizontală de lemn, cu roțile împiedecate.

Gazele pulberii de încărcare dau țevii tunului o percuție  $P$ , a căreia linie de acțiune coincide cu axul țevii. Această per-

<sup>1)</sup> Am fi putut ajunge la rezultatele precedente și în mod analitic urmând metoda expusă la capitolul intitulat *Efectul percuțiilor asupra unui solid care se învârtește în jurul unui ax fix*.

Potrivit acelei metode, luând sistemul dreptunghiular  $xOy$  așa după cum arată figura alăturată, avem cele 3 ecuații

$$P_x + P'_x - P''_x = 0, \quad P_y + P'_y - P''_y = 0, \\ I\omega = lP_y$$

$I$  fiind momentul de inerție al solidului în raport de  $O$ , egal de altfel cu  $M(a^2 + K^2)$ . Inșă

$$P''_x = \sum m \frac{dx}{dt} = -\omega \sum my = -M b\omega = 0, \text{ ordo-}$$

nata  $b$  a lui  $G$  fiind nulă, iar

$$P''_y = \sum m \frac{dy}{dt} = \omega \sum mx = Ma\omega. \text{ Deci } P'' = Ma\omega,$$

și pe de altă parte, cum momentele celor două percuții  $P$  și  $P''$  sunt egale de oare-ce percuția  $P'$  trecând prin  $O$  are momentul său nul, avem  $I\omega = lP_y = Ma\omega\lambda$ , așa că, în definitiv

$$P'_x = -P_x, \quad P'_y = Ma\omega - P_y, \quad \lambda = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}$$

$$\omega = \frac{lP_y}{I} = \frac{P''}{Ma}.$$

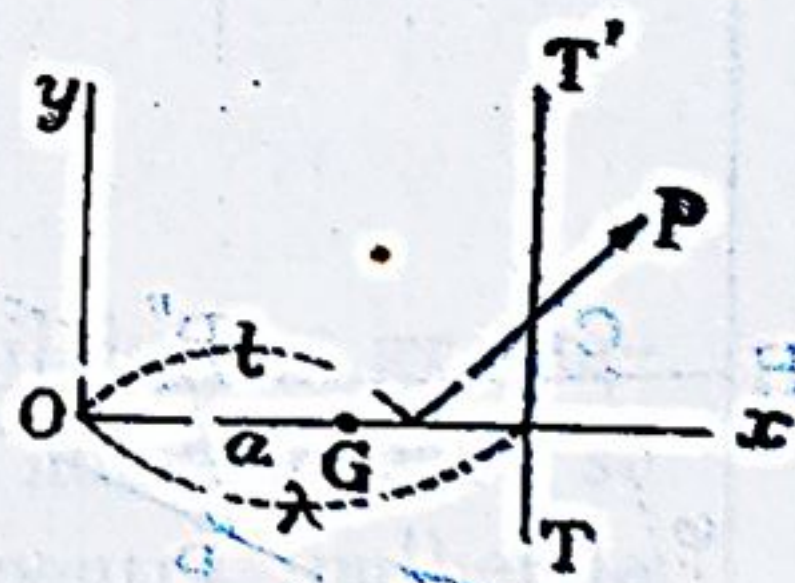


Fig. 212



cuție se transmite întregului sistem format de țeavă, afet și roate și dă tunului o mișcare de recul. Presupunând afetul rigid, tunul constituie atunci un solid invariabil. Solidul plan, la care reducem tunul, fiind o porțiune din planul vertical care trece prin axul țevii, va lua sub efectul percuției, când unghiul de tragere <sup>1)</sup> este superior unei anumite limite, o mișcare de translație orizontală în acest plan.

1°. *Translație simplă.* În timpul acestei mișcări, cele 2 puncte de reazăm C și R ale solidului plan, care corespund contactului cozii afetului și roatelor tunului cu platforma, alunecă cu frecare pe platformă în direcția dela R la C. Fie  $\varphi$  unghiul de frecare, a căruia tangentă, în cazul care ne ocupă al frecării ferului pe lemn, este egală cu 0,50.

Fie de asemenea:

$G_t$ , centrul de greutate al țevii tunului, situat pe axul țevii și în vecinătatea axului orizontal proiectat în U al umerilor afetului care susțin țeava;

$G, A$ , axul țevii înclinat pe orizont de un unghi  $\alpha$ , care este unghiul de tragere;

$G$ , centrul de greutate al întregului tun;

$OH$ , orizontala care trece prin  $G$ .

Prin punctul O, unde direcția percuției P întâlnește orizontala OH, să ducem

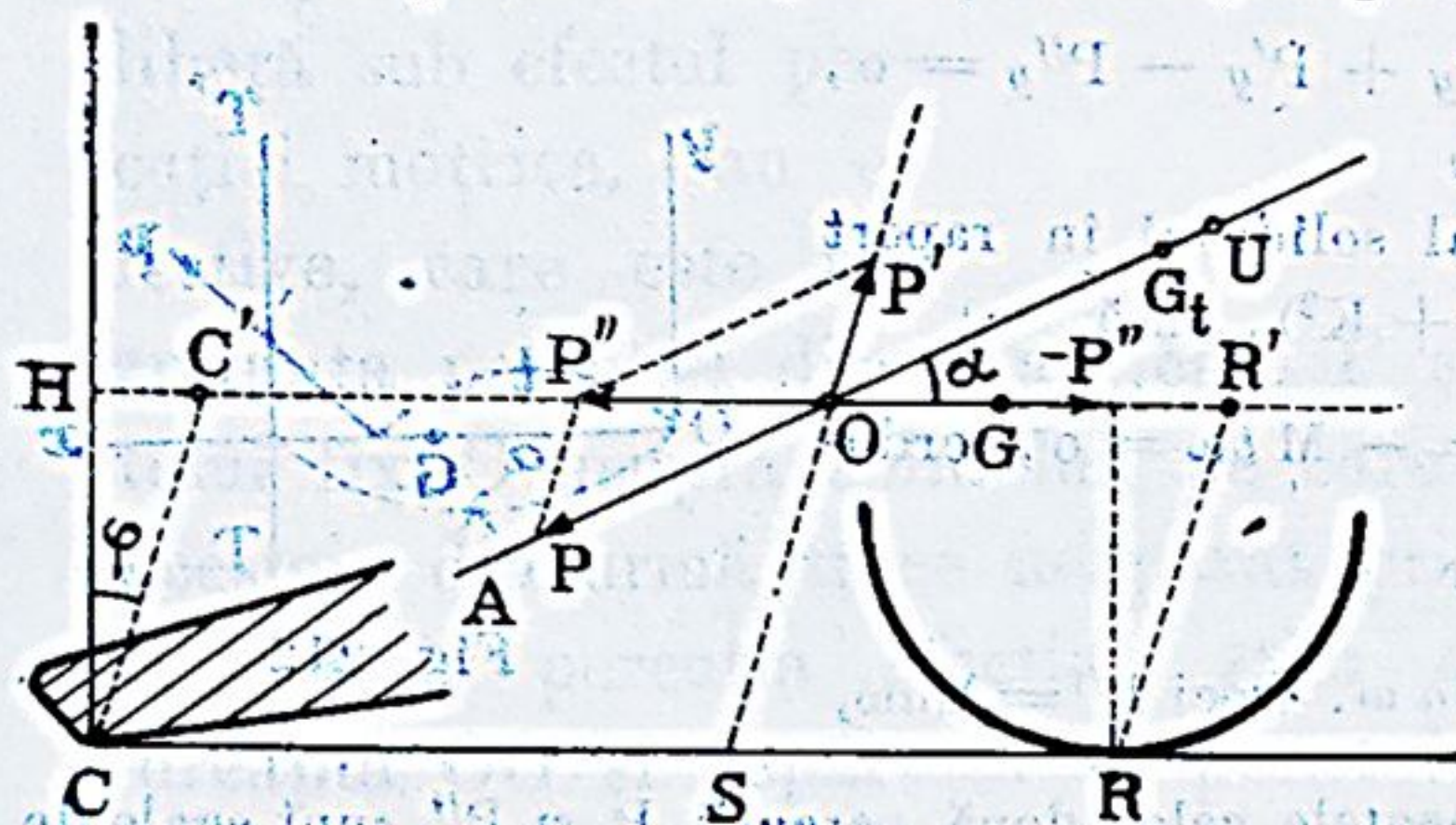


Fig. 213

dreapta SO care face cu verticala unghiul de frecare  $\varphi$ .

Cum centrul de greutate  $G$  se mișcă pe orizontala OH, vedem, că dacă mutăm punctul de aplicație al percuției P în O și con-

struim apoi paralelogramul  $OPP'P'O$ , vectorul  $OP'$  va reprezenta

<sup>1)</sup> Unghiul de tragere este unghiul pe care îl formează axul țevii cu orizontul.



percuția  $P'$  a platformei asupra punctelor de reazăm  $C$  și  $R$  ale tunului, iar vectorul  $OP''$  percuția efectivă sau motrice  $P''$  care determină mișcarea de recul a întregului tun. Însfârșit, —  $P''$  va fi percuția de inerție. Cele 3 percuții  $P$ ,  $P'$  și  $-P''$ , potrivit principiului lui d'Alembert, își fac echilibru.

Așa dar, dacă se cunoaște  $P$ , putem determina percuția motrice  $P''$  și prin urmare viteza de recul a întregului sistem egală cu  $\frac{P''}{M + M'}$ ,  $M$  fiind masa țevii și  $M'$  masa afetului cu roatele sale, cum de asemenea percuția  $P'$  a platformei asupra tunului, care se descompune în două componente paralele aplicate în punctele  $C$  și  $R$ . Componentele din  $R$  se distribuie apoi în mod egal celor două roate.

Valoarea percuției  $P$  fiind egală cu cantitatea de mișcare  $Mv$ , pe care o dobândește țeava când se mișcă liber sub acțiunea gazelor pulberii, pe un plan orizontal pe care poate aluneca fără frecare, artileriștii au căutat o formulă care să procure pe  $Mv$ . Această formulă nu se poate însă obține prin aplicația teoremei cantităților de mișcare, ca la pag. 224 a Cursului nostru, căci țeava nu își dobândește viteza ei maximă de recul  $v$  decât după ce proiectilul a mai parcurs vre-o 50 de metri în aer, în care timp gazele pulberii continuă de a împinge țeava înapoi și proiectilul înainte. Dintre diferitele formule empirice propuse, cea mai utilizată este formula

$$Mv = mV \left( 1 + b \frac{\bar{w}}{p} \right)$$

în care  $mV$  este cantitatea de mișcare a proiectilului,  $\bar{w}$  greutatea încărcăturii de pulbere, iar  $b$  un coeficient numeric care se ia egal cu 2 pentru pulberile negre și cu 2,5 pentru pulberile moderne.

2°. *Translație și rotație.* Referindu-ne la figura precedentă, vom observa că dacă axul țevii face cu verticala unghiul de frecare  $\varphi$ , adică dacă unghiul de tragere  $\alpha$  devine egal cu  $90 - \varphi$ , reculul tunului se anulează căci  $P''$  devine nul.

Când direcția axului țevii trece prin punctul  $C'$ , percuția din punctul  $R$  este nulă, întreaga percuție  $P'$  a platformei fiind aplicată în punctul  $C$ .











Când direcția axului țevii  $G_t A$  trece prin  $C$ , percuția  $P''$  se anulează. Așa dar *cabrarea tunului* începe dela un unghi de tragere mai mare decât unghiul  $G_t C' R'$  dela Nr. precedent și se continuă pentru toate unghiurile de tragere mai mici decât  $G_t C R$ .

Cabrarea tunului este foarte compromițătoare pentru rezistența materialului<sup>1)</sup>. In tunurile moderne ea se evită introducându-se legături elastice între țeavă și afet care se opun tendinței de cabrare. Aceste legături elastice sunt constituite din frâne de tragere și recuperatoare, de care noi nu ne putem ocupa în Cursul de față.

**Notă.** Valoarea percuției  $P$  a gazelor asupra țevii, am spus că se determină prin formula

$$P = Mv \equiv mV \left( 1 + b \frac{\bar{\omega}}{p} \right).$$

Mai știm însă că

$$P = \int_0^{\theta} F dt$$

$F$  fiind presiunea motrice a gazelor asupra fundului țevii, în intervalul de timp dela  $0$  la  $\theta$  care corespunde dobândirii vitezii maxime de recul. Valorile  $F$  nu se pot însă determina. Se cunoaște legea variațiunii presiunilor din interiorul țevelor de tunuri, însă  $F$  nu reprezintă aceste presiuni, căci o bună parte din presiuni se perd cu producerea deformațiunilor elastice și vibrațiunile intense ce ocazionează materialului. Cum aceste pierderi de presiune nu pot fi determinate, rezultă că legea variațiunii lui  $F$ , în intervalul dela  $0$  la  $\theta$ , ne rămâne necunoscută.

<sup>1)</sup> Înălțimea verticală la care se ridică centrul de greutate  $G$  prin cabrare, se obține aplicând teorema forțelor vii, cu începere din momentul când viteza unghiulară de rotație este  $\omega$  și până în momentul când această viteză se anulează prin efectul travaliului negativ al greutateii tunului. Forța vie este dealtfel  $\frac{1}{2} I \omega^2$ ,  $I$  fiind momentul de inerție al tunului, redus la un solid plan, în raport de  $C$ .



Putem însă determina valoarea mijlocie  $F'$  a acestor eforturi  $F$ . Avem, în adevăr, egalitatea

$$Mv = \int_0^{\theta} F dt = F' \cdot \theta$$

din care deducem

$$F' = \frac{Mv}{\theta}$$

valoarea lui  $\theta$  determinându-se experimental sau prin formule de Balistică interioară.

Ceea ce ar fi mai interesant de cunoscut, ar fi desigur valoarea maximă a lui  $F$ . În lipsă de aceasta, în determinarea reacțiunilor care se produc între țeavă, afet și roate, se utilizează valoarea  $F'$  mărită cu un coeficient de siguranță, care se determină prin comparațiunea materialului în studiu cu un material similar existent, de bună construcție, ceea ce revine de altfel la o anumită micșorare a valorii lui  $\theta$ , după cum am făcut noi în proiectul ce am stabilit pentru *Construcția și Organizația Afetului destinat țevelor de tun de 150 mm. calibru, scoase din forturile cetății București*, publicat în *Revista Artileriei* din Mai—Iunie 1921.

Cititorul se mai poate referi și la articolul nostru intitulat *Construcția Tunurilor Antiaeriene*, publicat de aceeași Revistă în Martie 1936, unde se găsesc toate formulele și calculele noastre numerice privitoare organizării frânei de tragere și re-soartelor recuperatoare dela *tunurile antiaeriene de 57 mm. calibru*, cu tragere repede, sistem *Burileanu*, care au luat parte la războiul din 1916—18.

1. Postoponirea unui cilindru de revoluție pe un plan orizontal.  
Fie un cilindru de revoluție omogen și greu, de raza  $r$  și de greutate  $P$ , așezat în repaus pe un plan orizontal. Se aplică în centrul de greutate  $O$  al cilindrului și perpendicular pe axa un efort orizontal de tracțiune  $T$  pe care să-l facem să crească progresiv cu încheputura de la zero.



## VII. MIȘCAREA SOLIDELOR NATURALE

Când un solid natural se mișcă în spațiu sub acțiunea unor forțe, deformațiunile pe care le suferă în punctele de aplicație ale forțelor sunt în general neglijabile, așa că solidul poate fi considerat ca păstrând o formă invariabilă. Se vor putea deci aplica mișcării solidelor naturale toate teoremele privitoare mișcării solidelor invariabile, fără vre-o altă considerație de avut în vedere.

Nu se va proceda însă astfel decât pentru studiul mișcării solidelor izolate.

Când un solid natural rămâne pe timpul mișcării sale în contact cu unul sau mai multe alte solide naturale, trebuie să se țină seama de reacțiunile particulare ce se produc în punctele de contact, aceste reacțiuni nefiind aceleași ca în cazul contactului dintre solidele pe care le consideră Mecanica rațională. Numai cu această condiție se vor putea apoi aplica solidelor naturale teoremele referitoare Dinamicii solidelor invariabile.

Cu reamintirea celor expuse la capitolul intitulat „*Echilibrul solidelor naturale*” exemplele care urmează vor lămuri suficient această chestiune.

**1. Rostogolirea unui cilindru de revoluție pe un plan orizontal.**  
Fie un cilindru de revoluție omogen și greu, de rază  $r$  și de greutate  $P$ , stând în repaus pe un plan orizontal. Să aplicăm în centrul de greutate  $O$  al cilindrului și perpendicular pe ax, un efort orizontal de tracțiune  $T$  pe care să-l facem să crească progresiv cu începere dela zero.



Știm că cilindrul va rămâne în stare de repaus până când valoarea lui  $T$  va deveni egală cu  $\frac{P}{r} \delta$ , însemnând prin  $\delta$  distanța punctului de contact mecanic  $C$  la verticala centrului de greutate. În acel moment, acțiunea planului orizontal asupra cilindrului are o componentă orizontală  $F$  egală cu tracțiunea  $T$  și o componentă verticală  $P'$  egală cu  $P$  însă de sens opus. Componenta  $F$  reprezintă o frecare și vom presupune că valoarea ei este mai mică decât frecarea de alunecare

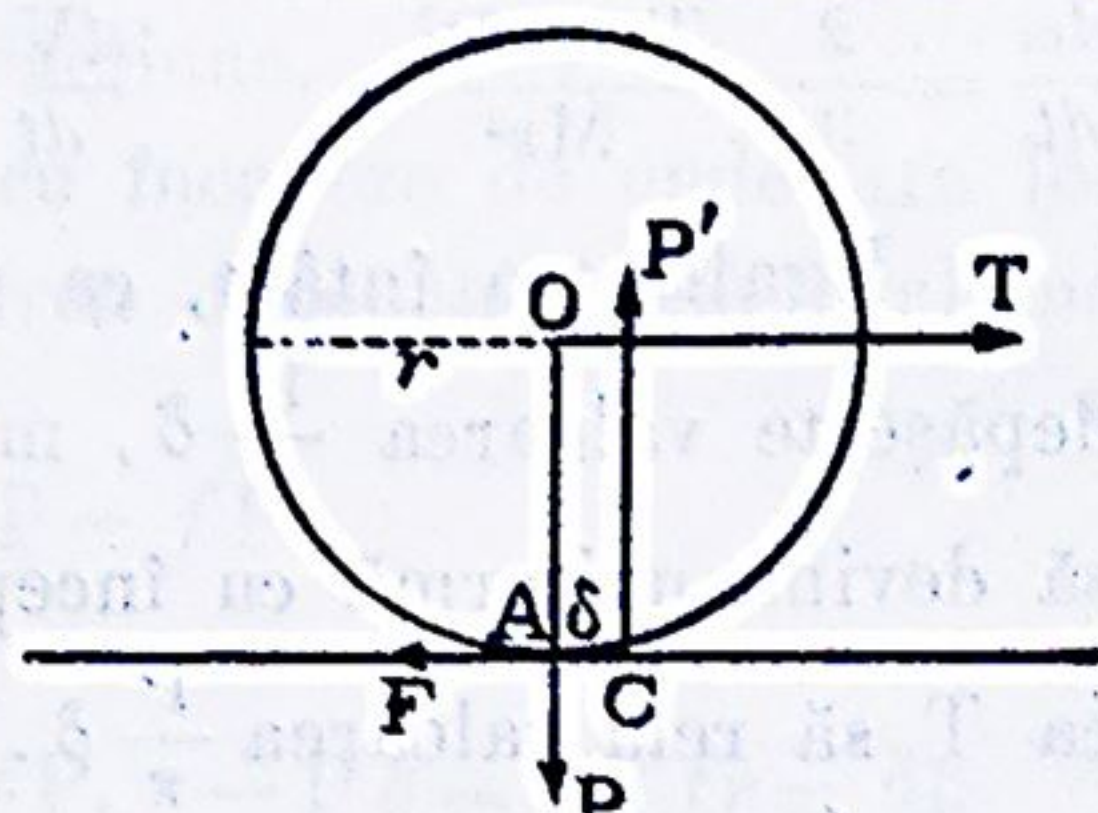


Fig. 216

$fP$ , așa ca mărand pe  $T$  dincolo de valoarea  $\frac{P}{r} \delta$  cilindrul să nu ia decât o mișcare de rostogolire.

Pe timpul acestei mișcări, componenta  $P'$  va rămâne aceeași pe când  $F$  va fi variabil. Centrul de greutate  $O$  se va mișca în direcția efortului  $T$  după legea

$$(1) \quad M \frac{dV}{dt} = T - F$$

$M$  fiind masa cilindrului și  $V$  viteza lui  $O$ .

Pe de altă parte, însemnând prin  $I$  momentul de inerție al cilindrului în raport de axul său și prin  $\omega$  viteza unghiulară de rotație în jurul acestui ax, avem

$$I \frac{d\omega}{dt} = Fr - P\delta$$

sau, pentru că  $I$  este egal cu  $\frac{1}{2} Mr^2$ ,

$$(2) \quad \frac{1}{2} Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = Fr - P\delta$$

Însfârșit, cum există rostogolire, viteza punctului de contact geometric  $A$  este nulă. Viteza de antrenare a acestui punct fiind egală cu  $V$  iar viteza relativă egală cu  $-\omega r$ , viteza sa absolută are ca expresie  $V - \omega r$ ; avem deci relația

$$(3) \quad V - \omega r = 0$$



Ecuațiile (1), (2) și (3) ne permit a determina pe  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\frac{dV}{dt}$  și  $F$ . Ele ne dau în adevăr, în funcție de datele problemei

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Tr - P\delta}{Mr^2}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Tr - P\delta}{Mr}, \quad F = \frac{Tr + 2P\delta}{3r}.$$

Egalitatea întâia, ca și a doua, arată, că de îndată ce  $T$  depășește valoarea  $\frac{P}{r}\delta$ , mișcarea se accelerează. Pentru ca ea să devină uniformă cu începere de la un moment oarecare, trebuie ca  $T$  să reia valoarea  $\frac{P}{r}\delta$ .

Egalitatea a treia stabilește că  $F$  crește odată cu  $T$ . Pentru ca  $F$  să nu atingă valoarea frecării de alunecare, caz în care mișcarea cilindrului ar fi o rostogolire cu alunecare, trebuie să avem

$$\frac{Tr + 2P\delta}{3r} < fP$$

adică

$$T < P \cdot \frac{3fr - 2\delta}{r}.$$

În asemenea ipoteză, să ne închipuim că într'un moment oarecare al mișcării se suprimă efortul  $T$ . Mișcarea va deveni atunci uniform întârziată și va avea loc potrivit egalităților

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{P\delta}{Mr^2} = -\frac{2}{3} \frac{g\delta}{r^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{g\delta}{r}$$

care se deduc din cele de mai sus făcând pe  $T$  egal cu zero. Frecarea va deveni constantă, valoarea ei fiind

$$F = \frac{2}{3} \frac{P}{r} \delta.$$

**2. Rostogolirea cu alunecare a unui cilindru de revoluție pe un plan orizontal.** În exemplul precedent am presupus că rostogolirea are loc fără alunecare. Alunecarea se poate produce chiar dela eșirea din starea de repaus dacă se întâmplă ca  $\frac{P}{r}\delta$  să



atingă valoarea  $fP$ , adică dacă avem  $f = \frac{\delta}{r}$ . Am mai văzut că alunecarea se poate produce pe timpul rostogolirii când componenta  $F$  atinge aceeași valoare  $fP$ , ceea ce corespunde unei anumite valori a efortului de tracțiune.

Ori care ar fi momentul cu începere de unde are loc rostogolirea cu alunecare, vom avea începând dela acel moment

$$(4) \quad M \frac{dV}{dt} = T - fP$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = fP \cdot r - P\delta = P(fr - \delta).$$

Prima ecuație dă pe  $\frac{dV}{dt}$  iar a doua pe  $\frac{d\omega}{dt}$ . Componenta  $F$  rămâne constantă și egală cu  $fP$ . Expresia  $V - r\omega$  nu mai este nulă și reprezintă viteza de alunecare.

Punând termenul  $P(fr - \delta)$  sub forma  $Pfr \left(1 - \frac{\delta}{fr}\right)$  avem de observat că în practică valoarea raportului  $\frac{\delta}{fr}$  este foarte mică față de unitate. Astfel, în cazul unei roate de fer de un metru ca diametru care s'ar rostogoli cu alunecare pe o șină de fer, se poate lua  $f = 0,18$  și  $\delta = 0,43$  milimetri așa că  $\frac{\delta}{fr} = \frac{1}{222}$ . În consecință ecuația (5) se poate scrie pur și simplu

$$(5)_{\text{bis}} \quad \frac{1}{2} Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = Pfr$$

aceasta revenind după cum se vede la neglijarea lui  $\delta$ . Deci, în regulă generală, când există rostogolire cu alunecare, se poate considera punctul de contact mecanic ca confundat cu punctul de contact geometric.

### 3. Mișcarea unui cilindru de revoluție pe un plan înclinat.

Vom presupune că cilindrul pleacă din stare de repaus sub simpla acțiune a greutății sale, generatricea de contact geometrică a cilindrului cu planul fiind orizontală.



Cilindrul va coborî planul sub efectul forței de tracțiune  $T = P \sin \alpha$ ,  $\alpha$  fiind înclinarea planului pe orizont.

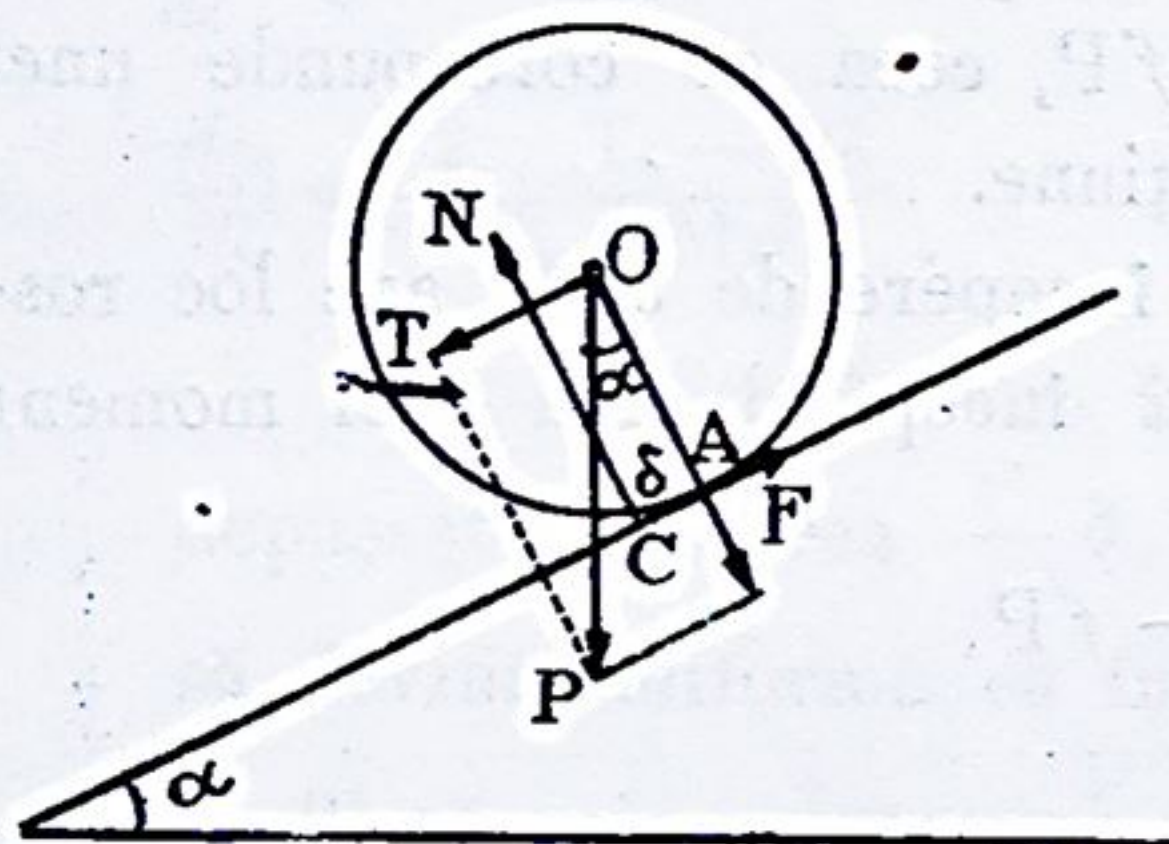


Fig. 217

Pentru ca mișcarea să poată începe, trebuie ca valoarea lui  $T$  să fie mai mare decât  $\frac{N}{r} \delta$ ,  $N$  fiind componenta normală a acțiunii planului. Cum  $N = P \cos \alpha$ , trebuie deci să avem

$$P \sin \alpha > \frac{P \cos \alpha}{r} \delta \text{ adică}$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha > \frac{\delta}{r}.$$

Dacă mărim progresiv pe  $\alpha$  cu începere dela zero, cilindrul se va pune în mișcare când  $\alpha$  va trece de valoarea  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{r}$ . Rezultă de aci un mijloc practic pentru determinarea valorii lui  $\delta$ .

Să presupunem condiția (6) îndeplinită. Mișcarea va putea fi o rostogolire, sau o rostogolire cu alunecare, după valoarea pe care o are  $\alpha$ .

a). *Rostogolire fără alunecare.* Dacă presupunem că  $\alpha$  are astfel de valoare că rostogolirea se produce fără alunecare, ecuațiile mișcării vor fi ecuațiile (1), (2) și (3) de mai sus, în care se va înlocui  $T$  prin  $P \sin \alpha$  și componenta normală a acțiunii planului prin  $P \cos \alpha$ . Făcând aceste înlocuiri, se obține

$$(7) \quad M \frac{dV}{dt} = P \sin \alpha - F.$$

$$(8) \quad \frac{1}{2} M r^2 \frac{d\omega}{dt} = F r - P \delta \cos \alpha$$

$$(9) \quad V = r \omega.$$

Din aceste ecuații deducem

$$F = P \frac{r \sin \alpha + 2 \delta \cos \alpha}{3 r}.$$



Înlocuind pe  $F$  prin această valoare, ecuațiile mișcării se reduc la cele două ecuații

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2g}{3r} (r \sin \alpha - \delta \cos \alpha) = r \frac{d\omega}{dt}$$

deci, mișcarea va fi uniform accelerată, diferența  $r \sin \alpha - \delta \cos \alpha$  fiind o cantitate pozitivă potrivit inegalității (6).

Pentru ca în conformitate cu ipoteza admisă să nu existe alunecare, trebuie să avem  $F < f \cdot P \cos \alpha$  adică

$$\frac{r \sin \alpha + 2 \delta \cos \alpha}{3r} < f \cos \alpha$$

de unde

$$(10) \quad \operatorname{tg} \alpha < 3f - 2 \frac{\delta}{r}.$$

Valoarea lui  $\alpha$  trebuie deci să satisfacă acestei condiții, care se reduce la  $\operatorname{tg} \alpha < 3f$  dacă neglijăm pe  $2 \frac{\delta}{r}$ .

b). *Rostogolire cu alunecare.* Dacă inegalitatea (10) nu are loc, mișcarea va fi o rostogolire cu alunecare. Se vor utiliza atunci ecuațiile (4) și (5) <sup>bis</sup> sub forma

$$M \frac{dV}{dt} = P (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\frac{1}{2} M r^2 \frac{d\omega}{dt} = P f r \cos \alpha$$

sau

$$(11) \quad \frac{dV}{dt} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$(12) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2gf}{r} \cos \alpha.$$

Putem observa că ecuația (11) este identică cu aceea care dă viteza unui corp greu, terminat printr'o suprafață plană, care ar coborî planul cu alunecare.

**4. Mișcarea unei sfere omogene și grele pe un plan orizontal, când se ține seama de frecare (mișcarea unei bile de biliard).** Să considerăm o sferă omogenă și grea care se mișcă cu frecare pe un plan orizontal, sfera fiind animată în momentul inițial de o mișcare de rostogolire cu alunecare.



Să luăm trei axe dreptunghiulare fixe  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , dintre care  $Oz$  vertical și îndreptat în sus iar  $Ox$  și  $Oy$  în planul

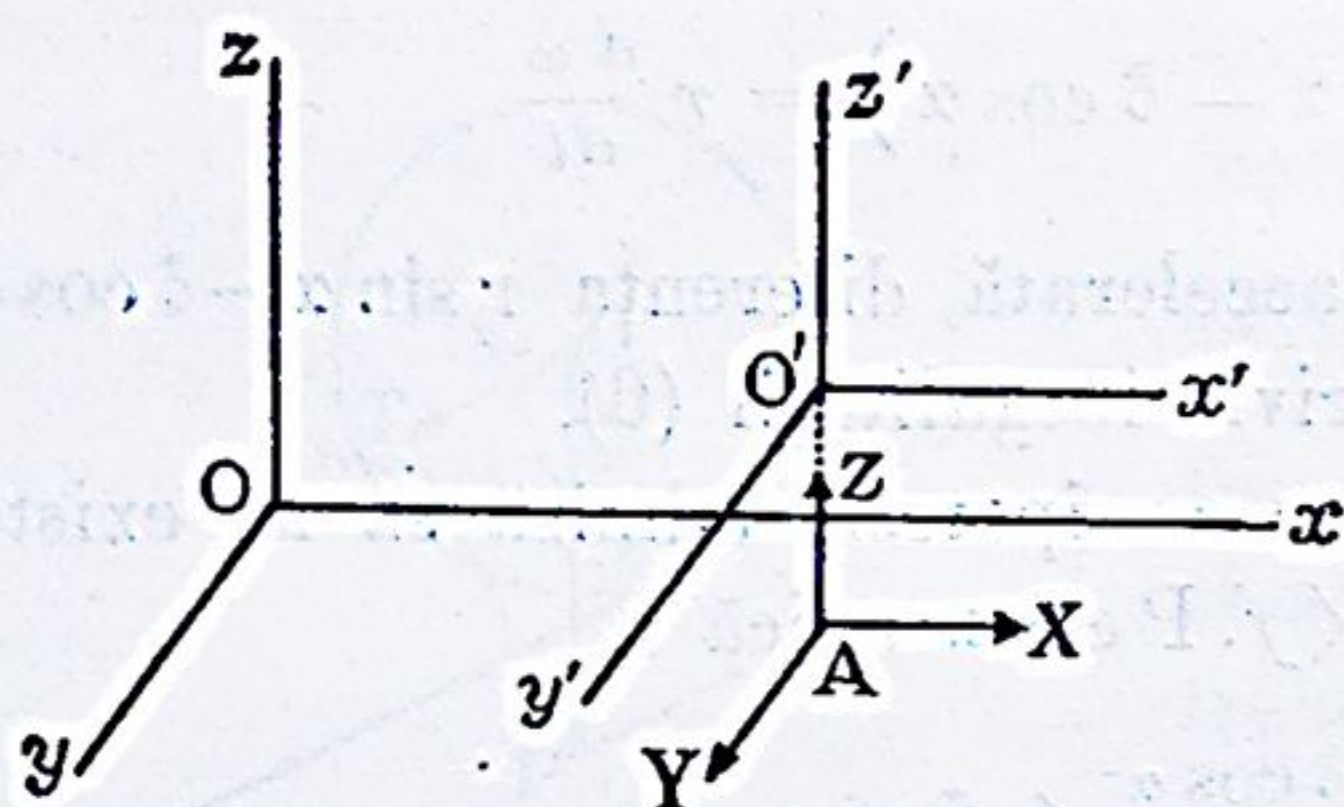


Fig. 218.

pe care se mișcă sfera. Prin centrul  $O'$  al sferei să ducem axele  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  paralele celor precedente.

Fie:

$u$ ,  $v$  proiecțiile pe  $Ox$  și  $Oy$  ale vitezei centrului  $O'$ ;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  proiecțiile pe  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  ale vectorului rotației în jurul axului instantaneu tre-

când prin  $O'$ ;

$R$  raza sferei;

$K$  raza sa de rotație în raport de unul oarecare din diametre;

$f$  coeficientul de frecare al sferei pe plan.

**Faza I<sup>a</sup>.** Cum, prin ipoteză, sfera posedă în momentul inițial o mișcare de rostogolire cu alunecare, această mișcare se va continua un oarecare timp, constituind prima fază a mișcării.

Neglijând parametrul de rostogolire  $\delta$ , să însemnăm prin  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , componentele acțiunii planului asupra sferei, din punctul de contact geometric  $A$  situat pe verticala  $O'z'$ . În afară de această acțiune, sfera nu mai este supusă decât acțiunii greutății sale  $Mg$  aplicată în  $O'$ .

Teorema mișcării centrului de greutate ne dă ecuațiile

$$(1) \quad M \frac{du}{dt} = X, \quad M \frac{dv}{dt} = Y, \quad Z - Mg = 0.$$

Apoi, avem prin teorema momentelor cantităților de mișcare (ecuațiile lui Euler):

$$(2) \quad M \cdot K^2 \frac{dp}{dt} = RY, \quad MK^2 \frac{dq}{dt} = -RX, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Pe de altă parte, componenta tangențială a acțiunii pla-



nului, adică frecarea propriu zisă, fiind egală cu  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ , avem egalitatea

$$(3) \quad \sqrt{X^2 + Y^2} = fZ.$$

Însfârșit, această componentă tangențială fiind direct opusă vitezei punctului de contact A, considerat ca aparținând sferei, și viteza acestui punct având ca proiecții  $u - Rq$  pe  $Ox$  și  $v + Rp$  pe  $Oy$ <sup>1)</sup>, avem ca ultimă ecuație

$$(4) \quad \frac{X}{Y} = \frac{u - Rq}{v + Rp}.$$

În total, opt ecuații pentru determinarea celor opt necunoscute  $u, v; p, q, r; X, Y, Z$ .

Din ecuațiile (1) și (2) deducem

$$\frac{X}{Y} = \frac{du}{dv} = -\frac{dq}{dp}$$

și, cum

$$\frac{du}{dv} = -\frac{dq}{dp} = \frac{du - R dq}{dv + R dp} = \frac{d(u - Rq)}{d(v + Rp)}$$

conchidem potrivit ecuației (4) că

$$\frac{d(u - Rq)}{d(v + Rp)} = \frac{u - Rq}{v + Rp}.$$

Această ecuație pusă sub forma

$$\frac{d(u - Rq)}{u - Rq} = \frac{d(v + Rp)}{v + Rp}$$

ne dă prin integrațiune

$$\text{Log } \frac{u - Rq}{v + Rp} = \text{const.}$$

Deci raportul  $\frac{u - Rq}{v + Rp}$  este constant, ca și egalul sau  $\frac{X}{Y}$ . Rezultă că *direcția frecării este constantă*; pe de altă parte, in-

<sup>1)</sup> Componentele  $-Rq$  și  $Rp$  rezultă din aplicația formulelor generale  $qx' = ry'$ ,  $rx' = pz'$  făcând  $x' = y' = 0$  și  $z' = -R$  care sunt coordonatele punctului A.



*tensitatea ei este de asemenea constantă, căci ecuațiile (1) și (3) ne dau prin eliminarea lui Z,*

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = Mgf.$$

Vedem astfel că *centrul de greutate O' descrie o parabolă, de oarece el se mișcă ca un punct material izolat supus unei forțe constante. Parabola poate de altfel să se reducă la o dreaptă, dacă viteza inițială este în direcția forței.*

Acest rezultat poate fi verificat cu o bilă spoită cu alb și lansată pe un biliard așa fel ca bila să posede o mare alunecare inițială; se constată atunci forma parabolică a urmei lăsate pe postavul biliardului.

În vederea determinării celor opt necunoscute, să presupunem, pentru simplitatea formulelor, că axul  $Oy$  a fost ales așa fel ca direcția lui să coincidă cu aceea a vitezei inițiale pe care o are punctul de contact A. Atunci, componenta acestei viteze pe  $Ox$  fiind nulă, avem

$$u_0 - Rq_0 = 0$$

și, pentru că frecarea este direct opusă vitezei de alunecare și păstrează o direcție invariabilă,

$$X = 0, \quad Y = -Mgf.$$

Ca urmare, ecuațiile mișcării devin

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = -fg, \quad Z = Mg$$

$$K^2 \frac{dp}{dt} = -Rfg, \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Potrivit acestor ecuații, vedem mai întâi că cele trei cantități  $u$ ,  $q$ ,  $r$  rămân constante:

$$u = u_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0.$$

Deducem apoi prin integrațiune pentru  $v$  și  $p$ ,

$$v = v_0 - fgt, \quad p = p_0 - \frac{Rfg}{K^2} t.$$

Am determinat în felul acesta toate necunoscutele în funcție de condițiile inițiale ale mișcării.



Dacă voim ecuația proiecției traiectoriei centrului de greutate pe planul  $xOy$ , observăm, că însemnând prin  $a, b$ , coordonatele lui  $O'$ , ecuațiile

$$u = \frac{da}{dt} = u_0, \quad v = \frac{db}{dt} = v_0 - fgt$$

ne dau, dacă luăm ca origină poziția inițială a punctului  $A$ ,

$$a = u_0 t, \quad b = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2.$$

Ecuația în chestiune rezultă din eliminarea lui  $t$  între aceste două din urmă ecuații.

*Faza 2-a.* Viteza de alunecare a punctului de contact  $A$  are ca componente  $u - Rq$ ,  $v + Rp$ . Ori, avem

$$u - Rq = u_0 - Rq_0 = 0$$

$$v + Rp = v_0 - fgt + R(p_0 - \frac{Rfg}{K^2} t).$$

Cu sistemul particular de axe ce am ales, prima componentă este deci totdeauna nulă. Cealaltă este o funcție lineară de  $t$  care se anulează pentru valoarea

$$t' = \frac{K^2}{fg} \cdot \frac{v_0 + R p_0}{K^2 + R^2}.$$

Pentru  $t > t'$  mișcarea de alunecare va înceta de a se mai produce, căci dacă ar continua de a avea loc atunci viteza ei  $v + Rp$  ar trebui să schimbe de semn și ar dobândi același sens ca frecarea, ceea ce constituie o imposibilitate. *Mișcarea va fi deci o rostogolire* executată potrivit ecuațiilor (1), (2) cărora li se vor alătura cele două ecuații

$$(5) \quad u - Rq = 0, \quad v + Rp = 0$$

adică în total tot opt ecuații pentru determinarea celor opt necunoscute  $u, v; p, q, r; X, Y, Z$ .

*Ele dau pentru  $X$  și  $Y$  valori nule*, verificându-se astfel absența oricărei tendințe la alunecare. În adevăr, dacă eliminăm pe  $X$  și  $Y$  între ecuațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{du}{dt} + \frac{K^2}{R} \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} - \frac{K^2}{R} \frac{dp}{dt} = 0$$



și aceste ecuații, înlocuind pe  $\frac{dq}{dt}$  și  $\frac{dp}{dt}$  prin valorile deduse din ecuațiile (5), se reduc la

$$(6) \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

ceea ce potrivit ecuațiilor (1) conduce la rezultatul

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Cum ecuațiile (6) stabilesc că  $u$  și  $v$  rămân constanți, rezultă că începând dela momentul  $t'$  mișcarea centrului de greutate devine rectilină și uniformă.

Sensul acestei mișcări depinde de semnele componentelor  $u$  și  $v$  în momentul  $t'$  când încetează alunecarea. Ori, raportându-ne la studiul primei faze,  $u$  și  $v$ , în sistemul particular de axe, au în momentul  $t'$  valorile

$$u_0, \quad v_0 - fgt'$$

adică, înlocuind pe  $t'$  prin valoarea sa și pentru că  $u_0 - Rq_0 = 0$ ,

$$Rq_0, \quad \frac{R(Rv_0 - K^2 p_0)}{K^2 + R^2}.$$

Rezultanta acestor componente poate, după ordinea de mărime și semnele cantităților  $q_0$ ,  $v_0$ ,  $p_0$  să facă un unghi oarecare cu viteza inițială a centrului de greutate, ale cărei componente sunt  $Rq_0$ ,  $v_0$ . Se poate deci întâmpla ca după momentul  $t'$  sfera să continue de a înainta în sensul impulsiei primitive, sau să se întoarcă înapoi (efectul de *retro* la biliard) sau însfârșit să ia o direcție intermediară oarecare.

**Observațiune.** Cu începere din momentul  $t'$ , am spus că centrul de greutate al sferei dobândește o mișcare rectilină și uniformă, care ar fi să continue indefinit.

Asemenea rezultat se înțelege că nu se verifică în practică. Cauza este nu numai rezistența aerului, care se opune mișcării sferei și de care nu s'a ținut socoteală, dar totodată faptul că s'a neglijat rezistența la rostogolire, admitându-se că și pe timpul rostogolirei, fără alunecare punctul de contact mecanic a



rămas în coincidență cu punctul de contact geometric. Ori, asemenea presupunere nu permite de a ajunge la conclusiuni exacte.

Fără această presupunere, componentele  $u$  și  $v$  ale vitezei centrului de greutate n'ar fi constante, după cum nici componentele  $X$  și  $Y$  ale frecărei n'ar fi nule. Frecarea ar fi însă mai mică, bine înțeles, decât frecarea de alunecare  $Mgf$ .

## II. NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

### MISCAREA CENTRULUI DE GREUTATE. REZISTENȚA AERULUI. FRECĂRIILE LATERALE.

Problema mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate, constituie o foarte interesantă aplicație a teoriei mișcării unui solid în jurul unui punct fix. Pentru a înțelegi, ea este de o importanță considerabilă, întrucât, în mod direct, ea prezintă interes pentru studiul mișcării proiectilelor.

Nu ne putem însă ocupa de această chestiune fără a prezenta mai întâi toate considerațiile de ordin balistic pe care vom avea nevoie pentru rezolvirea ei.

Fie că se vor face în prezentul capitol.

Un proiectil lansat de o armă de foc se mișcă sub influența mișcării sale în aer. La acțiunea gravitației sale, la rezistența  $R$  a aerului și la frecările  $F$  ocazionale de scurgere aerului pe pereții săi. Determinarea mișcării proiectilului, precum și a direcției acestor forțe.

1. Variația lui  $y$  cu timpul. — Greutatea este o forță constantă. Mișcarea ei depinde însă de  $y$  care variază cu timpul. În calculele balistice se ține seama de această variație în felul următor.



## PARTEA V

# MIȘCAREA PROECTILULUI ÎN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

---

### I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

#### GREUTATEA. REZISTENȚA AERULUI. FRECĂRILE LATERALE. MIȘCAREA CENTRULUI DE GREUTATE.

Problema mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate, constituie o foarte interesantă aplicațiune la un caz concret a teoriei mișcării unui solid în jurul unui punct fix. Pentru artileriști, ea este de o importanță considerabilă, interesând în mod direct atât precizia tragerilor cât și construcția proiectilelor.

Nu ne putem însă ocupa de această chestiune fără a preciza mai întâi toate considerațiile de ordin balistic pe care vom sprijini rezolvirea ei.

Este ceea ce vom face în prezentul capitol.

\* \* \*

Un proiectil asvârlit de o gură de foc se găsește supus pe timpul mișcării sale în aer la acțiunea greutății sale  $mg$ , la rezistența  $R$  a aerului și la frecările  $F$  ocazionate de scurgerea aerului pe pereții săi. Determinarea mișcării proiectilului, pretinde ca să cunoaștem în fiecare moment al mișcării mărimea și direcția acestor forțe.

1. **Variația lui  $g$  cu altitudinea.** Greutatea este o forță cunoscută. Mărimea ei depinde însă de  $g$  care variază cu altitudinea. În calculele balistice se ține socoteală de această variație în felul următor.



Fie  $g_y$  și  $g_0$  valorile accelerației greutății la altitudinile  $y$  și  $0$ .  $R$  fiind raza pământului, avem potrivit legii atracțiunii universale

$$\frac{m g_y}{R^2} = \frac{m g_0}{(R + y)^2}$$

deci

$$g_y = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{y}{R}\right)^2} \quad \text{sau} \quad g_y = g_0 \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2}.$$

Data fiind micimea cantității  $\frac{y}{R}$ , putem lua din dezvoltarea lui  $\left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2}$  numai cei doi dintâi termeni, scriind

$$g_y = g_0 \left(1 - \frac{2y}{R}\right).$$

Însă termenii  $1$  și  $-\frac{2y}{R}$  sunt totdeodată primii doi termeni din dezvoltarea funcției  $e^{-\frac{2y}{R}}$ ; mai putem deci scrie, în aceeași ordine de aproximație,

$$g_y = g_0 e^{-\frac{2y}{R}}$$

de unde

$$\log g_y = \log g_0 - \frac{2y}{R} \log e.$$

Ori, pentru  $y = 730$ , avem

$$\frac{2y}{R} \log e = 0,0001.$$

Pentru a se ține seama de variația lui  $g$  cu altitudinea, se va micșora prin urmare  $\log g_0$  cu o unitate de al 4-lea ordin zecimal, de fiecare 730 metri ai altitudinii.

**2. Rezistența aerului.** Fie un element de suprafață  $d\sigma$  care se deplasează în aer paralel cu el însuși, într'o direcție  $CD$  perpendiculară acestui element.

Rezistența opusă de aer mișcării elementului, este perpendiculară pe element și depinde de suprafața  $d\sigma$ , de densitatea  $\Delta$  a aerului și de viteza  $v$  a deplasării. Cum experiența a dovedit, că pentru o suprafață plană rezistența este proporțională



cu densitatea aerului și cu suprafața, putem scrie, însemnând prin  $R_n$  rezistența pe elementul  $d\sigma$ :

$$R_n = d\sigma \cdot \Delta \cdot \psi(v)$$

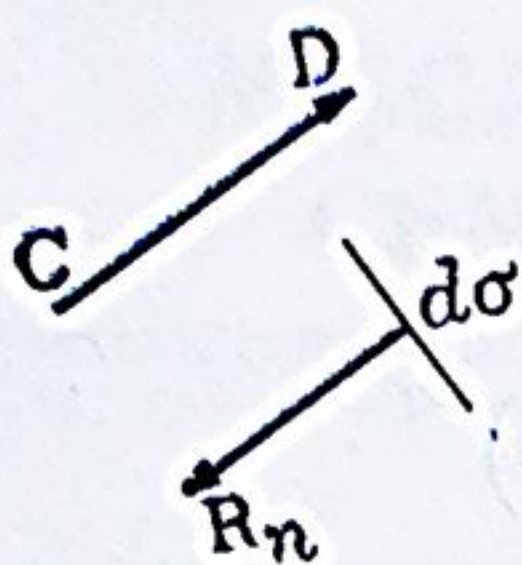


Fig. 219

$\psi(v)$  reprezentând o funcție de viteză.

Dacă direcția translației CD face un unghi  $\theta$  cu elementul  $d\sigma$ , se admite că rezistența perpendiculară acestui element, opusă de aer, este

$$R_\theta = d\sigma \cdot \Delta \cdot \psi(v) \cdot f(\theta)$$

$f(\theta)$  fiind o funcție crescătoare de  $\theta$ , care pentru  $\theta = 90^\circ$  este egală cu 1.

Ca urmare, dacă reprezentăm prin  $R_y$  proiecția lui  $R_\theta$  pe direcția translației, avem

$$R_y = R_\theta \sin \theta = d\sigma \cdot \Delta \cdot \psi(v) \cdot f(\theta) \sin \theta.$$

Să considerăm acum un proiectil ogival. Fie AB meridiană ogivei sale, raportată la axul Oy al proiectilului și la o perpendiculară Ox pe Oy din planul meridianei. Să presupunem că proiectilul se deplasează în aer în direcția axului său Oy. Atunci, numai ogiva suportă presiunea aerului.

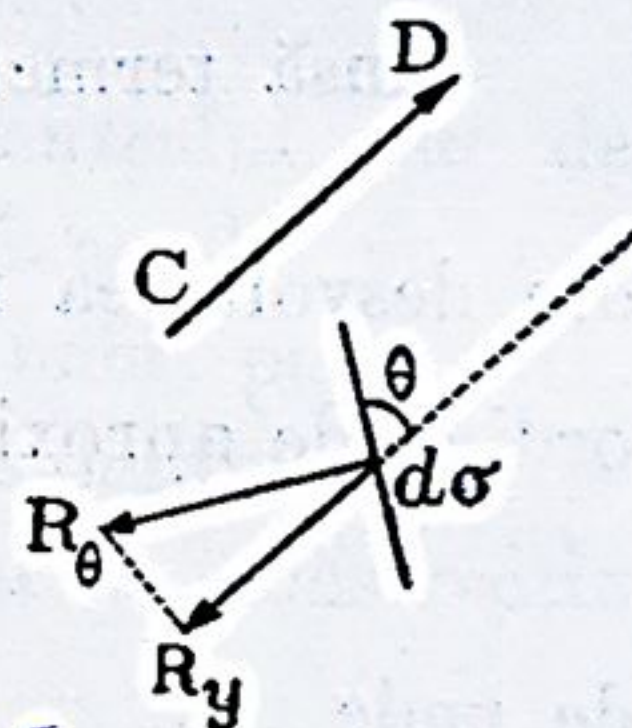


Fig. 220

Pe meridiană AB să considerăm un element MN de lungime  $ds$ . Prin învârtirea în jurul axului Oy, acest element naște o suprafață  $d\sigma$  egală cu  $2\pi x ds$ <sup>1)</sup>. Fie un element al acestei suprafețe de lungime  $ds$  și de lățime  $d\lambda$ . Rezistența paralelă cu Oy fiind aceeași pe toate elementele de acest fel în care se poate descompune  $d\sigma$ , rezistența pe suprafața  $d\sigma$  va fi

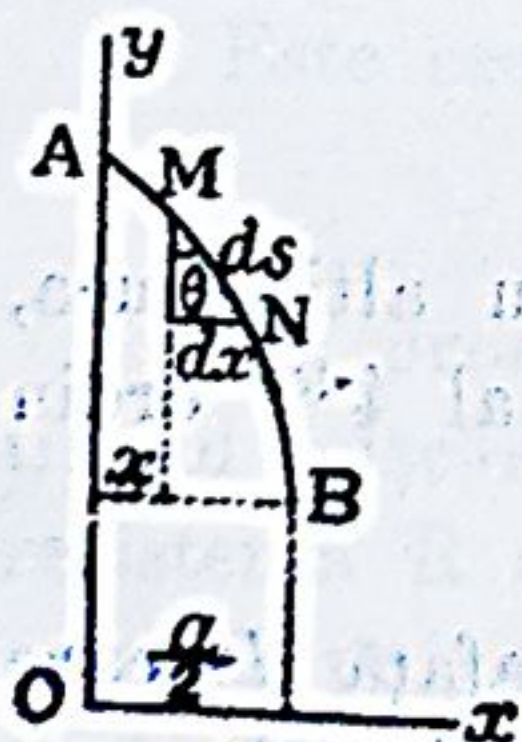


Fig. 221

$$R_y = 2\pi x ds \cdot \Delta \cdot \psi(v) \cdot f(\theta) \sin \theta$$

sau, pentru că  $ds \sin \theta = dx$ ,

$$R_y = 2\pi x dx \cdot \Delta \cdot \psi(v) \cdot f(\theta).$$

<sup>1)</sup> Suprafață de trunchi de con, egală după cum se știe cu  $\pi ds [x + (x + d\lambda)]$  adică, în valoare principală, suprafața cilindrică  $2\pi x ds$ .



Rezistența  $R_x$  a aerului pe  $d\sigma$  este nulă, căci componentele lui  $R_x$  sunt două câte două egale și direct opuse.

Așa dar, însemnând prin  $a$  calibrul proiectilului, rezistența totală  $R$  a aerului asupra ogivei are ca expresie

$$R = \pi \Delta \psi(v) \int_0^a d(x^2) f(\theta)$$

adică

$$R = \pi \Delta \psi(v) \frac{a^2}{4} f(\theta_m)$$

$\theta_m$  fiind o valoare intermediară a lui  $\theta$  în intervalul dela A la B. Dacă însfârșit punem  $f(\theta_m) = i$ , avem

$$R = \frac{\pi}{4} a^2 i \Delta \psi(v).$$

Accelerația corespunzătoare este

$$w = \frac{R}{\left(\frac{p}{g}\right)} = \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{p} g i \Delta \psi(v)$$

sau, punând  $\frac{\pi}{4} g \psi(v) = F(v)$ ,

$$(1) \quad w = \frac{a^2}{p} i \Delta F(v).$$

În această expresie a accelerației,  $i$  caracterizează forma proiectilului. I se zice *indice de formă*. Expresia sa  $i = f(\theta_m)$  arată, că pentru un calibru dat, el este cu atât mai mic cu cât ogiva proiectilului este mai alungită.

$\Delta$  este greutatea metrului cub de aer în punctul de altitudine  $y$ , unde se găsește proiectilul în momentul  $t$ , viteza sa fiind  $v$ . Punând

$$c = i \Delta \frac{a^2}{p}$$

expresia accelerației ia forma simplă

$$w = c F(v).$$

Valoarea  $c$  care cuprinde caracteristicile proiectilului se numește *coeficient balistic*. Acest coeficient nu este o constantă, căci el variază cu densitatea aerului.



Pentru înălțimile până la săgețile de cel mult 8.000 de metri, valoarea densității  $\Delta$ , pe care să o însemnăm la altitudinea  $y$  prin  $\Delta(y)$ , se calculează în mod practic prin formula

$$\Delta(y) = \Delta_0 \cdot e^{\frac{-y}{10.000}}$$

$\Delta_0$  fiind densitatea la suprafața pământului.

Rămâne să vorbim despre funcția  $F(v)$ . Pentru determinarea valorilor numerice ale acestei funcții, se procedează în felul următor:

Se execută o tragere orizontală și se măsoară vitezele  $v_1$  și



Fig. 222

$v_2$  ale proiectilului la distanțele  $x_1$  și  $x_2$  dela gura țeavii, luându-se  $x_1 = 50$  metri pentru ca viteza proiectilului să

nu mai fie influențată de împingerea gazelor care ies din țeavă, și  $x_2$  vecin de 400 metri, proiectilul mergând ca și în linie dreaptă pe această distanță.

Cum pe parcurs orizontal traviul greutății este nul, teorema forțelor vii ne dă relația:

$$-R dx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

sau, înlocuind pe  $R$  prin  $mw$ ,

$$-w dx = d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

și integrând dela  $x_1$  la  $x_2$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} w dx = -\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Insemnând prin  $w_m$  o valoare mijlocie a accelerației, putem scrie

$$w_m(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

de unde

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2 - x_1}.$$



Se admite că valoarea  $w_m$  astfel calculată, corespunde vitezei  $\frac{v_1 + v_2}{2}$ . Experiența se repetă de mai multe ori cu același proiectil însă cu viteze inițiale diferite, formându-se un tablou în care  $w_m$  se înseamnă prin  $w$  iar  $\frac{v_1 + v_2}{2}$  prin  $v$ . Acest tablou ne dă corespondența între  $v$  și  $w$ . Formula

$$(\alpha) \quad w = i \Delta_0 \frac{a^2}{p} F(v)$$

ne dă apoi valoarea numerică a lui  $i F(v)$  pentru diferitele valori ale vitezei  $v$ .

La poligonul dela *Gâvre*, din Franța, s'au făcut altă dată asemenea experiențe cu trei principale tipuri de proiectile și s'a constatat, că dacă se divid valorile  $i F(v)$  obținute la aceste experiențe prin sinusul semi-unghiului ogival  $\gamma$  al proiectilului respectiv, raportul

$$\frac{i F(v)}{\sin \gamma}$$

are aceiași valoare pentru toate cele trei tipuri de proiectile experimentate, la egalitate de viteză.

Punând atunci

$$\frac{i F(v)}{\sin \gamma} = \varphi(v)$$



Fig. 223

$\varphi(v)$  fiind zisă *funcția dela Gâvre*, s'a conchis, că pentru ori-ce alt proiectil de formă apropiată celor trei forme experimentate, valorile  $i F(v)$  corespunzătoare proiectilului sunt egale cu valorile  $\varphi(v)$  înmulțite cu sinusul semi-unghiului său ogival  $\gamma$ . S'a luat deci  $F(v) = \varphi(v)$  și  $i = \sin \gamma$ .

Formele moderne de proiectile, cu ogiva mult mai alungită și cu partea de dinapoi tronconică, nu se mai conformează acestei legi simple. Se înțelege de altfel, că de oare-ce rezistența  $R$  depinde de forma particulară a proiectilului, fiecare formă de proiectil are funcția sa proprie de rezistență. În practică, se admite totuși, că diferitele funcții  $i F(v)$  se deduc tot din funcția  $\varphi(v)$  înmulțită cu un coeficient  $i$ , indicoele de formă, care



pentru proiectilele actuale poate totdeauna să fie luat egal cu un sinus :

$$i = \sin \gamma_m$$

unghiul  $\gamma_m$  fiind însă atunci un semi-unghiul ogival *fictiv*.

Această valoare a lui  $i$  se determină printr'o tragere de experiență la fel cu celelalte, din care rezultă două valori numerice pentru  $v$  și  $w$ . Tabla  $F(v)$  dându-ne atunci valoarea acestei funcții care corespunde lui  $v$ , formula (a) în care înlocuim pe  $w$  și  $F(v)$  prin valorile lor numerice ne procură pe  $i$ . Dacă facem mai multe asemenea experiențe, se constată că  $i$  variază puțin cu viteza, așa că nu este tocmai o constantă după cum se admite.

În lipsă de experiență, se poate obține o valoare aproximativă pentru  $i$  utilizând formula empirică :

$$\log i = 1,800 - 0,45 \log (h + 1,25 h')$$



Fig. 224

$h$  și  $h'$  fiind, respectiv, înălțimile evaluate în calibre a ogivei și a părții tronconice de dinapoi a proiectilului.

Pentru proiectilele actuale, valorile lui  $i$  sunt cuprinse între 0,3 și 0,7.

În ceea ce privește funcția  $F(v)$ , alături generală a curbei sale reprezentative este aceea a unei parabole când  $v$  variază de la 0 la 300 m/s și a unei drepte pentru  $v > 300$  m/s.

S'a căutat să se dea funcției  $F(v)$  și forme analitice. Dintre acestea, sunt mai ales de reținut următoarele două:

$$F(v) = 0,13 v^2 \quad \text{pentru } v < 300 \text{ m/s}$$

$$F(v) = 400 (v - 260) \quad \text{pentru } v > 300 \text{ m/s}$$

ceea din urmă fiind datorită Generalului Chapel, care a mai indicat și formula

$$F(v) = K (A + \sin \varphi) v^2$$

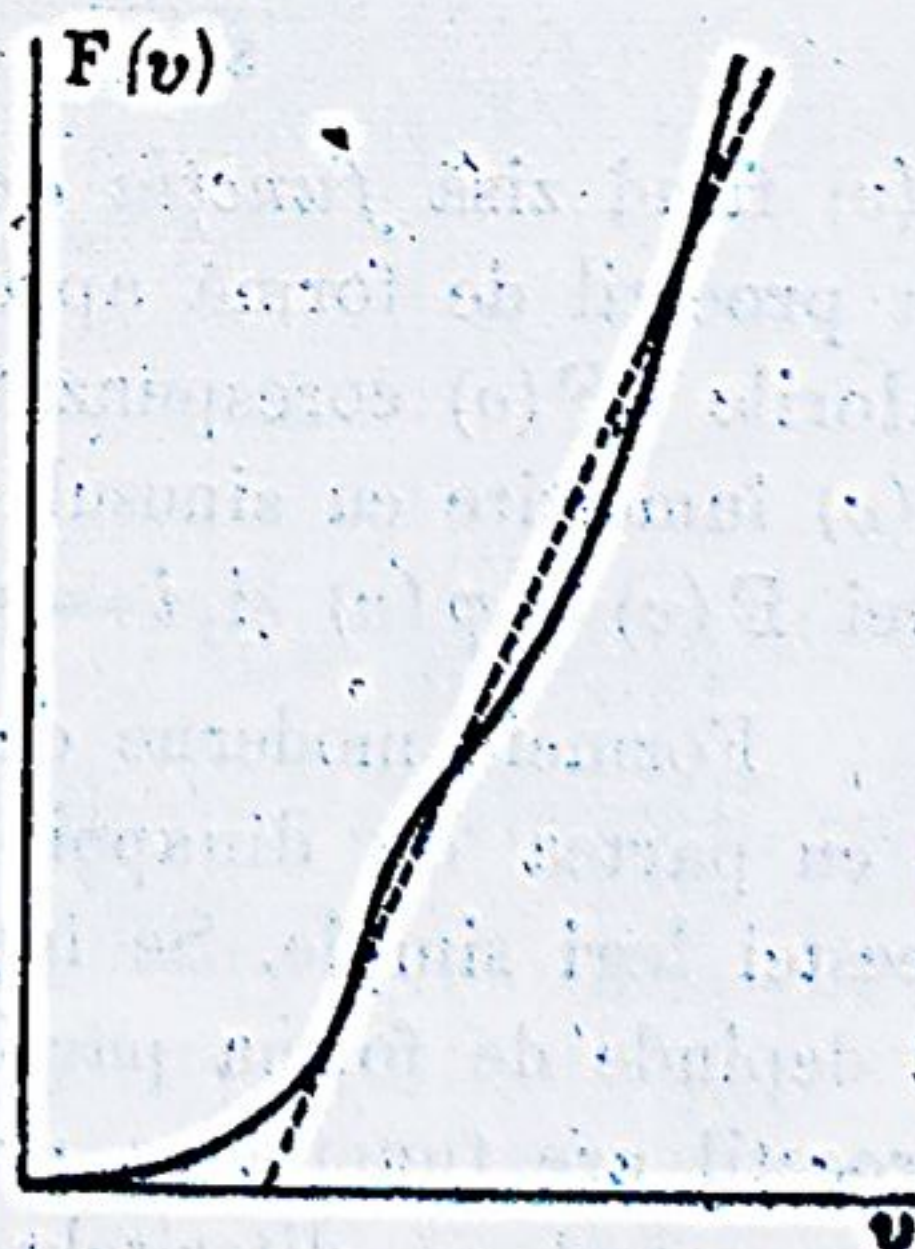


Fig. 225



$$\text{cu } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{v - 320}{140}, \quad A = 1,89, \quad K = 0,13713$$

care se aplică pe toată întinderea funcției  $F(v)$ .

În unele calcule, în loc de funcția  $F(v)$  se utilizează funcția

$$f(v) = \frac{F(v)}{v^2}.$$

Curba reprezentativă a acestei funcții are un punct de inflexiune pentru  $v = 340 \text{ m/s}$  și un maximum pentru  $v = 468 \text{ m/s}$ .

Ca unități de măsură în calculele balistice, se ia metrul, kilogramul și secunda.

**Notă.** Valorile coeficientului balistic

$$c = i \Delta \frac{a^2}{p}$$

sunt cuprinse între  $10^{-4}$  și  $10^{-4} \cdot 20$ .

Servindu-ne de aceste valori, putem să ne dăm seama de importanța rezistenței aerului.

Să presupunem spre exemplu că  $v = 500 \text{ m/s}$  și  $c = 10^{-4}$ . Potrivit formulei lui *Chapel*, avem

$$w = c F(v) = 10^{-4} \cdot 400 (500 - 260) = 9,6.$$

Așa dar accelerația rezistenței aerului este de aceeași ordine de mărime ca accelerația gravitației.

Să luăm însă  $v = 500 \text{ m/s}$  și  $c = 10^{-4} \cdot 8$  ceea ce corespunde aproximativ unora din vechile proiectile de 75 m.m.; obținem atunci

$$w = c F(v) = 76,8.$$

Accelerația este deci în acest caz de opt ori mai mare decât accelerația gravitației.

**3. Frecările aerului.** Să considerăm ca și mai sus un proiectil care se deplasează în aer în direcția axului său. Rezistența opusă de aer înaintării acestui proiectil este datorită nu numai presiunii aerului asupra ogivei, dar și frecărilor ocazionate de scurgerea aerului pe meridianele proiectilului.

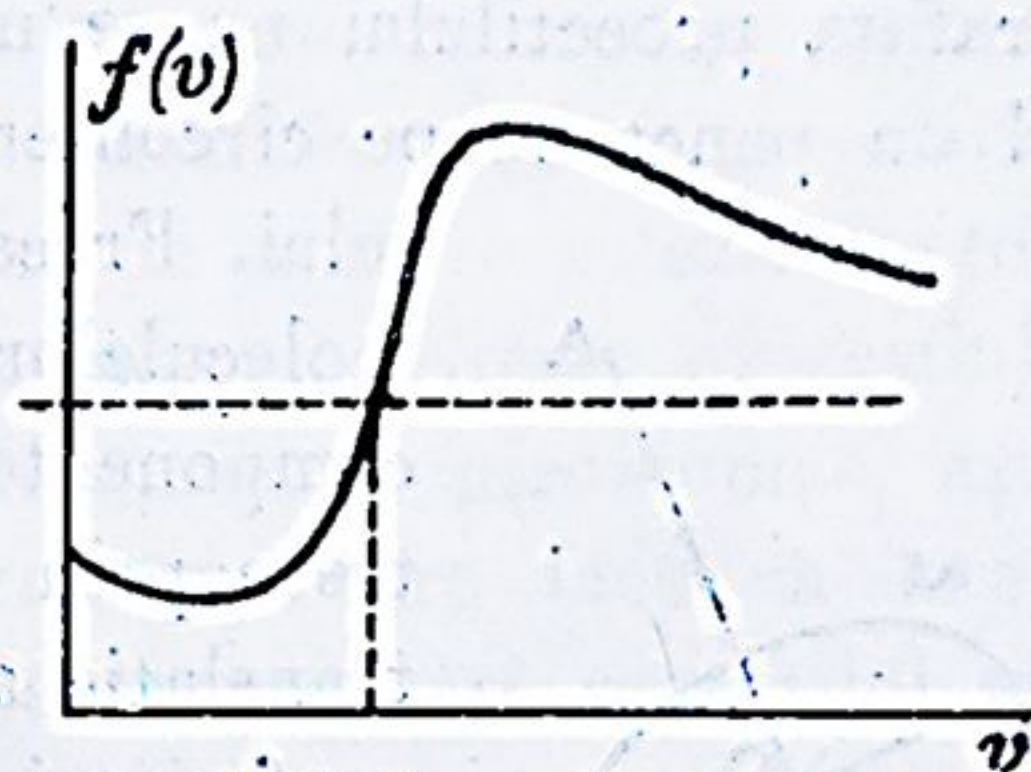


Fig. 226



Dacă proiectilul este animat de o simplă mișcare de translație, rezultanta acestor frecări este evident îndreptată pe linia axului proiectilului și valoarea sa intră în funcția experimentală  $F(v)$  care totalizează astfel presiunea aerului asupra proiectilului și frecările longitudinale.

Dacă proiectilul este însă animat și de o viteză de rotație în jurul axului său, atunci scurgerea moleculelor de aer pe suprafața proiectilului nu se mai face în direcția meridianelor. Fie  $M$  un punct de pe circumferința unei secțiuni drepte a proiectilului.

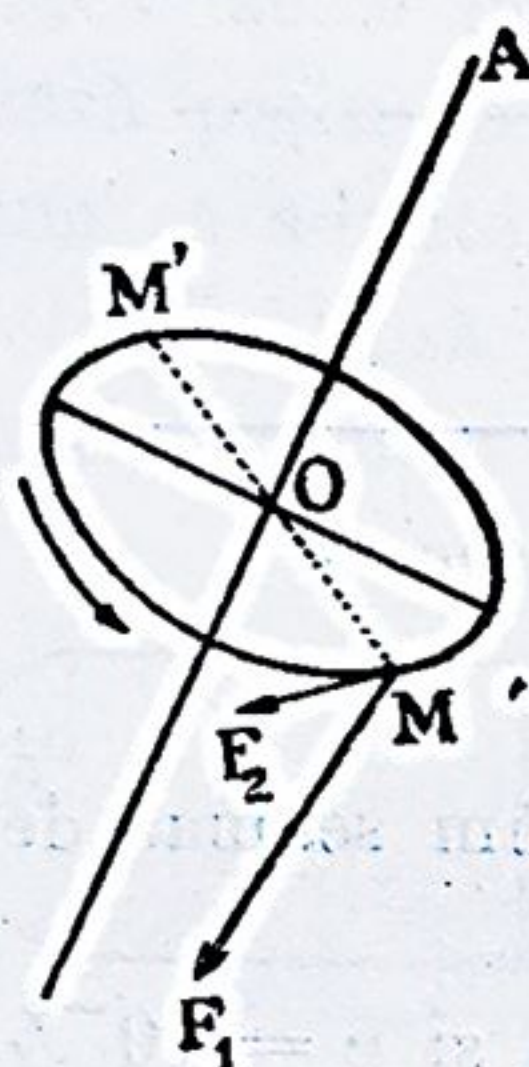


Fig. 227

Frecarea din  $M$  ocazionată de scurgerea moleculelor de aer, se poate descompune în două componente: una  $F_1$  tangentă meridianei care trece prin  $M$  și depinzând de simpla mișcare de translație a proiectilului și alta  $F_2$  tangentă circumferinței secțiunii drepte, îndreptată în sensul contrariu al rotației proiectilului și depinzând numai de această rotație.

Frecările longitudinale  $F_1$  dau, după cum am mai spus, o rezultantă care intră în valoarea funcției experimentale  $F(v)$ . Cele laterale  $F_2$  formează două câte două un cuplu, al cărui ax coincide cu acela al proiectilului, așa că rezultanta acestor cupluri este un cuplu având ca ax tot axul proiectilului. Acest cuplu rezultat este fără efect asupra mișcării centrului de greutate; el tinde numai a micșora într-o câțva viteză de rotație a proiectilului în jurul axului său de figură. Viteza aceasta este însă așa de mare că influența cuplului asupra ei este ca și neglijabilă<sup>1)</sup>.

**4. Cum se pune problema mișcării proiectilului în aer.** La începutul mișcării sale în aer, proiectilul asvârlit de o gură de foc se găsește animat de o viteză de translație  $v_0$  în direcția prelungirii axului țevii și de o viteză unghiulară de rotație  $\omega$  în jurul propriului său ax.

<sup>1)</sup> Pentru tunurile de câmp de 75 m. m. valoarea vitezei unghiulare de rotație a proiectilului în jurul axului său este de cel puțin 700 m/s.



Pe un parcurs de câteva sute de metri, traectoria centrului său de greutate  $G$  este ca și rectilină, axul  $GA$  al proiectilului coincidând sensibil pe acest parcurs cu direcția  $GT$  a vitezei inițiale  $v_0$ . Apoi, din cauza greutateii, curbura traectoriei centrului de greutate accentuându-se, tangenta  $GT$  se înclină pe orizont așa că direcția ei ajunge a forma un unghi  $\theta$  cu axul proiectilului. De îndată ce unghiul  $\theta$  ia naștere, rezistența aerului  $R$  devine oblică față de ax. Ea n'ar întârzia să dea proiectilul peste cap dacă acesta n'ar fi animat de o mare viteză de rotație în jurul axului său. Din cauza acestei viteze, proiectilul, sub efectul rezistenței  $R$ , ia o anumită mișcare giroscopică, așa după cum se va vedea în capitolul următor, care face ca axul său să nu se depărteze prea mult de tangentă și proiectilul să cadă astfel la pământ cu vârful înainte <sup>1)</sup>.

Fie, într'un moment oarecare,  $AGT$  poziția planului format de ax și tangentă. Din cauza unghiului  $\theta$ , rezistența aerului nu mai este aceeași pe meridianele proiectilului. În lungul meridianei  $SNPQ$  dinspre partea tangentei  $GT$ , ea este evident mai mare decât pe meridiană opusă  $SKLM$ , însă, în două puncte simetrice față de planul  $AGT$  rezistențele sunt egale și simetrice așezate, așa că rezultanta lor este o forță conținută în acest plan. *Rezultanta generală a presiunilor aerului asupra pereților proiectilului este deci o forță  $R$  conținută în planul  $AGT$  numit plan de rezistență.* Punctul  $C$  unde forța  $R$  întâlnește axul  $GA$  se numește *centru de rezistență*.

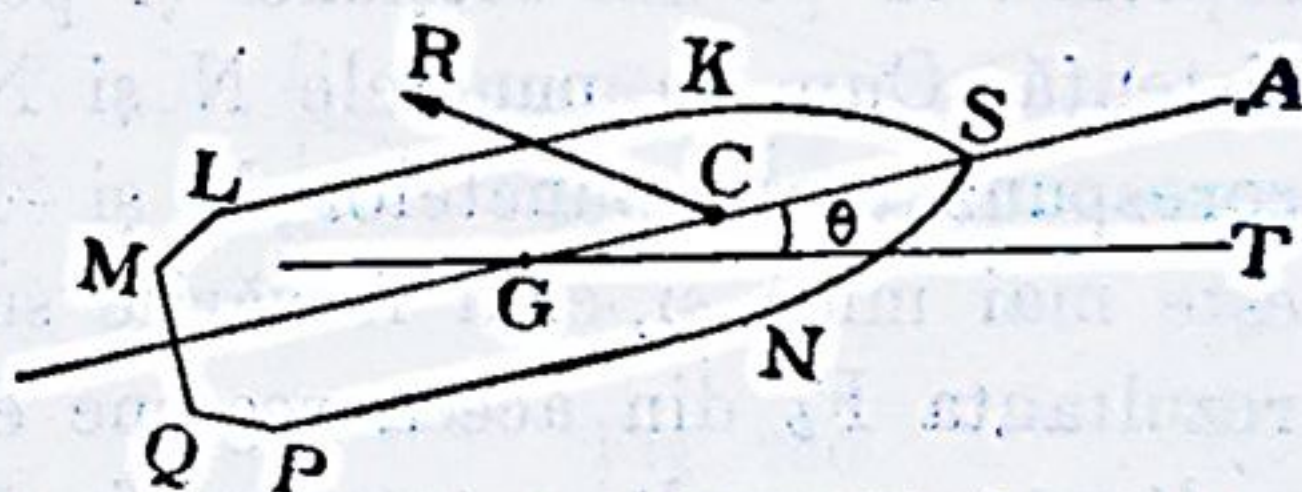


Fig. 228

Să trecem acum la chestia frecărilor. Considerând o secțiune dreaptă a proiectilului de centru  $O$ , fie:  $M$  un punct de pe circumferința secțiunii,  $F_1$  frecarea tangențială a moleculelor de aer din  $M$  pe suprafața proiectilului care ar înainta fără a se

<sup>1)</sup> Aceasta însă numai în tragerile obișnuite de artilerie, iar nu și în acelea prea vecine de verticală.



învârti și  $F_2$ , frecarea moleculelor tangentă circumferinței în ipoteza că proiectilul s'ar învârti stând pe loc.

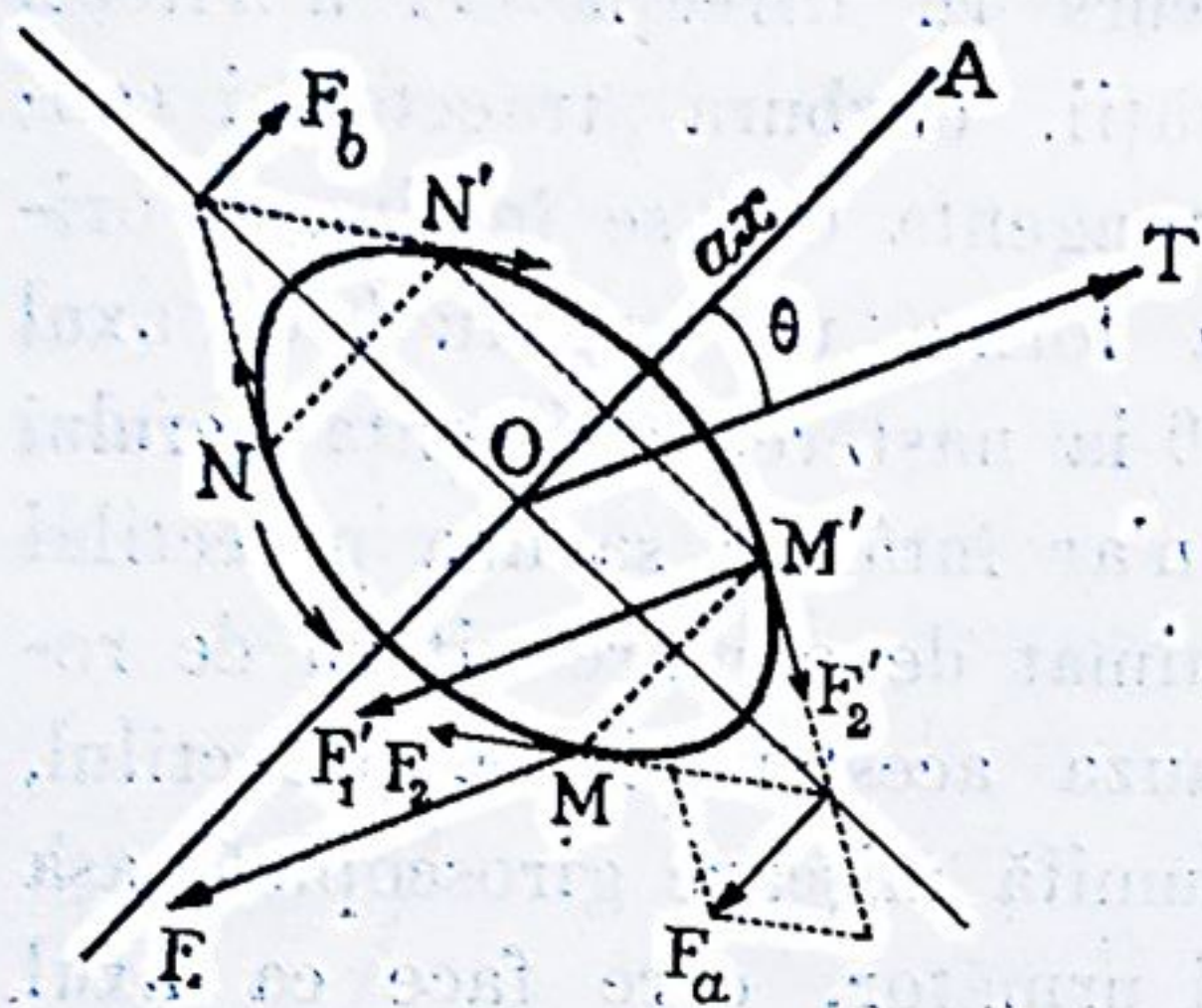


Fig. 229

În punctul  $M'$ , simetricul lui  $M$  în raport de planul de rezistență, frecarea  $F'_1$  este egală cu  $F_1$  și simetrică față de acest plan, așa că rezultanta lor este cuprinsă în planul de rezistență. Toate aceste frecări longitudinale dau prin urmare o rezultantă generală cuprinsă în planul de rezistență, a cărei valoare intră în valoarea rezistenței aerului  $R$ .

Frecarea  $F'_2$  din punctul  $M'$  este egală ca mărime cu  $F_2$  și simetrică față de planul de rezistență cu  $F_2$  luată în sens contrariu. Rezultanta frecărilor  $F_2$  și  $F'_2$  este deci o forță  $F_a$  cuprinsă în planul secțiunii și perpendiculară pe planul de rezistență. Cum în punctele  $N$  și  $N'$  de pe spinarea proiectilului, corespunzătoare punctelor  $M$  și  $M'$  din față, presiunea aerului este mai mică și, cum frecările sunt proporționale cu presiunile, rezultanta  $F_b$  din aceea regiune este mai mică decât  $F_a$ . *Rezultanta generală a tuturor frecărilor laterale este deci o forță  $F$  perpendiculară pe planul de rezistență și aplicată într'un punct al acestui plan situat față de ax de aceeași parte ca tangenta.* Această rezultantă este de altfel cu atât mai mare, cu cât unghiul  $\theta$  este el însuși mai mare, de oare-ce  $\theta$  crescând frecările  $F_a$  cresc pe când frecările  $F_b$  se micșorează.

În ceea ce privește sensul vectorului reprezentativ al forței  $F$ , se va ține socoteală, că dacă după cum este cazul figurei, rotația proiectilului are loc dela dreapta la stânga, observatorul culcat pe acest vector, transportat paralel cu el însuși în centrul de greutate  $G$ , ca origină, trebuie să vadă rotația care aduce pe  $GA$  peste  $GT$  dela stânga la dreapta; el trebuie din potrivă să vadă această rotație ca având loc dela dreapta la stânga, dacă proiectilul se învârteste dela stânga la dreapta.



Potrivit teoriei generale a mișcării unui solid liber, determinarea mișcării unui proiectil în aer depinde de integrațiunea unui sistem de șase ecuații diferențiale de ordinul al doilea, dintre care trei corespund la mișcarea centrului de greutate  $G$  sub acțiunea greutății  $mg$  și a celor două forțe  $R$  și  $F$  transportate paralel cu ele însăși în punctul  $G$ , iar celelalte trei corespund la mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate sub acțiunea forțelor  $R$  și  $F$ . Problema luată astfel ar fi însă foarte complicată. Ea se simplifică în felul următor:

a). Pentru determinarea mișcării centrului de greutate, se neglijează forța  $F$ . Rămân atunci aplicate în  $G$  numai cele două forțe  $mg$  și  $R$ . Forța  $R$  se descompune apoi în planul de rezistență în componenta  $R_t$  de pe direcția tangentei  $GT$  și în componenta  $R_n$  perpendiculară pe această direcție. Cum experiențele de tragere au dovedit că unghiul  $\theta$  dintre axul  $GA$  al proiectilului și tangenta  $GT$  rămâne totdeauna mic, unghiul pe care îl formează direcția rezistenței  $R$  cu tangenta este și el mic, așa că forța  $R_t$  este ca și egală cu  $R$ . În consecință, se studiază mai întâi mișcarea centrului de greutate  $G$  sub acțiunea greutății  $mg$  și a rezistenței experimentale  $R_t$  și pe urmă se determină influența pe care o are asupra acestei mișcări componente  $R_n$  a rezistenței.

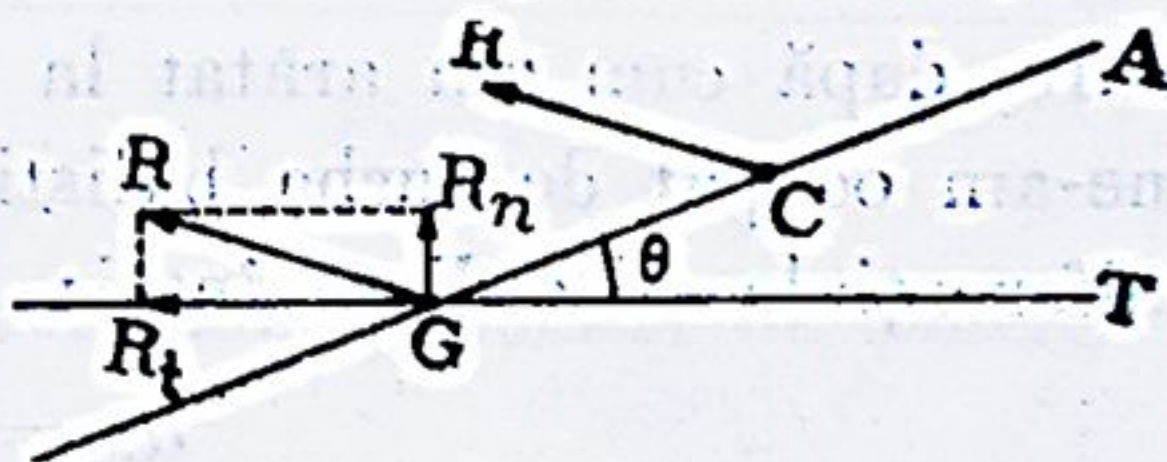


Fig. 230

Sub acțiunea forțelor  $mg$  și  $R_t$ , centrul de greutate  $G$  descrie o traiectorie coprinsă în planul proiectant vertical al vitezei inițiale  $v_0$ . Forța  $R_n$  tinde ca să scoată pe  $G$  din acest plan, dând naștere prin componenta ei orizontală, perpendiculară pe tangentă, la abaterea zisă *Derivațiunea*<sup>1)</sup>. Cum însă poziția forței  $R_n$  depinde de orientarea în spațiu a planului de rezis-

<sup>1)</sup> Cealaltă componentă a forței  $R_n$ , perpendiculară pe tangentă și coprinsă în planul vertical al traiectoriei, are un efect ca și nul asupra mișcării centrului de greutate, fiind succesiv orientată și la scurte intervale de timp, când deasupra când dedesubtul tangentei, după cum vom arăta la capitolul *Derivațiunii proiectilelor*.



tență A GT în care se află ea coprinsă, studiul derivațiunii se face în urma aceluia al mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate, care precizează variația de poziție a planului A GT în cursul mișcării proiectilului în aer.

b) După studiul mișcării centrului de greutate, se trece la acela al mișcării proiectilului în jurul acestui centru sub simpla acțiune a rezistenței  $R$  din punctul C. Se determină apoi influența forței  $F$  asupra acestei mișcări.

**5. Ecuațiile generale ale mișcării centrului de greutate.** Centrul de greutate mișcându-se ca un punct material de greutate  $mg$  supus unei rezistențe tangențiale  $R = mc F(v)$ , ecuațiile diferențiale ale mișcării sale sunt:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - mc F(v) \cos \tau$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - mc F(v) \sin \tau - mg$$

care, după cum am arătat la pag. 80 a Cursului nostru unde ne-am ocupat de curba balistică, revin la următoarele 4 ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$dx = v \cos \tau dt$$

$$dy = v \sin \tau dt$$

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau$$

$$v d\tau = -g \cos \tau dt.$$

Ecuația a treia poartă după cum știm numele de *ecuația hodografului*. Dacă  $F(v)$  ar fi o funcție analitică iar coeficientul

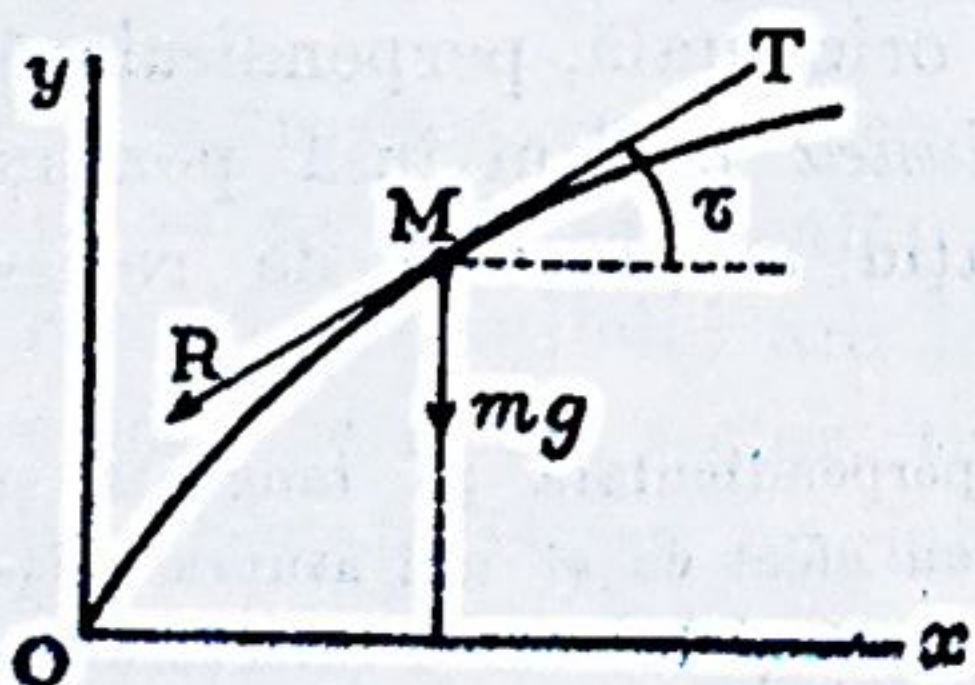


Fig. 281

balistic  $c$  o constantă, integrațiunea sistemului de ecuații s'ar face integrând mai întâi ecuația hodografului care nu ar conține decât variabilele  $v$  și  $\tau$ . În realitate însă, funcția  $F(v)$  nu este cunoscută decât prin valorile sale numerice iar coeficientul  $c$  știm că depinde de densitatea  $\Delta$  a aerului și prin urmare de alti-



tudinea  $y$ . În asemenea condiții, integrațiunea sistemului, după regulile obișnuite de calcul, dă loc la mari dificultăți.

Pentru evitarea acestora, s'au propus diferite metode de rezolvare, lipsite ce este drept de rigurozitate matematică, dar conducând totuși la rezultate suficient de satisfăcătoare pentru trebuințele practicei artileristice. Dintre aceste metode, aceea care se poate aplica în toate cazurile de trageri și dă rezultatele cele mai precise este metoda zisă a integrațiunii pe arcuri succesive.

#### 6. Calculul traectoriilor prin metoda integrațiunii pe arcuri succesive.

În această metodă, curba balistică, cu începere din origina  $O$ , se divide în arcuri a căror amplitudine  $\tau_1 - \tau_2$  nu trece de 3 grade și se calculează succesiv prin cuadraturi elementele extremităților fiecăruia dintre aceste arcuri până când se ajunge prin încercări la un  $y$  nul, care corespunde punctului de cădere al proiectilului.

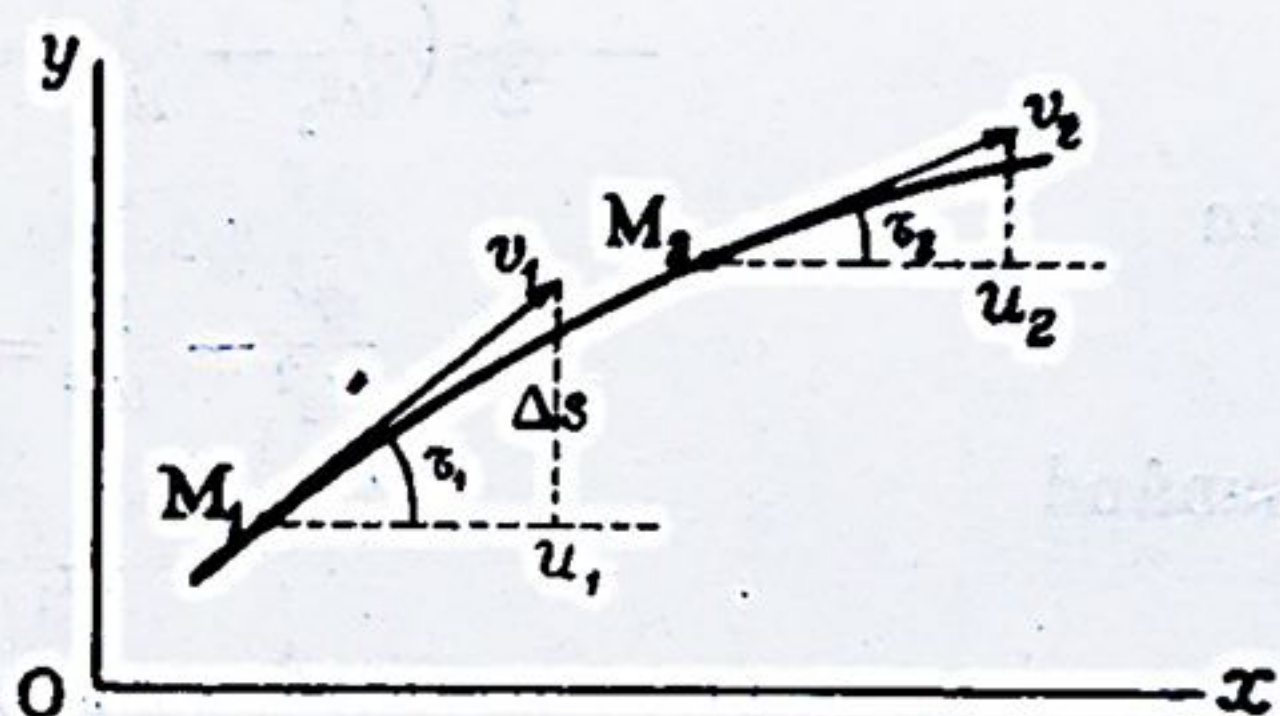


Fig. 232

Iată cum se aplică această metodă în Franța, la poligonul dela Gâvre.

Se asimilează pe întinderea arcului de calculat funcția  $F(v)$  cu forma analitică  $\beta v^2$ . Scriind atunci

ecuația hodografului

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau$$

devine, punând  $v \cos \tau = u$ ,<sup>1)</sup>

$$du = \frac{c}{g} \beta v^3 d\tau$$

sau încă

$$du = \frac{c}{g} \beta \frac{u^3}{\cos^3 \tau} d\tau.$$

<sup>1)</sup> După cum s'a văzut la pag. 80, viteza orizontală  $u$  descrește ne-  
conținut.



Productul  $c\beta$  nu este o constantă, căci  $c$  depinde de  $y$  iar  $\beta$  este numărul variabil care înmulțit cu  $v^2$  reproduce valoarea numerică  $F(v)$ . În lungul unui arc  $M_1 M_2$  se consideră totuși acest produs ca fiind constant și egal în consecință cu o valoare mijlocie care se determină așa după cum vom arăta mai departe. Punând deci  $c\beta = b$ , avem

$$\frac{du}{u^3} = \frac{b}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

de unde, considerând pe  $b$  constant și integrând dela  $\tau_1$  la  $\tau_2$ ,

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2} \right) = \frac{b}{g} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

sau

$$\frac{g}{u_2^2} - \frac{g}{u_1^2} = 2bA$$

punând

$$A = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

Pentru valorile  $A$  există table numerice. Scriind pentru prescurtare

$$\frac{g}{u^2} = U$$

obținem astfel egalitatea

$$U_2 = U_1 + 2bA$$

care ne dă pe  $v_2$  dacă se cunoaște  $v_1$  din calculele anterioare.

Trebue să mai determinăm pe  $x_2$ ,  $y_2$  și  $t_2$  care corespund punctului  $M_2$ , adică creșterile  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  și  $\Delta t$ . Pentru aceasta se determină mai întâi lungimea  $\Delta s$  a arcului  $M_1 M_2$ , care ne va servi, după cum se va vedea, la calculul celor trei creșteri.

Ori, plecând dela ecuația

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c F(v) \cos \tau = -bv^2 \cos \tau$$

pe care o putem scrie

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = \frac{du}{dt} = -b v \frac{u}{\cos \tau} \cos \tau$$



adică

$$\frac{du}{dt} = -bv u$$

sau

$$\frac{du}{u} = -bv dt = -b ds$$

avem, integrând dela  $u_1$  la  $u_2$ ,

$$\text{Log} \frac{u_1}{u_2} = b \Delta s$$

de unde

$$\Delta s = \frac{1}{b} \text{Log} \frac{u_1}{u_2}.$$

Însă, potrivit egalității  $g = u^2 U$ , avem

$$2 \text{Log} \frac{u_1}{u_2} = \text{Log} \frac{U_2}{U_1}$$

deci

$$\Delta s = \frac{1}{2b} \text{Log} \frac{U_2}{U_1}$$

sau, trecând la logaritmi zecimali,

$$\Delta s = \frac{1}{2b \log e} \cdot \log \frac{U_2}{U_1}.$$

Aceasta este formula care dă pe  $\Delta s$ . Pentru calculul lui  $\Delta x$  și  $\Delta y$ , plecăm dela egalitățile

$$dx = ds \cdot \cos \tau, \quad dy = ds \sin \tau$$

care ne dau, însemnând prin  $\lambda$  și  $\mu$  valorile mijlocii ale lui  $\cos \tau$  și  $\sin \tau$  în intervalul dela  $\tau_1$  la  $\tau_2$ ,

$$\Delta x = \lambda \Delta s, \quad \Delta y = \mu \Delta s$$

cu

$$\lambda = \frac{1}{2} (\cos \tau_1 + \cos \tau_2), \quad \mu = \frac{1}{2} (\sin \tau_1 + \sin \tau_2).$$

Însfârșit, egalitatea

$$ds = v dt$$

ne dă, în aceeași ordine de aproximație,

$$\Delta s = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \Delta t$$

de unde

$$\Delta t = 2 \frac{\Delta s}{v_1 + v_2}.$$



Aşa dar, plecând dela unghiul de tragere  $\tau_0$  şi viteza iniţială  $v_0$  şi luând o amplitudine de cel mult 3 grade, elementele extremităţii arcului respectiv, adică elementele

$$v_2, \quad \Delta s, \quad \Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta t$$

se vor calcula prin formulele

$$U_2 = U_1 + 2 b A$$

$$\Delta s = \frac{1}{2 b \log e} \cdot \log \frac{U_2}{U_1}$$

$$\Delta x = \lambda \Delta s, \quad \Delta y = \mu \Delta s$$

$$\Delta t = 2 \frac{\Delta s}{v_1 + v_2}$$

unde

$$v_1 = v_0, \quad \tau_1 = \tau_0, \quad \tau_2 = \tau_0 - 3$$

$$A = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\pi}{\cos^3 \tau}$$

şi aşa mai departe.

Toate aceste calcule se bazează pe valoarea atribuită factorului  $b$ . Această valoare se ia egală cu aceea pe care o dă egalitatea.

$$b = c \beta = i \Delta(y) \frac{a^2}{p} f(v) \quad \left[ f(v) = \frac{F(v)}{v^2} \right]$$

în care facem

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Cum însă nu cunoaştem nici pe  $y_2$  nici pe  $v_2$ , se procedează prin încercări în felul următor:

Se ia mai întâi  $y_2 = y_1$  şi  $v_2 = v_1$  deci

$$b' = i \Delta(y_1) \frac{a^2}{p} f(v_1)$$

şi cu această valoare executându-se calculele de mai sus, se obţin pentru  $y_2$  şi  $v_2$  două valori  $y_2'$  şi  $v_2'$ . Se ia apoi

$$y = \frac{y_1 + y_2'}{2}, \quad v = \frac{v_1 + v_2'}{2}$$

şi prin urmare

$$b'' = i \Delta \left( \frac{y_1 + y_2'}{2} \right) \frac{a^2}{p} f \left( \frac{v_1 + v_2'}{2} \right)$$



și cu această nouă valoare a lui  $b$  repetându-se aceleași calcule, se ajunge la două alte valori  $y_2''$  și  $v_2''$ . Dacă s'a găsit că  $y_2'' = y_2'$  și  $v_2'' = v_2'$ , atunci valoarea definitivă a lui  $b$  este  $b''$ . Dacă nu, atunci se continuă aceleași operații până se obțin asemenea egalități. În general, acest rezultat apare după vreo 3 sau 4 operații.

Densitatea aerului  $\Delta(y)$  se calculează după cum am spus la pag. 424 prin formula

$$\Delta(y) = \Delta_0 \cdot e^{\frac{-y}{10.000}}.$$

Însfârșit, cum în formula  $U_2 = U_1 + 2bA$  intră valoarea lui  $g$ , se ține socoteală de variația lui  $g$  cu altitudinea așa după cum s'a arătat la pag. 421.

**Notă.** Această metodă de calcule comportă două feluri de erori. Una, datorită faptului că se presupune  $b$  constant în lungul unui arc și aceasta are influență asupra determinării vitezei  $v_2$  și deci și asupra celorlalte elemente; a doua, că se determină creșterile  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  și  $\Delta t$  ca și cum arcul  $\Delta s$  ar fi un element rectilin.

În practică însă, eroarea rezultantă este slabă dacă  $\log b$  nu variază cu mai mult de 0,02 când se trece de la un arc la următorul și dacă amplitudinea arcului este de cel mult 3 grade. Precizia este bună dacă diferența de viteze  $v_2 - v_1$  nu trece de:

20 la 30 m.	pentru	$v < 500$ m.
80 m.	"	$500 < v < 800$ m.
150 m.	"	$v > 800$ m.



## II. MIȘCAREA PROECTILULUI IN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

Fie într'un moment oarecare,  $GT$  tangenta traectoriei centrului de greutate al unui proiectil și  $O$  punctul situat pe această tangentă la o distanță egală cu unitatea de punctul  $G$ . Prin punctul  $O$  să ducem un plan  $P$  perpendicular pe tangentă și să ne închipuim că acest plan rămâne solidar tangentei pe tot timpul cât se mișcă proiectilul în aer.

În planul  $P$  să considerăm două axe dreptunghiulare  $Ou$  și  $Ov$ , dintre care  $Ou$  orizontal și îndreptat spre dreapta planului vertical al traectoriei pe care este perpendicular, iar  $Ov$  coprins în acest plan vertical și îndreptat în sus. Fie  $M$  punctul unde axul  $GA$  al proiectilului, prelungit, întâlnește planul  $P$ .

În capitolul de față ne vom ocupa cu studiul mișcării punctului  $M$  în raport de axele  $Ou$  și  $Ov$ . Cunoașterea acestei mișcări lămurește, după cum se înțelege, mișcarea însăși a axului proiectilului în jurul tangentei și deci mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate.

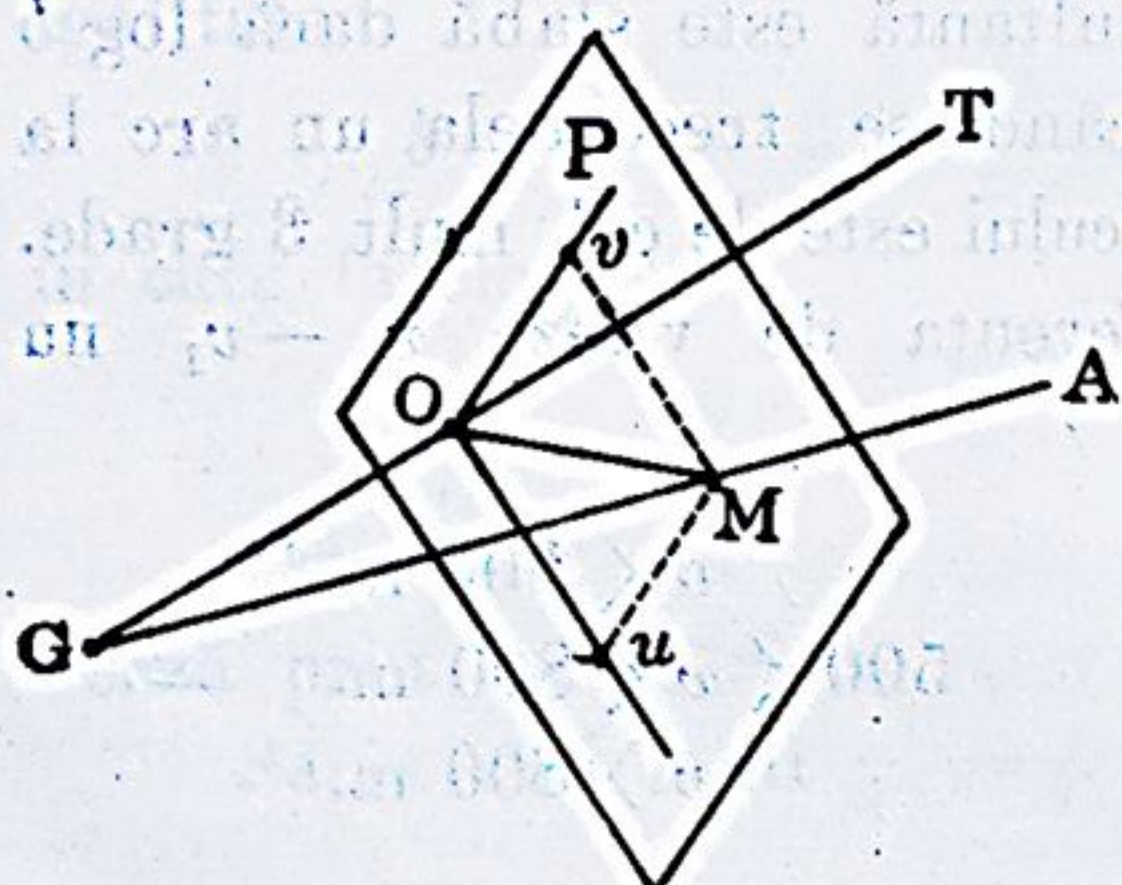


Fig. 233

Vom trece apoi la chestiunea *Stabilității* proiectilelor pe traectorie și la aceea a *Deri-*

*vațiunii*, care sunt strâns legate de problema mișcării axului proiectilului, punând totdeodată în evidență concluziunile de ordin practic ce rezultă din toate aceste studii atât pentru buna ținută a proiectilelor pe traectorii, de care depinde precizia tragerilor, cât și pentru construcția proiectilelor.



## I. ECUAȚIILE GENERALE ALE MIȘCĂRII.

1. **Axe cordonate.** Vom raporta mișcarea proiectilului în jurul centrului său de greutate  $G$  la trei axe cordonate dreptunghiulare  $Gx, Gy, Gz$  trecând prin acest punct și definite astfel:

$Gz$ , îndreptat pe tangenta traectoriei lui  $G$ , în sensul mișcării;

$Gx$ , perpendicular pe planul vertical al acestei traectorii și deci orizontal, îndreptat spre dreapta;

$Gy$ , perpendicular pe cele două precedente, coprins în planul traectoriei lui  $G$  și îndreptat în sus.

Poziția proiectilului față de aceste axe va fi definită, potrivit teoriei generale a mișcării unui solid în jurul unui punct fix (pag. 339) prin poziția respectivă a unui alt sistem de trei axe dreptunghiulare  $GX, GY, GZ$ , invariabil legate proiectilului, dintre care,  $GZ$ , coîncizând cu linia însăși a axului proiectilului iar celelalte două coprinse în planul secțiunei sale drepte care trece prin  $G$ .

Elementele care determină poziția acestui sistem față de sistemul  $Gx, Gy, Gz$  sunt după cum știm, cele trei unghiuri ale lui *Euler*:  $\psi, \theta$  și  $\varphi$ .

Mai știm de asemenea că se trece dela o poziție a corpului la alta infinit vecină, prin cele trei rotații elementare:

$\delta\psi$ , în jurul lui  $Gz$   
 $\delta\theta$ , „ „ „ „  $GA$   
 $\delta\varphi$ , „ „ „ „  $GZ$

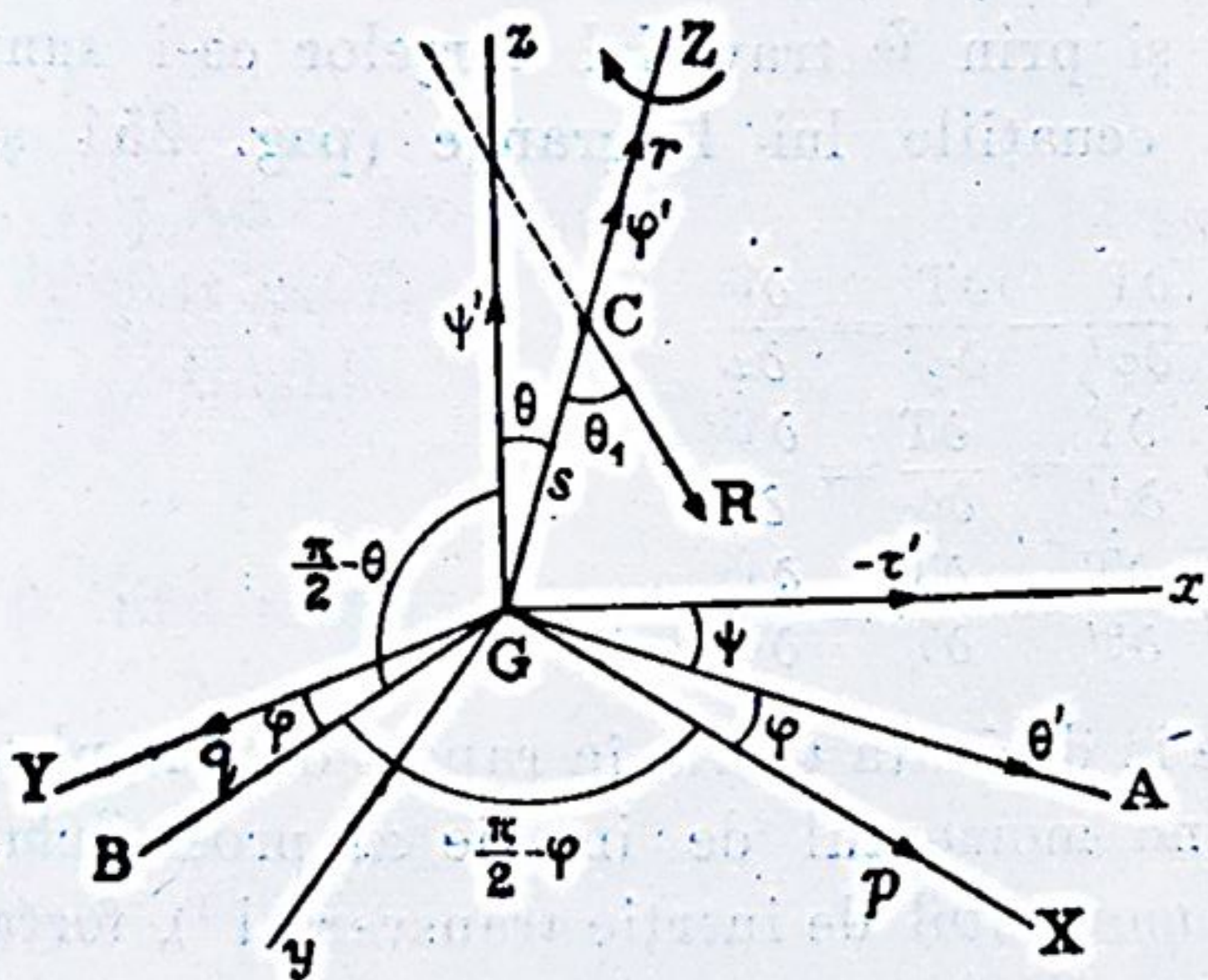


Fig. 235

la care trebuie să mai adăogăm rotația —  $\delta\tau$  în jurul lui  $Gx$ ,

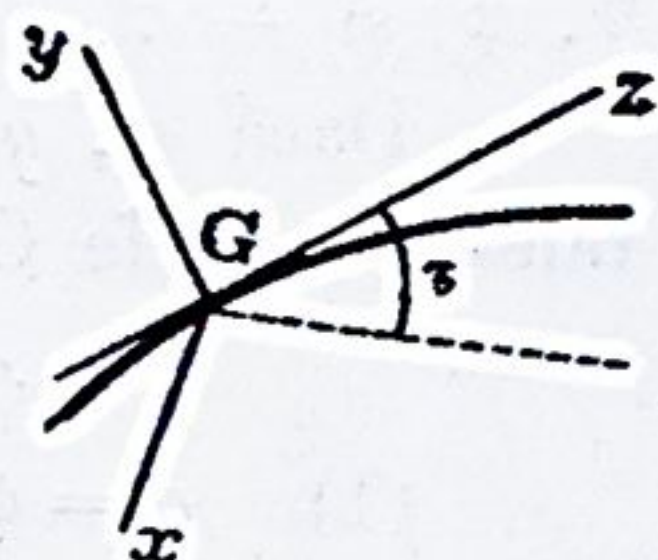


Fig. 234



care rezultă din înclinarea tangentei  $Gz$  pe orizont,  $\delta\tau$  fiind totdeauna negativ.

Mișcarea elementară a proiectilului în jurul centrului său de greutate va fi deci o rotație rezultând din cele patru rotații precedente, reprezentate respectiv pe figură prin vectoarele  $\psi'$ ,  $\theta'$ ,  $\varphi'$  și  $-\tau'$ .

Dacă  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , sunt componentele vectorului rotației rezultante pe axele  $GX$ ,  $GY$ ,  $GZ$ , știm (pag. 345) că:

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi - \tau' \cos (X, x) \\ (1) \quad q &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi - \tau' \cos (Y, x) \\ r &= \psi' \cos \theta + \varphi' - \tau' \cos (Z, x). \end{aligned}$$

Avem de altfel următoarele relații trigonometrice cunoscute din Geometria analitică:

$$\begin{aligned} \cos (X, x) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta \\ (2) \quad \cos (Y, x) &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta \\ \cos (Z, x) &= \sin \theta \sin \psi. \end{aligned}$$

2. **Ecuatiile lui Lagrange.** În loc de ecuațiile lui *Euler* (pag. 344) este mai avantajos de a ne servi de acelea ale lui *Lagrange*, care dau loc la calcule mai simple conducând însă bine înțeles la aceleași rezultate.

Luând ca parametri pe  $\varphi$ ,  $\psi$  și  $\theta$  și însemnând prin  $T$  forța vie a proiectilului și prin  $\mathcal{C}$  travaliul forțelor ce-i sunt direct aplicate, știm că ecuațiile lui *Lagrange* (pag. 254 și 256) sunt:

$$\begin{aligned} D_t \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \varphi} \\ D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \psi} \\ D_t \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

unde  $D_t$  înseamnă că se ia derivata totală în raport de timpul  $t$ .

1°. **Forța vie.**  $C$  fiind momentul de inerție al proiectilului în jurul axului său și  $A$  momentul de inerție transversal <sup>1)</sup>, forța vie  $T$  are ca expresie (pag. 346).

<sup>1)</sup> Raportul  $\frac{A}{C}$  variază pentru proiectile dela 5 la 10.



$$(3) \quad 2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

unde  $p^2 + q^2$  și  $r^2$  au următoarele valori care rezultă din relațiile (1) și (2) de mai sus:

$$4) \quad p^2 + q^2 = \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta - 2\tau'(\theta' \cos \psi - \psi' \sin \theta \cos \theta \sin \psi) + \tau'^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \theta)$$

$$5) \quad r^2 = \psi'^2 \cos^2 \theta + 2\psi' \varphi' \cos \theta + \varphi'^2 + \tau'^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi - 2\tau' \sin \theta \sin \psi (\varphi' + \psi' \cos \theta).$$

**2° Trăvialiul elementar al forțelor direct aplicate.** Forțele care lucrează asupra proiectilului sunt rezistența  $R$  a aerului, cuprinsă în planul de rezistență  $zGZ$  și aplicată în centrul de rezistență  $C$ , și rezultanta  $F$  a frecărilor laterale care, după cum știm, este perpendiculară pe planul  $zGZ$  și aplicată într'un punct al planului de rezistență situat față de ax de aceeași parte ca tangenta. Presupunând că proiectilul se învâртеște în jurul axului său dela stânga la dreapta, rezultanta  $F$  are, după cum s'a explicat în capitolul precedent, aceeași direcție și același sens ca dreapta  $GA$  din planul  $xGy$ .

**Trăvialiul rezistenței  $R$ .** Rezistența  $R$  face cu axul  $GZ$  al proiectilului un unghi  $\theta_1$ , vecin de unghiul  $\theta$  pe care-l formează între ele axul  $GZ$  și tangenta  $Gz$  a traectoriei centrului de greutate.

Fie  $GC = s$ . Momentul lui  $R$  în raport de  $G$  este

$$s R \sin \theta_1.$$

Acest moment fiind perpendicular pe planul  $zGZ$ , este îndreptat pe  $GA$ .

Unghiul  $\theta_1$  fiind mai mare decât  $\theta$ , să punem

$$\theta_1 = \theta + \mu \theta$$

$\mu$  fiind pozitiv însă foarte mic și variând odată cu  $\theta$ . Ca urmare

$$sR \sin \theta_1 = sR \sin (1 + \mu) \theta$$

și, cum  $\theta$  este mic, putem scrie

$$sR \sin \theta_1 = sR (1 + \mu) \theta = a\theta$$

punând pentru prescurtare

$$s(1 + \mu) R = a.$$



Travaliul rezistenței  $R$  în deplasarea elementară a proiectilului, este egal cu suma travaliurilor pe care le dă  $R$  în cele trei rotații componente  $\delta\theta$ ,  $\delta\varphi$  și  $\delta\psi$ . Ori, după cum știm (pag. 25) travaliul unei forțe într'o rotație elementară este egal cu momentul forței în raport de axul de rotație înmulțit cu unghiul rotației. Cum momentele lui  $R$  în raport de cele două axe  $Gz$  (rotație  $\delta\psi$ ) și  $GZ$  (rotație  $\delta\varphi$ ) sunt nule și, cum momentul în raport de  $GA$  (rotație  $\delta\theta$ ) este egal cu momentul în raport de  $G$  adică egal cu  $a\theta$ , rezultă că travaliul rezistenței  $R$  în deplasarea elementară a proiectilului are ca expresie

$$(6) \quad a\theta\delta\theta.$$

**Travaliul frecărilor.** Rezultanta  $F$  a frecărilor laterale este, după cum am spus, paralelă cu  $GA$ , rotația proiectilului fiind presupusă ca având loc în sensul direct, adică dela stânga la dreapta pentru un observator culcat pe  $GZ$  cu picioarele în  $G$ .

Momentul rezultantei  $F$  în raport de punctul  $G$  este deci

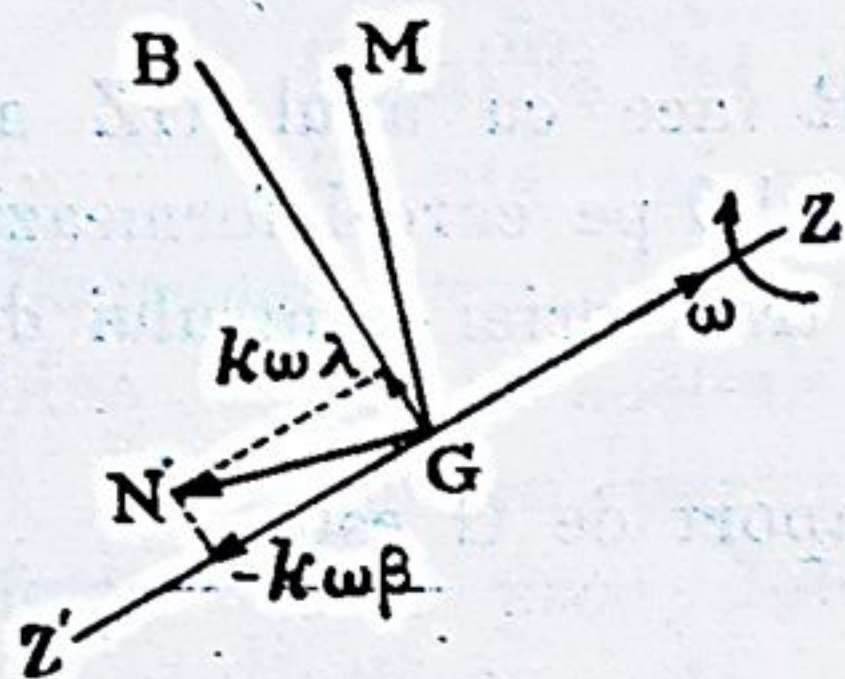


Fig. 236.

coprit în planul de rezistență  $zGZ$ . Fie  $M$  punctul de aplicație al acestei rezultante și  $BG$  axul perpendicular pe  $GZ$  din planul de rezistență. Să reprezentăm prin  $GN$  momentul lui  $F$  în raport de  $G$ . Admițând cu profesorul *Esclangon*<sup>1)</sup> că rezultanta  $F$  este proporțională cu viteza unghiulară de rotație  $\omega$  a proiectilului și cu o constantă

fizică  $k$  depinzând de natura suprafeții proiectilului, putem reprezenta cele două proiecții ale momentului  $GN$  pe  $GB$  și  $GZ$  prin expresiunile

$$k\omega\lambda \quad \text{și} \quad -k\omega\beta$$

$\lambda$  și  $\beta$  fiind doi factori pozitivi și funcții de  $\theta$ . Ori, când  $\theta$  este nul, știm că rezultanta frecărilor laterale este un cuplu al căruia moment este îndreptat pe  $GZ'$ , neavând astfel componentă pe  $GB$ . Factorul  $\lambda$  se anulează deci odată cu  $\theta$ ; ca urmare, vom

<sup>1)</sup> *Mémorial de l'Artillerie Française*, tome VI, 3-e fascicule de 1927, pag. 709 și 717.



putea pune  $\lambda = \alpha \theta$ ,  $\alpha$  fiind o constantă pozitivă. Pe de altă parte, cum  $\theta$  rămâne totdeauna mic, momentul GN se depărtează puțin de  $GZ'$  așa încât vom putea considera pe  $-k \omega \beta$  ca invariabil și deci pe  $\beta$  ca fiind o constantă.

Cele două proiecții pe GB și pe GZ ale momentului GN vor fi astfel

$$k \omega \alpha \theta \quad \text{și} \quad -k \omega \beta$$

$k$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  fiind trei constante.

Pentru formarea expresiei travaliului forței F în deplasarea elementară a proiectilului, ne trebuie componentele momentului GN pe cele trei axe  $Gz$ ,  $GZ$  și  $GA$ . Ele se află proiectând pe  $k \omega \alpha \theta$  și  $-k \omega \beta$  pe fiecare din aceste axe. Obținem, după cum se vede pe figură,

$$\begin{array}{rcl} k \omega \alpha \theta \sin \theta - k \omega \beta \cos \theta & \text{pe } Gz \\ -k \omega \beta & \text{„ } GZ \\ 0 & \text{„ } GA. \end{array}$$

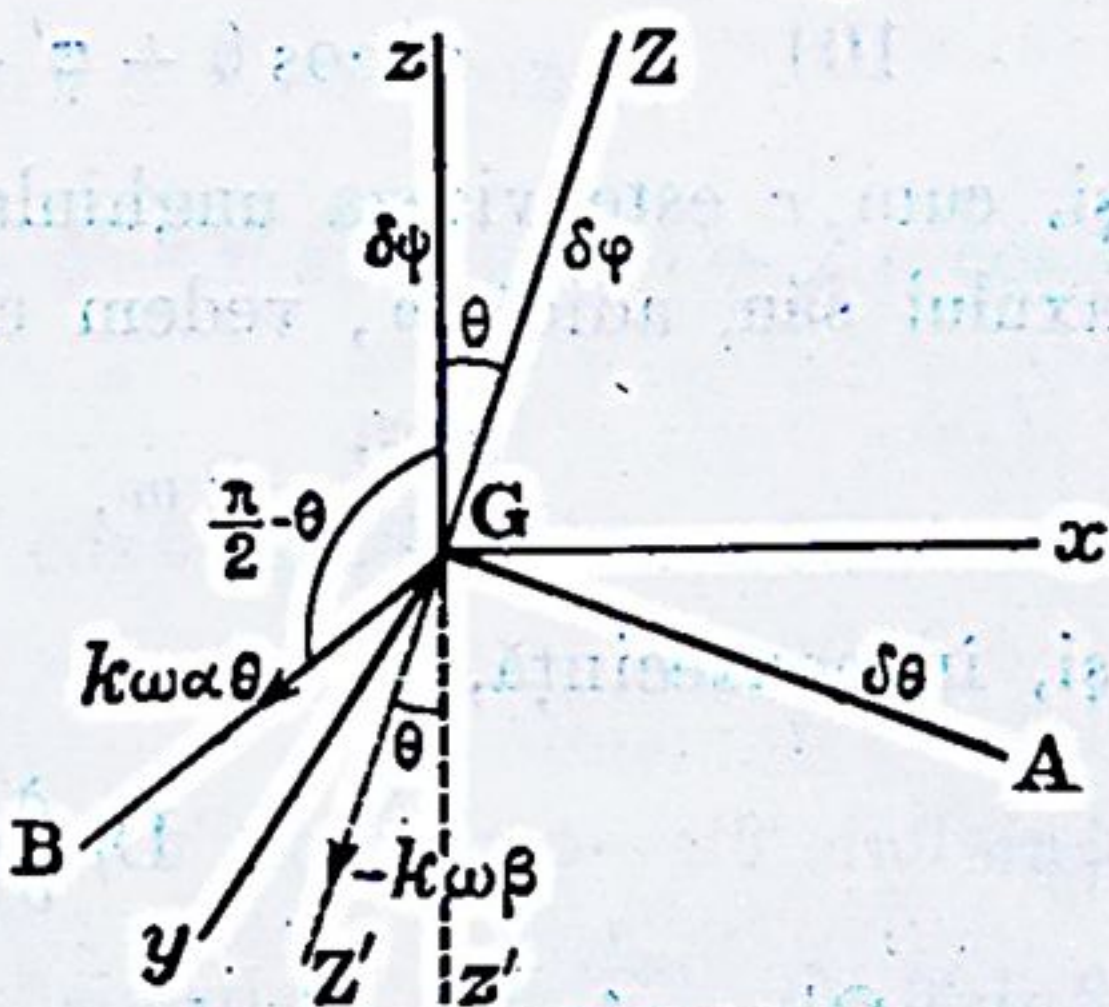


Fig. 237

Cum unghiul  $\theta$  este mic, componenta de pe  $Gz$  poate fi luată ca egală cu  $k \omega \alpha \theta^2 - k \omega \beta$

înlocuind pe  $\sin \theta$  prin  $\theta$  și pe  $\cos \theta$  prin 1.

Expresia travaliului elementar va fi în consecință

$$(7) \quad (k \omega \alpha \theta^2 - k \omega \beta) \delta \psi - k \omega \beta \delta \varphi.$$

**Travaliul total.** Făcând suma celor două expresiuni (6) și (7) obținem ca travaliu total  $\delta \mathcal{E}$  al celor două forțe R și F care lucrează asupra proiectilului:

$$(8) \quad \delta \mathcal{E} = \alpha \theta \delta \theta + (k \omega \alpha \theta^2 - k \omega \beta) \delta \psi - k \omega \beta \delta \varphi.$$

**3° Ecuațiile generale ale mișcării.** Reluând ecuațiile lui Lagrange:

$$(9) \quad \begin{cases} D_t \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} \\ D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} \\ D_t \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} \end{cases}$$



să înlocuim în ele diverşii termeni prin valorile lor respective, potrivit egalităţilor (3), (4), (5) şi (8).

*Ecuaţia întâia.* Avem, succesiv,

$$2 \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = A \frac{\partial(p^2 + q^2)}{\partial \varphi'} + C \frac{\partial(r^2)}{\partial \varphi'}$$

$$\frac{\partial(p^2 + q^2)}{\partial \varphi'} = 0, \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial \varphi'} = 2(\psi' \cos \theta + \varphi' - \tau' \sin \theta \sin \psi).$$

Însă

$$10) \quad \psi' \cos \theta + \varphi' - \tau' \sin \theta \sin \psi = r$$

şi, cum  $r$  este viteza unghiulară de rotaţie a proiectilului în jurul axului său, adică  $\omega$ , vedem că

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial \psi'} = 2\omega, \quad \text{deci } \frac{\partial T}{\partial \psi'} = C\omega$$

şi, în consecinţă,

$$D_1 \frac{\partial T}{\partial \varphi} = C \frac{d\omega}{dt}.$$

Observând apoi că

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad \text{iar } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} = -k\omega\beta$$

prima din ecuaţiile lui Lagrange ne dă

$$(11) \quad C \frac{d\omega}{dt} = -k\omega\beta$$

sau

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{C} \beta dt$$

de unde, integrând dela  $0$  la  $t$ ,

$$\text{Log } \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{C} \beta t$$

adică

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{C} \beta t} = \frac{\omega_0}{e^{\frac{k}{C} \beta t}}.$$

Viteza de rotaţie  $\omega$  descreşte deci cu timpul  $t$ , însă foarte încet, din cauza marei valori a lui  $\omega_0$  şi a micii valori a lui  $k$ .



Pe un arc de traectorie, variația lui  $t$  fiind mică,  $\omega$  poate fi considerat ca constant.

Dacă n'ar exista frecări laterale,  $k$  fiind atunci nul,  $\omega$  ar rămâne tot timpul constant și egal cu  $\omega_0$ .

*Ecuatia a doua.* Să considerăm acum ecuația a doua a lui Lagrange:

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi}.$$

Avem

$$\frac{\partial (p^2 + q^2)}{\partial \psi'} = 2 \sin \theta (\psi' \sin \theta + \tau' \cos \theta \sin \psi)$$

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial \psi'} = 2 \cos \theta (\psi' \cos \theta + \psi' - \tau' \sin \theta \sin \psi) = 2 \omega \cos \theta$$

deci

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A \sin \theta (\psi' \sin \theta + \tau' \cos \theta \sin \psi) + C \omega \cos \theta$$

și, derivând în raport de timp,

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A [\sin \theta (\psi'' \sin \theta + \psi' \theta' \cos \theta + \tau'' \cos \theta \sin \psi - \tau' \theta' \sin \theta \sin \psi + \tau' \psi' \cos \theta \cos \psi) + \theta' \cos \theta (\psi' \sin \theta + \tau' \cos \theta \sin \psi)] + C \cos \theta \frac{d\omega}{dt} - C \omega \theta' \sin \theta$$

sau

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A [\sin \theta (\psi'' \sin \theta + \tau'' \cos \theta \sin \psi + \tau' \psi' \cos \theta \cos \psi + 2 \theta' \psi' \sin \theta \cos \theta + \tau' \theta' \sin \psi (1 - 2 \sin^2 \theta))] + C \cos \theta \frac{d\omega}{dt} - C \omega \theta' \sin \theta$$

în care vom înlocui pe  $C \frac{d\omega}{dt}$  prin  $-k \omega \beta$  potrivit egalității (11).

De asemenea

$$\frac{\partial (p^2 + q^2)}{\partial \psi} = 2 \tau' (\theta' \sin \psi + \psi' \sin \theta \cos \theta \cos \psi) - 2 \tau'^2 \theta \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r^2)}{\partial \psi} &= -2 \tau' \sin \theta \cos \psi (\varphi' + \psi' \cos \theta - \tau' \sin \theta \sin \psi) \\ &= 2 \tau' \omega \sin \theta \cos \psi \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \psi} &= A [\tau' (\theta' \sin \psi + \psi' \sin \theta \cos \theta \cos \psi) - \tau'^2 \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi] \\ &\quad - C \tau' \omega \sin \theta \cos \psi. \end{aligned}$$

Pentru valori mici ale lui  $\theta$ , putem înlocui pe  $\sin \theta$  prin  $\theta$  și pe  $\cos \theta$  prin 1. Avem atunci



$$D_{\psi} \frac{T}{\partial \psi} = A[\psi''\theta^2 + 2\theta\theta'\psi' + \theta\tau''\sin\psi + \tau'(\theta\sin\psi + \psi'\theta\cos\psi - 2\theta^2\theta'\sin\psi) - K\omega\beta - C\omega\theta\theta']$$

$$\text{și } \frac{\partial T}{\partial \psi} = A[\tau'(\theta'\sin\psi + \psi'\theta\cos\psi) - \tau'^2\theta^2\sin\psi\cos\psi] - C\tau'\omega\theta\cos\psi.$$

Cum, în acest caz,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \psi} = k\omega\alpha\theta^2 - k\omega\beta$$

ecuația a doua a lui Lagrange ne dă, după reduceri de termeni și simplificare cu factorul  $\theta$ ,

$$(13) \quad A(\theta\psi'' - 2\theta'\psi') - C\omega\theta' = k\omega\alpha\theta - A\tau''\sin\psi + \tau'(2A\theta\theta'\sin\psi - C\omega\cos\psi) - A\theta\tau'^2\sin\psi\cos\psi.$$

*Ecuația a treia.* În mod analog, ecuația a treia ne dă,

$$(14) \quad A(\theta'' - \theta\psi'^2) + C\omega\theta\psi' = \alpha\theta + A\tau''\cos\psi - \tau'(2A\theta^2\psi'\sin\psi + C\omega\sin\psi) - A\theta\tau'^2\sin^2\psi.$$

*Notă.* În formă prescurtată, să însemnăm prin

$$E_{\varphi} = 0; \quad E_{\psi} = 0, \quad E_{\theta} = 0$$

cele trei rezultate precedente (11), (13) și (14) la care ne-a condus aplicația ecuațiilor lui Lagrange.

Dacă în loc de aceste ecuații am fi aplicat pe acelea ale lui Euler :

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A) r q = L$$

$$A \frac{dq}{dt} - (C - A) r p = M$$

$$C \frac{dr}{dt} = N$$

am fi obținut ecuațiile:

$$E_{\psi} \sin \varphi + E_{\theta} \cos \varphi = 0$$

$$E_{\psi} \cos \varphi - E_{\theta} \sin \varphi = 0$$

$$E_{\varphi} = 0.$$

Cele două dintâi sunt deci mult mai complicate, dând loc pentru stabilirea lor la calcule de două ori mai lungi; ele se reduc însă prin combinațiunea lor tot la

$$E_{\psi} = 0 \quad \text{și} \quad E_{\theta} = 0.$$



## II. INTEGRAȚIUNE PE ARCURI SUCCESIVE.

1. **Schimbare de variabile.** Pe tangenta  $Gz$  a traectoriei centrului de greutate să considerăm punctul  $O$  situat față de  $G$  la unitatea de distanță și prin acest punct să ducem un plan  $P$  perpendicular pe  $Gz$ . Fie  $M$  punctul unde axul  $GZ$  al proiectilului întâlnește planul  $P$  și  $u, v, w$  cordonatele acestui punct în raport de sistemul de axe  $Gx, Gy, Gz$ .

Avem, pe figură,

$$OM = OG \operatorname{tg} \theta \quad \text{sau} \quad OM = \theta$$

dat fiind că  $OG = 1$  iar  $\theta$  este mic. Apoi,  $N$  fiind proiecția lui  $M$  pe planul  $xGy$ :

$$u = GN \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = OM \sin \psi$$

$$v = -GN \cos \psi = -OM \cos \psi$$

deci

$$u = \theta \sin \psi, \quad v = -\theta \cos \psi, \quad w = 1$$

$u$  și  $v$  fiind de altfel și cordonatele punctului  $M$  în raport de axe  $Ou$  și  $Ov$  din planul  $P$ , paralele cu  $Gx$  și  $Gy$ .

Să formăm suma  $u + iv$  pe care să o însemnăm prin  $z$ , litera  $i$  fiind imaginara

$$\sqrt{-1}.$$

Avem

$$z = u + iv = \theta (\sin \psi - i \cos \psi) = -i \theta (\cos \psi + i \sin \psi) = -i \theta e^{i\psi}$$

și, derivând de două ori,

$$z' = -i (\theta i \psi' e^{i\psi} + \theta' e^{i\psi}) = (\theta \psi' - i \theta') e^{i\psi}$$

$$z'' = (\theta \psi'' + \theta' \psi' - i \theta'') e^{i\psi} + (\theta \psi' - i \theta') i \psi' e^{i\psi} =$$

$$[\theta \psi'' + 2 \theta' \psi' - i (\theta'' - \theta \psi'^2)] e^{i\psi}.$$

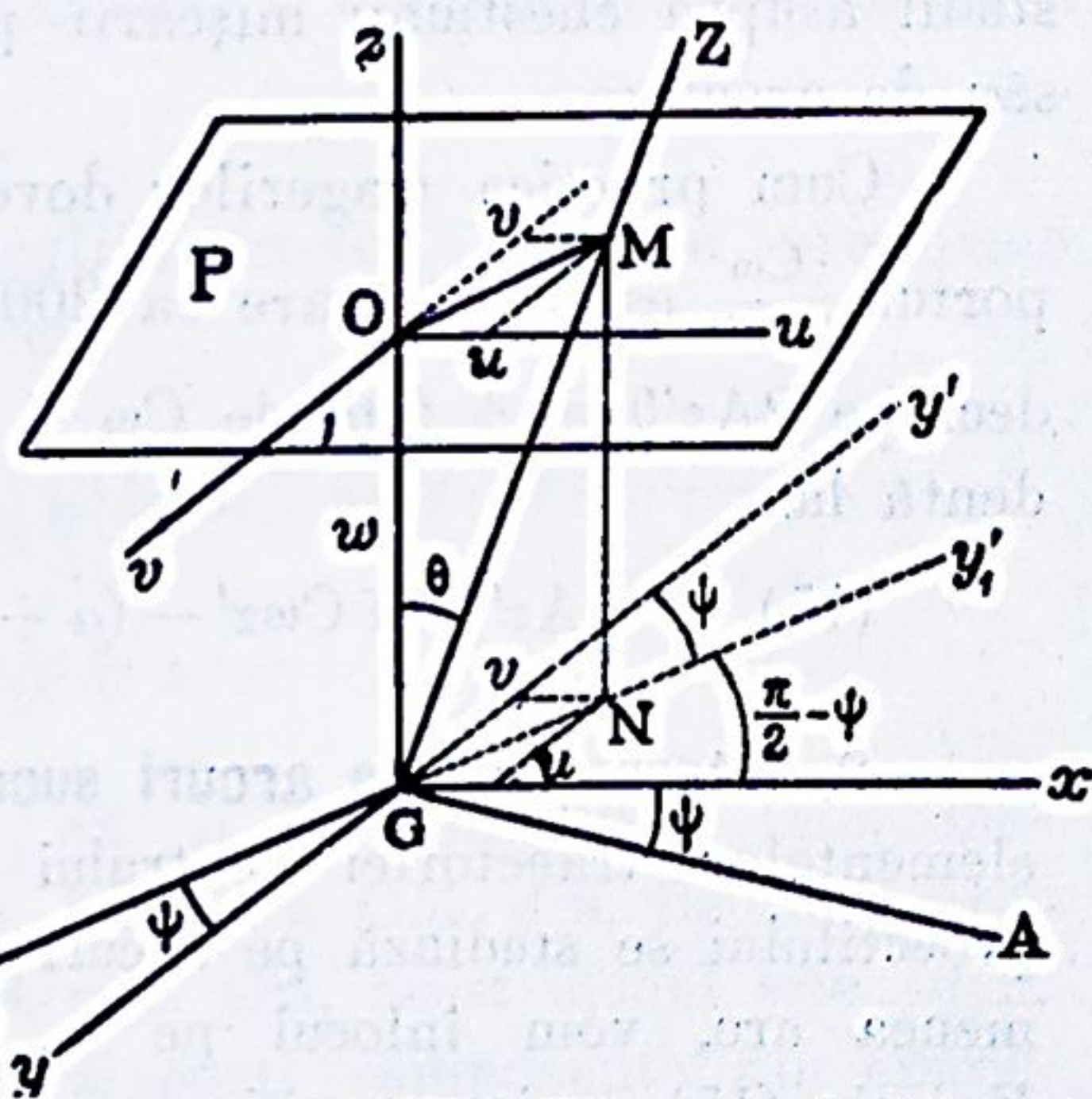


Fig. 238



Inmulțind acum ecuația (14) cu  $i$  și apoi scăzând-o din ecuația (13) obținem:

$$A [\theta \psi'' + 2 \theta' \psi' - i (\theta'' - \theta \psi'^2)] - i (C \omega + 2 A \tau' \theta \sin \psi) (\theta \psi' - i \theta') + (a + i k \omega \alpha) i \theta = (\cos \psi - i \sin \psi) (-C \omega \tau' - i A \tau'' - A \tau'^2 \theta)$$

adică înlocuind pe  $\cos \psi - i \sin \psi$  prin  $e^{-i\psi}$  și înmulțind după aceea toată ecuația cu  $e^{\psi i}$ ,

$$A z'' - i (C \omega + 2 A \tau' \theta \sin \psi) z' - (a + i k \omega \alpha) z = - (C \omega + A \tau' \theta \sin \psi) \tau' - i A \tau''.$$

Această ecuație diferențială de ordinul al doilea este identică cu aceea indicată de *M. de Sparre* în numeroasele sale studii asupra chestiunii mișcării proiectilului în jurul centrului său de greutate.

Cum practica tragerilor dovedește că în toate cazurile raportul  $\frac{C \omega}{2 A \tau' \theta}$  este mai mare ca 200, putem neglija pe  $2 A \tau' \theta$  și deci pe  $2 A \tau' \theta \sin \psi$  față de  $C \omega$  și reduce astfel ecuația precedentă la

$$(15) \quad A z'' - i C \omega z' - (a + i k \omega \alpha) z = - C \omega \tau' - i A \tau''.$$

**2. Integrațiune pe arcuri succesive.** Ca și pentru calculul elementelor traectoriei centrului de greutate, mișcarea axului proiectilului se studiază pe arcuri succesive. În lungul unui asemenea arc, vom înlocui pe  $a$ ,  $\tau'$  și  $\tau''$  prin valori mijlocii. Ecuația (15) devine atunci o ecuație diferențială cu coeficienți constanți care se poate integra ușor.

Ea admite în adevăr soluția particulară

$$z_1 = \frac{C \omega \tau' + i A \tau''}{a + i k \omega \alpha}$$

iar ecuația fără al doilea membru

$$A z'' - i C \omega z' - (a + i k \omega \alpha) z = 0$$

admite ca ecuație caracteristică

$$A r^2 - i C \omega r - a + (a + i k \omega \alpha) = 0$$



din care deducem

$$r = i \frac{C\omega}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{-C^2\omega^2 + 4A(a + ik\omega\alpha)}.$$

Insemnând prin  $r_1$  și  $r_2$  cele două rădăcini, soluția generală a ecuației (15) este prin urmare

$$z = \frac{C\omega\tau' + i A\tau''}{a + ik\omega\alpha} + A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t}$$

$A_1$  și  $B_1$  fiind două constante care se determină, pentru fiecare arc, potrivit condițiilor mișcării în punctul de unde începe arcul.

### III. CAZUL CÂND FRECĂRILE SUNT NEGLIJABILE.

Vom presupune mai întâi că frecările sunt neglijabile; vom studia apoi modificările pe care le ocazionaază introducerea în calcule a acestor frecări.

1. **Soluția mișcării.** A neglija frecările este a presupune pe  $k$  egal cu zero. Avem atunci

$$z = \left( \frac{C\omega\tau'}{a} + i \frac{A\tau''}{a} \right) + A_1 e^{\left( i \frac{C\omega}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{4Aa - C^2\omega^2} \right) t} + B_1 e^{\left( i \frac{C\omega}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{4Aa - C^2\omega^2} \right) t}$$

Cum unghiul  $\theta$  dintre ax și tangentă este mic, modulul lui  $z$  care este egal cu lungimea OM din figura precedentă trebuie să rămână și el mic. Ori, acest modul este suma geometrică a modulilor celor trei părți componente din expresiunea lui  $z$ . Modulul exponențialei  $e^{i \frac{C\omega t}{2A}}$  fiind egal cu unitatea<sup>1)</sup>, modulii celor două din urmă părți sunt egali cu

$$|A_1| e^{\frac{t}{2A} \sqrt{4Aa - C^2\omega^2}} \quad \text{și} \quad |B_1| e^{-\frac{t}{2A} \sqrt{4Aa - C^2\omega^2}}$$

Diferența  $4Aa - C^2\omega^2$  fiind o cantitate finită, primul dintre acești moduli poate deveni foarte mare cu timpul. Pentru

<sup>1)</sup> Modulul exponențialei  $e^{xi}$  este egal cu unitatea, oricare ar fi  $x$ .



ca să nu se întâmple astfel, trebuie ca această diferență să fie negativă, căci atunci exponențiala fiind imaginară modulul se reduce la  $|A_1|$  cantitate independentă de  $t$ , cel de al doilea modul reducându-se și el la  $|B_1|$ .

Ca unghiul  $\theta$  să poată rămâne mic, este deci *necesar*, așa după cum a stabilit *M. de Sparre*, ca să avem

$$4 A a - C^2 \omega^2 < 0 \quad \text{adică} \quad \frac{C^2 \omega^2}{4 A a} > 1.$$

Dacă această condiție este îndeplinită, atunci, cum

$$r = i \frac{C \omega}{2 A} \pm \frac{i}{2 A} \sqrt{C^2 \omega^2 - 4 A a}$$

sau

$$r = i \frac{C \omega}{2 A} \pm i \frac{C \omega}{2 A} \sqrt{1 - \frac{4 A a}{C^2 \omega^2}}$$

vom putea scrie

$$r_1 = i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon), \quad r_2 = i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon)$$

punând pentru prescurtare

$$(16) \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{4 A a}{C^2 \omega^2}.$$

Soluția mișcării va fi în consecință

$$(17) \quad z = \left( \frac{C \omega \tau'}{a} + i \frac{A \tau''}{a} \right) + A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t}$$

poziția axului rezultând astfel din compunerea unei părți ne-periodice

$$z_1 = \frac{C \omega \tau'}{a} + i \frac{A \tau''}{a}$$

cu o parte periodică

$$z_2 = A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t}$$

2. Determinarea constantelor de integrațiune  $A_1$  și  $B_1$  pentru primul arc de traectorie. Vom presupune că la origina mișcării, axul proiectilului coincide cu tangenta traectoriei centrului său de greutate și, că în momentul imediat următor când tangenta



a început să se încline pe orizont, axul rămâne coprins în planul vertical al traectoriei, adică în planul  $yGz$ . Presupunem deci că la origina mișcării avem:

$$\theta_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi'_0 = 0, \quad z_0 = -i\theta_0 e^{i\psi_0} = 0.$$

În aceste condițiuni, ecuația (13) a mișcării în care facem și pe  $k$  egal cu zero, ne dă

$$-C\omega\theta'_0 = -C\omega\tau'_0$$

deci  $\theta'_0 = \tau'_0$  și prin urmare

$$z'_0 = (\theta_0\psi'_0 - i\theta'_0) e^{i\psi_0} = -i\theta'_0 = -i\tau'_0.$$

Ori, ecuația (17) în care elementele  $a$ ,  $\tau'$  și  $\tau''$  vor fi privite ca constante în lungul arcului considerat, ne dă prin derivare

$$(18) \quad z' = A_1 i \frac{C\omega}{2A} (1 + \varepsilon) e^{i \frac{C\omega}{2A} (1 + \varepsilon) t} + B_1 i \frac{C\omega}{2A} (1 - \varepsilon) e^{i \frac{C\omega}{2A} (1 - \varepsilon) t}.$$

Exprimând acum că ecuațiile (17) și (18) sunt satisfăcute de condițiile inițiale de mai sus, obținem, neglijând pe  $\frac{A}{a} \tau''$  față de  $\frac{C\omega}{a} \tau'$  și luând  $\tau' = \tau'_0$ , cele două egalități

$$z_0 = 0 = \frac{C\omega}{a} \tau'_0 + A_1 + B_1$$

de unde

$$A_1 + B_1 = -\frac{C\omega}{a} \tau'_0$$

și

$$z'_0 = -i\tau'_0 = A_1 i \frac{C\omega}{2A} (1 + \varepsilon) + B_1 i \frac{C\omega}{2A} (1 - \varepsilon)$$

din care rezultă

$$-\tau'_0 = \frac{C\omega}{2A} (A_1 + B_1) + \varepsilon \frac{C\omega}{2A} (A_1 - B_1)$$

sau, înlocuind pe  $A_1 + B_1$  prin valoarea precedentă,

$$-\tau'_0 \left( 1 - \frac{C^2 \omega^2}{2A^2} \right) = \varepsilon \frac{C\omega}{2A} (A_1 - B_1).$$

Însă, potrivit egalității (16), avem

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{4A^2}{C^2 \omega^2}$$



deci

$$\frac{C^2 \omega^2}{2 A a} = \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \quad \text{și} \quad 1 - \frac{C^2 \omega^2}{2 A a} = - \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$$

precum de asemenea

$$\frac{C \omega}{a} = \frac{C^2 \omega^2}{2 A a} \cdot \frac{2 A}{C \omega} = \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{2 A}{C \omega}$$

Astfel, în definitiv,

$$A_1 + B_1 = - \frac{C \omega}{a} \tau'_0 = - \frac{2 A}{C \omega} \tau'_0 \frac{2}{1 - \varepsilon^2}$$

$$A_1 - B_1 = - \tau'_0 \left( 1 - \frac{C^2 \omega^2}{2 A a} \right) \frac{2 A}{C \omega \varepsilon} = \frac{2 A}{C \omega} \tau'_0 \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon (1 - \varepsilon^2)}$$

egalități, din care rezultă,

$$A_1 = \frac{A}{C \omega} \tau'_0 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon (1 + \varepsilon)}$$

$$B_1 = - \frac{A}{C \omega} \tau'_0 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon (1 - \varepsilon)}$$

După cum se vede, valorile constantelor  $A_1$  și  $B_1$  sunt mici,  $\omega$  fiind mare iar  $\tau'_0$  mic.

**3. Studiul părții periodice a mișcării axului.** Partea periodică a mișcării axului este, după cum am spus mai sus,

$$z_2 = A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t}$$

Să dăm lui  $t$  o creștere  $\Delta t$ ;  $z_2$  devine  $z_2 + \Delta z_2$  și avem

$$z_2 + \Delta z_2 = A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} \cdot e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) \Delta t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t} \cdot e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) \Delta t}$$

Ori, dacă luăm pe  $\Delta t$  astfel încât

$$(19) \quad \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) \Delta t = \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) \Delta t + 2 k \pi$$



$z_2 + \Delta z_2$  devine:

$$z_2 + \Delta z_2 = e^{i \frac{C\omega}{2A} (1-s) \Delta t} \left[ A_1 e^{i \frac{C\omega}{2A} (1+s) t} + B_1 e^{i \frac{C\omega}{2A} (1-s) t} \right] e^{2k\pi i}$$

și, cum

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$$

vedem că paranteza este egală cu  $z_2$  așa că avem

$$z_2 + \Delta z_2 = z_2 \cdot e^{i \frac{C\omega}{2A} (1-s) \Delta t}$$

Modulul exponențialei fiind egal cu unitatea, modulul lui  $z_2 + \Delta z_2$  este deci egal cu acela al lui  $z_2$ . Astfel, după o creștere a timpului  $t$  cu valoarea  $\Delta t$  dată de egalitatea (19) adică

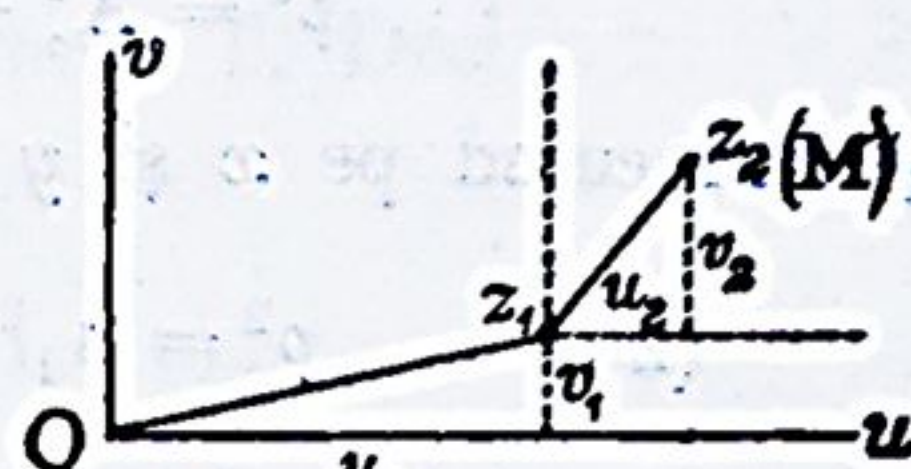


Fig. 239

$$\Delta t = \frac{2K\pi}{s \frac{C\omega}{A}}$$

modulul lui  $z_2$ , adică distanța punctului  $z_2$  la punctul  $z_1$  corespunzător părții neperiodice a mișcării axului, redevine același. Modulul lui  $z_2$  se reproduce deci periodic după ori-ce creștere a timpului cu valoarea

$$T = \frac{2\pi}{s \frac{C\omega}{A}}$$

Pe de altă parte, argumentul lui  $z_2 + \Delta z_2$  fiind suma argumentelor celor doi factori componenți este egal, după o perioadă  $T$ , cu argumentul lui  $z_2$  mărit cu argumentul factorului  $e^{i \frac{C\omega}{2A} (1-s) T}$  care este  $\frac{C\omega}{2A} (1-s) T$  adică  $\frac{\pi(1-s)}{s}$ .

Există deci o dublă periodicitate în timp și în spațiu. Astfel, după ori-ce creștere a timpului  $t$  cu valoarea  $T$ , modulul lui  $z_2$  redevine același iar argumentul său crește cu cantitatea  $\frac{\pi(1-s)}{s}$ .



Pentru a ne da seama cum anume variază modulul lui  $z_2$  pe timpul unei perioade  $T$ , să-i determinăm valoarea. În acest scop, punând pentru prescurtare,

$$\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t = x \quad \text{și} \quad \frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t = y$$

putem scrie

$$z_2 = A_1 e^{xi} + B_1 e^{yi} = (A_1 \cos x + B_1 \cos y) + i(A_1 \sin x + B_1 \sin y).$$

Patratul modulului este deci

$$\rho^2 = (A_1 \cos x + B_1 \cos y)^2 + (A_1 \sin x + B_1 \sin y)^2$$

adică

$$\rho^2 = A_1^2 + B_1^2 + 2 A_1 B_1 \cos(x - y)$$

și, înlocuind pe  $x$  și  $y$  prin valorile lor,

$$(20) \quad \rho^2 = A_1^2 + B_1^2 + 2 A_1 B_1 \cos \frac{C\omega}{A} \varepsilon t.$$

Această valoare a lui  $\rho^2$  se reproduce dacă mărim pe  $\frac{C\omega}{A} \varepsilon t$  cu  $2\pi$ , adică pe  $t$  cu

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon \frac{C\omega}{A}}.$$

Regăsim astfel periodicitatea lui  $\rho$  despre care am vorbit mai sus.

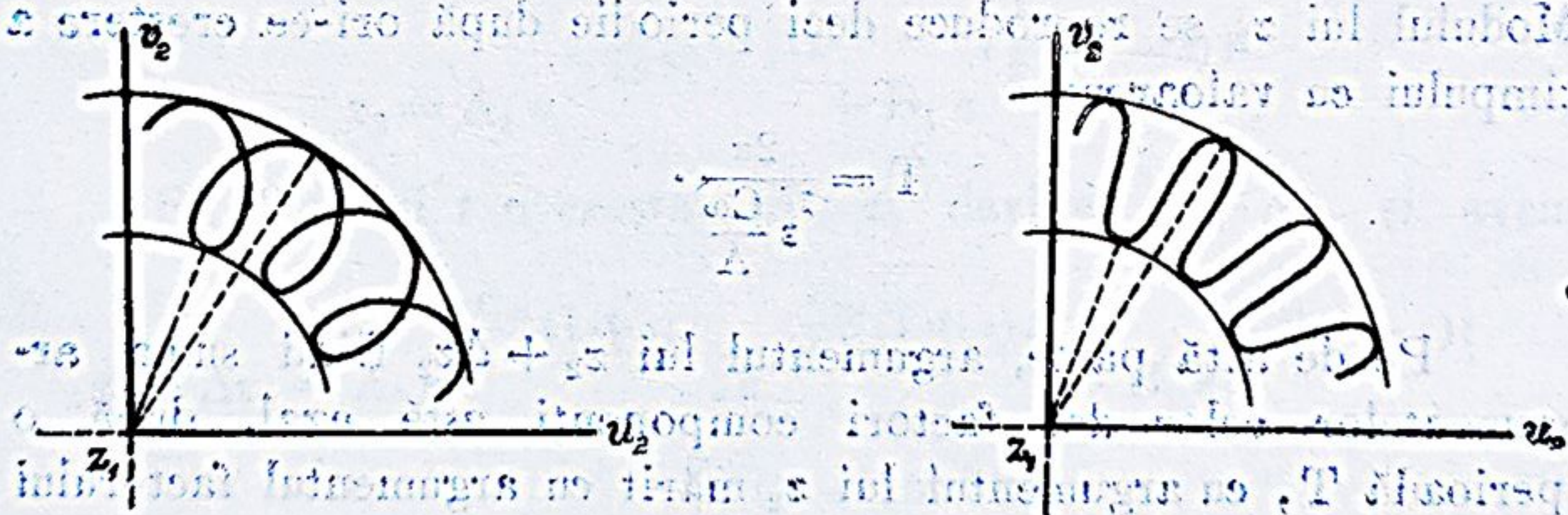


Fig. 240.

De altfel, potrivit expresiei (20) valorile lui  $\rho$  variază între limitele

$$|A_1 + B_1| \quad \text{și} \quad |A_1 - B_1|$$

una dintre ele corespunzând la maximul iar cealaltă la minimul



lui  $p$ . Reamintim că pe un arc de traectorie valorile lui  $A_1$  și  $B_1$  sunt constante, însă ele variază dela arc la arc.

Prin punctul  $z_1$  să ducem axele  $z_1 u_2$  și  $z_1 v_2$  paralele cu  $Ou$  și  $Ov$ . Din cele de mai sus rezultă, că în raport cu aceste axe antrenate în deplasarea lui  $z_1$ , curba descrisă de punctul  $z_2$ , adică de punctul  $M$  al axului proiectilului (fig. 237), în jurul lui  $z_1$ , are, pentru un arc de traectorie, una sau alta din cele două forme aci indicate.

**Viteza de precesiune.** Să determinăm viteza unghiulară de rotație a punctului  $z_2$ , în jurul lui  $z_1$ , adică viteza de precesiune.

Valoarea mijlocie  $n$  a acestei viteze este egală cu creșterea argumentului lui  $z$  în timpul  $T$ , divizată prin  $T$ . Deci

$$n = \frac{\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)T}{T} = \frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon).$$

Însă din egalitatea (16)

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4Aa}{C^2\omega^2} + \dots$$

și, cum  $\frac{4Aa}{C^2\omega^2}$  este mic, putem lua în mod aproximativ,

$$\varepsilon = 1 - \frac{2Aa}{C^2\omega^2}$$

asa încât avem

$$n = \frac{C\omega}{2A} \cdot \frac{2Aa}{C^2\omega^2} = \frac{a}{C\omega}$$

Viteza de precesiune are deci același sens ca rotația proiectilului în jurul axului său. Cum de obicei ghinturile țevelor de tunuri se răsucesc dela stânga la dreapta pentru observatorul care le privește dela culată, rotația proiectilului în jurul axului său este văzută dela dreapta la stânga pentru observatorul culcat pe acest ax cu picioarele în  $G$  și capul în  $M$ . Deci  $\omega$  este negativ;  $n$  fiind și el atunci negativ, observatorul culcat pe paralela dusă tangentei din punctul  $z_1$ , cu picioarele în  $z_1$ , va vedea rotația lui  $z_2$  în jurul lui  $z_1$  ca având loc în sensul dela  $v_2$  spre  $u_2$ ,



adică în planul  $v_2 z_1 u_2$  așa cum merg acele unui ceasornic. Acesta este sensul mișcării precesionare.

Poziția punctului  $z_1$  și deci a axului  $Gz_1$  fiind variabilă, acest ax în jurul căruia se învârteste axul proiectilului poate fi privit ca un ax instantaneu de rotație. D-I Esclangon l-a denumit *ax instantaneu de precesiune*.

Dacă înlocuim pe  $a$  prin expresia sa cunoscută

$$\alpha = s(1 + \mu) R = s(1 + \mu) \frac{p}{g} c F(v)$$

obținem

$$n = \frac{s(1 + \mu)}{C \omega} \frac{p}{g} c F(v).$$

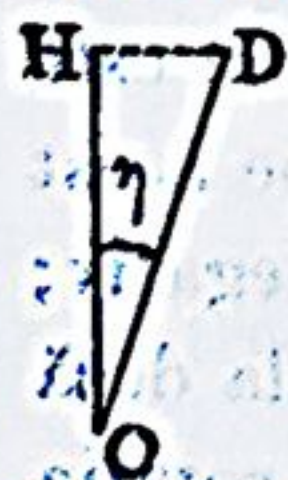
Pentru proiectile identice, trase în aceleași condiții însă cu viteze de rotație  $\omega$  diferite, vedem că viteza de precesiune este cu atât mai mică cu cât viteza de rotație a proiectilului este mai mare.

În cursul mișcării pe traectorie, viteza de precesiune se micșorează odată cu  $F(v)$  și deci odată cu  $v$ , trecând astfel printr'un minim, însă aceasta nu în punctul de viteză minimă de pe traectorie ci puțin mai înainte, căci trebuie ținut seama și de variația coeficientului balistic  $c$  care depinde după cum știm de  $\Delta(y)$  și este mai mic în apropierea vârfului decât la origina traectoriei.

Pentru a compara între ele vitezele de precesiune ale proiectilelor de calibre diferite, vom aduce o modificare de formă expresiei lui  $n$  după cum urmează.

Fie  $v_0$  viteza inițială a proiectilului,  $\eta$  înclinarea ghinturilor țevii și  $a_1$  calibrul ei. Avem egalitatea <sup>1)</sup>:

$$\omega = \pm \frac{2 v_0 \operatorname{tg} \eta}{a_1}$$



<sup>1)</sup> Dacă OH este pasul ghinturilor presupuse helicoidale și OD desfășurata ghintului dintre O și H, avem  $HD = \pi a_1$  și  $OH = \pi a_1 \cotg \eta$ . Ori, timpul  $t$  pe care îl pune proiectilul ca să ajungă din O în H în linie dreaptă este egal cu timpul care corespunde unei învârtiri circulare complete, deci

Fig. 241.  $OH = v_0 t = \pi a_1 \cotg \eta$  și  $\omega t = 2\pi$  de unde  $\omega = \frac{2 v_0 \operatorname{tg} \eta}{a_1}$ .



luându-se înaintea membrului al doilea semnul + sau — după cum  $\omega$  este pozitiv sau negativ.

Pe de altă parte, însemnând prin  $\rho_1$  raza de girație a proiectilului în jurul axului său, putem pune  $C = \frac{p}{g} \rho_1^2$ . Înlocuirea lui  $\omega$  și  $C$  prin aceste valori ne dă

$$n = \pm \frac{s a_1 (1 + \mu)}{2 \rho_1^2 v_0 \tan \eta} c F(v).$$

Cum cantitatea  $\frac{s a_1 (1 + \mu)}{\rho_1^2}$  este sensibil constantă pentru proiectilele asemenea <sup>1)</sup>, această formulă arată, că pentru acele proiectile, la egalitate de înclinare a ghinturilor și de valori de viteze  $v_0$  și  $v$ , viteza de precesiune variază proporțional cu coeficientul balistic al proiectilului, sau invers proporțional cu calibrul său <sup>2)</sup>. Astfel, viteza de precesiune a unui proiectil de 400 m.m. calibru ar fi de 50 de ori mai mică decât aceea a unui glonț de pușcă de 8 m.m. în condițiuni de egalitate a elementelor  $\eta$ ,  $v_0$  și  $v$ .

Pentru proiectilele de câmp, în condițiunile lor obișnuite de tragere, valorile lui  $n$  variază între 3 și 4 (circa  $1/2$  învârtire pe secundă). Pentru proiectilele de mare calibru, valorile lui  $n$  sunt mai mici, astfel, pentru proiectilul de 400 m.m. valoarea lui  $n$  este vecină de unu (circa  $1/6$  învârtire pe secundă).

<sup>1)</sup> Pentru proiectilele uzuale, valoarea acestei cantități nu diferă mult de 8 la 10 (*Esclangon*).

<sup>2)</sup> Coeficientul balistic fiind

$$c = i \Delta \frac{a_1^2}{p} = \frac{i \Delta c}{\left(\frac{p}{a_1^2}\right)}$$

vedem, că lăsând la o parte pe  $i \Delta$ , acest coeficient variază invers proporțional cu  $\left(\frac{p}{a_1^2}\right)$  raport care caracterizează greutatea proiectilului pe unitatea de secțiune și este deci proporțional cu  $a_1$ .



4. Studiul părții ne-periodice. Știm că această parte este

$$z_1 = \frac{C\omega}{a} \tau' + i \frac{A}{a} \tau''$$

ordonatele punctului  $z_1$  fiind

$$u_1 = \frac{C\omega}{a} \tau' \quad \text{și} \quad v_1 = \frac{A}{a} \tau''$$

Putem demonstra că raportul  $\frac{v_1}{u_1}$  este totdeauna foarte mic, cu alte cuvinte că punctul  $z_1$  nu se depărtează decât prea puțin de axul  $Ou$ . Avem, în adevăr,

$$(21) \quad \frac{v_1}{u_1} = \frac{A}{C\omega} \cdot \frac{\tau''}{\tau'}$$

însă (pag. 179)

$$v \frac{d\tau}{dt} = -g \cos \tau \quad \text{de unde} \quad \tau' = -\frac{g \cos \tau}{v}$$

și derivând

$$\tau'' = \frac{g}{v^2} (v \tau' \sin \tau + v' \cos \tau)$$

sau, înlocuind pe  $\cos \tau$  prin  $-\frac{\tau' v}{g}$  și pe  $v'$  prin  $-c F(v) \frac{g \sin \tau^1}{g}$ ,

$$(22) \quad \frac{\tau''}{\tau'} = \frac{g}{v} \left[ 2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right]$$

deci

$$(23) \quad \frac{v_1}{u_1} = \frac{A}{C\omega} \cdot \frac{g}{v} \left[ 2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right].$$

Egalitatea aceasta arată că raportul  $\frac{v_1}{u_1}$  este în adevăr foarte mic de oare-ce atât factorul  $\frac{A}{C\omega}$  cât și celălalt factor sunt mici. Rezultă atunci că axul instantaneu de precesiune se de-

<sup>1)</sup> Egalitatea  $\frac{dv}{dt} = -c F(v) - g \sin \tau$  se obține proiectând accelerația centrului de greutate pe tangenta traectoriei sale, presupunând rezistența aerului tangențială.



părtăză numai foarte puțin de planul perpendicular pe planul traectoriei dus prin tangenta la traectorie.

Pe de altă parte,  $\omega$  și  $\tau'$  fiind totdeauna negativi,  $u_1$  este totdeauna pozitiv, deci axul instantaneu de precesiune se găsește în ori-ce moment la dreapta planului de tragere.

La începutul mișcării, raportul  $\frac{\tau''}{\tau'}$  fiind pozitiv potrivit egalității (22) iar  $\omega$  negativ, egalitatea (21) arată că  $u_1$  și  $v_1$  sunt atunci de semne contrarii, adică  $v_1$  este negativ.

Semnul lui  $v_1$  se schimbă apoi odată cu trecerea lui  $v_1$  prin valoarea zero, care are loc potrivit egalității (23) în punctul de pe traectorie unde

$$2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) = 0.$$

Acest punct se găsește situat între vârful traectoriei și punctul de viteză minimă, căci pentru acesta știm că

$$\sin \tau + \frac{c}{g} F(v) = 0.$$

La infinit, adică atunci când  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , avem  $\tau' = 0$  și ca urmare  $\tau'' = 0$ , deci  $u_1 = 0$  și  $v_1 = 0$ . Axul instantaneu de precesiune coincide atunci cu tangenta.

Depărtarea axului instantaneu de precesiune de planul de tragere. Cum  $v_1$  este totdeauna foarte mic, variațiile acestei depărtări sunt sensibil egale cu variațiile lui  $u_1$  în timpul mișcării.

Ori, ținând seama că

$$n = \frac{a}{C\omega} \quad \text{și} \quad \tau' = -\frac{g \cos \tau}{v}$$

putem scrie

$$(24) \quad u_1 = \frac{C\omega}{a} \tau' = -\frac{1}{n} \frac{g \cos \tau}{v}$$

și egalitatea aceasta stabilește mai întâi că  $u_1$  este totdeauna mic. Spre exemplu, în vârful traectoriei unde  $\tau = 0$ , dacă  $n = 4$  și  $v = 300$  avem  $u_1 = \frac{1}{120}$  (luând  $g = 10$ ) ceea ce corespunde la



un unghi de circa 30 de minute. Pentru proiectilele de calibru mare, știm că  $n$  are valori mai mici și se pot obține 4 la 5 grade; astfel, în cazul  $n=1$  și  $v=150$ , avem  $u_1 = \frac{1}{15}$  valoare care corespunde la circa 4 grade de unghi.

Să luăm acum derivata lui  $u_1$ . Scriind

$$u_1 = \frac{\tau'}{n}$$

obținem prin derivare

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{n\tau'' - n'\tau'}{n^2}$$

însă

$$n = \frac{a}{C\omega} = \frac{s(1+\mu)}{C\omega} \quad \frac{p}{g} c \cdot F(v)$$

deci

$$n' = \frac{s(1+\mu)}{C\omega} \cdot \frac{p}{g} c \cdot v' F'(v) = \frac{n}{F(v)} \cdot v' F'(v)$$

și substituirea acestei valori în expresia derivatei  $\frac{du_1}{dt}$  ne dă:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\tau'' F(v) - \tau' v' F'(v)}{n F(v)}$$

Ținând acum seama de cele două egalități cunoscute

$$\tau'' = \tau' \frac{g}{v} \left[ 2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right]$$

și

$$v' = -c F(v) - g \sin \tau$$

derivata devine

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\tau'}{n} \cdot \frac{1}{v} \left[ 2g \sin \tau + c F(v) + v \frac{F'(v)}{F(v)} \{c F(v) + g \sin \tau\} \right]$$

sau, punând  $v \frac{F'(v)}{F(v)} = m$ ,

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{u_1}{v} \left[ (m+2) g \sin \tau + (m+1) c F(v) \right].$$

Cum  $u_1$  este totdeauna pozitiv, semnul derivatei depinde de acela al termenului închis între paranteze. Ori, la începutul mișcării acest termen este pozitiv;  $\frac{du_1}{dt}$  fiind atunci pozitiv,  $u_1$



crește și această creștere se urmează până în punctul de pe traectorie unde

$$(m + 2) g \sin \tau + (m + 1) c F(v) = 0$$

sau

$$\left(\frac{m + 2}{m + 1}\right) \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) = 0.$$

Cum, ori-care ar fi valoarea lui  $m$ , avem

$$2 > \frac{m + 2}{m + 1} > 1$$

se vede că acel punct este cuprins între vârf și punctul de viteză minimă; valoarea lui  $u_1$  este atunci maximă, apoi  $u_1$  descrește și după cum arată egalitatea (24) valoarea lui tinde către zero când  $\tau$  tinde către  $-\frac{\pi}{2}$ , adică la infinit.

**5. Rezumat.** Rezultatele precedente pot fi rezumate în felul următor:

1). *In cursul mișcării în aer, axul proiectilului se învârteste în jurul unui ax trecând prin centrul de greutate și denumit ax instantaneu de precesiune, cu o viteză unghiulară*  

$$n = \frac{a}{C\omega}.$$

2). *Depărtarea unghiulară dintre axul proiectilului și axul de precesiune are variații periodice duble (în timp și în spațiu).*

3). *Axul de precesiune rămâne neconținut la dreapta planului de tragere, pentru tunurile ghintuite la dreapta; el nu se depărtează decât foarte puțin de planul perpendicular pe planul de tragere dus prin tangentă și tinde la limită către tangenta traectoriei.*

4). *Depărtarea unghiulară dintre axul de precesiune și planul de tragere este totdeauna mică; această depărtare este maximă pentru un punct situat între vârful traectoriei și punctul de viteză minimă.*

**6. Notă.** In mod geometric, studiul mișcării axului proiectilului în raport de tangentă se poate face în felul următor:

Proiectilul se comportă în aer ca un giroscop mare și greu. Dacă tangenta GT ar rămâne fixă în spațiu, am putea atunci



să determinăm în mod expeditiv mișcarea axului său prin aplicațiunea principiului giroscopic despre care am vorbit la capitolul mișcării unui solid în jurul unui punct fix și pe care l-am aplicat mișcării sfârlezei giroscopice (pag. 375).

Reamintim că principiul giroscopic constă în a admite că momentul cinetic, adică momentul cantităților de mișcare, coincide cu axul proiectilului când proiectilul se învârtește cu o foarte mare viteză în jurul acestui ax.

Fie, după cum arată figura, GT tangenta traectoriei, GZ direcția axului și R rezistența aerului aplicată în punctul C și conținută după cum știm în planul TGZ.

Cum  $\omega$  este negativ (ghinturi răsucite dela stânga la dreapta, privite din spatele proiectilului) momentul cinetic  $C\omega$  este așezat pe porțiunea negativă a axului GZ; fie GK vectorul său reprezentativ. Dela teoremele generale ale Dinamicii știm că viteza punctului K este egală cu momentul forțelor care lucrează asupra proiectilului în raport de punctul G, considerat ca fix. Cum momentul greutatei în raport de G, este nul, rămâne ca moment numai acela al rezistenței R care are ca expresie  $R s \theta_1$ , adică  $R s (1 + \mu) \theta$  sau  $a \theta$ , acest moment fiind perpendicular pe planul TGZ și îndreptat în sus de planul figurei, pentru ca direcția dela C la R să fie văzută dela stânga la dreapta.

Fie acum KV viteza punctului K, egală și paralelă cu momentul  $a \theta$  al rezistenței R. Această viteză tinde să învârtască punctul K dela stânga la dreapta în jurul prelungirii GK a tangentei și deci punctul C dela dreapta la stânga în jurul tangentei GT. Viteza de precesiune, adică viteza unghiulară de rotație a axului GZ în jurul tangentei, are deci același sens ca rotația proprie a proiectilului în jurul axului său. Dacă însemnăm prin  $n$  valoarea acestei viteze, avem pe figură

$$KV = KH \cdot n = GK \cdot \theta \cdot n = C\omega \cdot \theta \cdot n$$

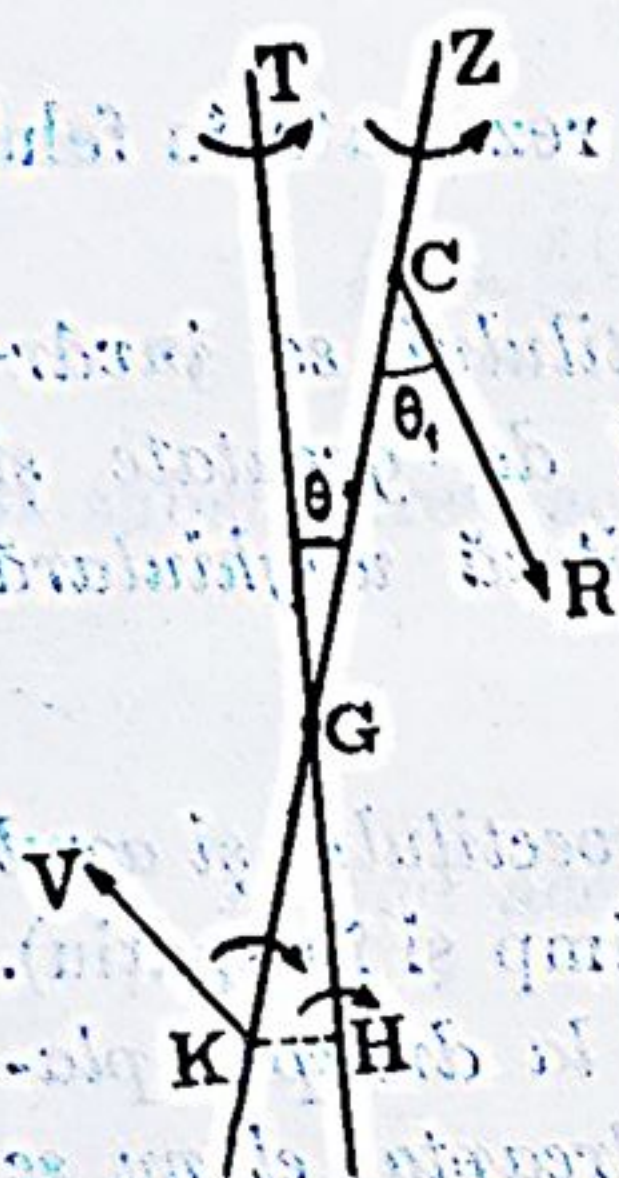


Fig. 242.



și aplicația teoremei de Dinamică ne dă

$$C\omega \cdot \theta' \cdot n = a : \theta$$

de unde

$$n = \frac{a}{C\omega} \cdot \theta$$

Dacă tangenta GT ar fi fixă în spațiu, după cum s'a presupus, axul proiectilului s'ar învârti deci neconținut în jurul tangentei, ca sfârleaza în jurul verticalei, cu viteza de precesiune  $\frac{a}{C\omega}$ . Cum însă tangenta se înclină pe orizont cu viteza unghiulară

$$\tau' = \frac{g \cos \tau}{v}$$

trebuie să combinăm mișcarea de rotație a axului în jurul tangentei cu această mișcare de înclinare.

Ca și în figura 238, să considerăm pe direcția GT punctul O, situat la distanța de 1, de G, și prin acest punct să ducem un plan perpendicular pe tangentă. Fie în acest plan: Ov, perpendiculara ridicată pe OT, conținută în planul vertical al traiectoriei și îndreptată în sus; Ou, orizontala perpendiculară pe planul TOv și îndreptată spre dreapta. Axul proiectilului întâl-

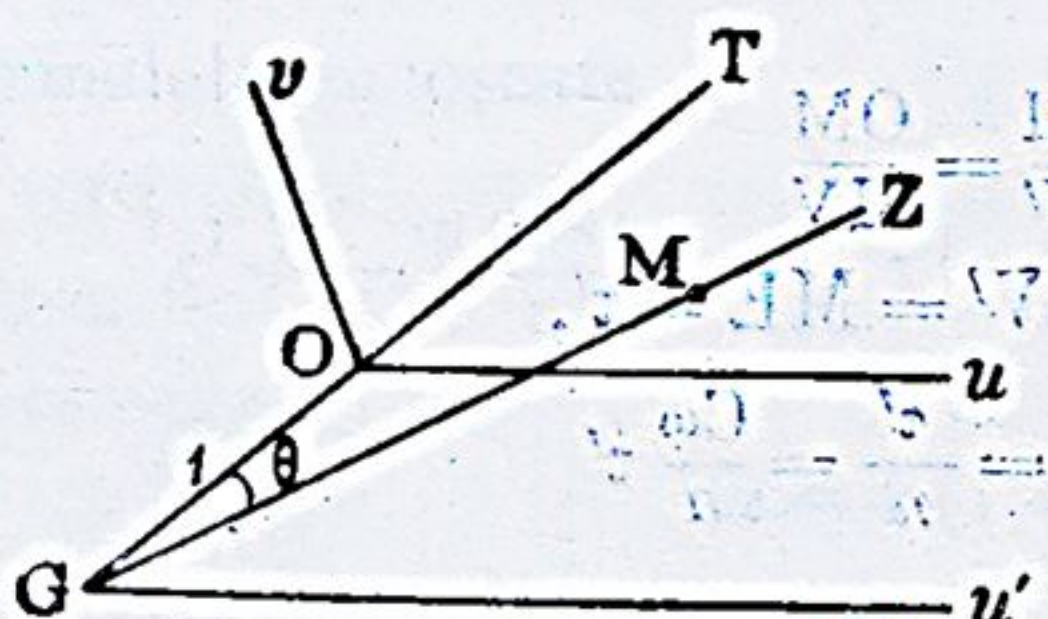


Fig. 243

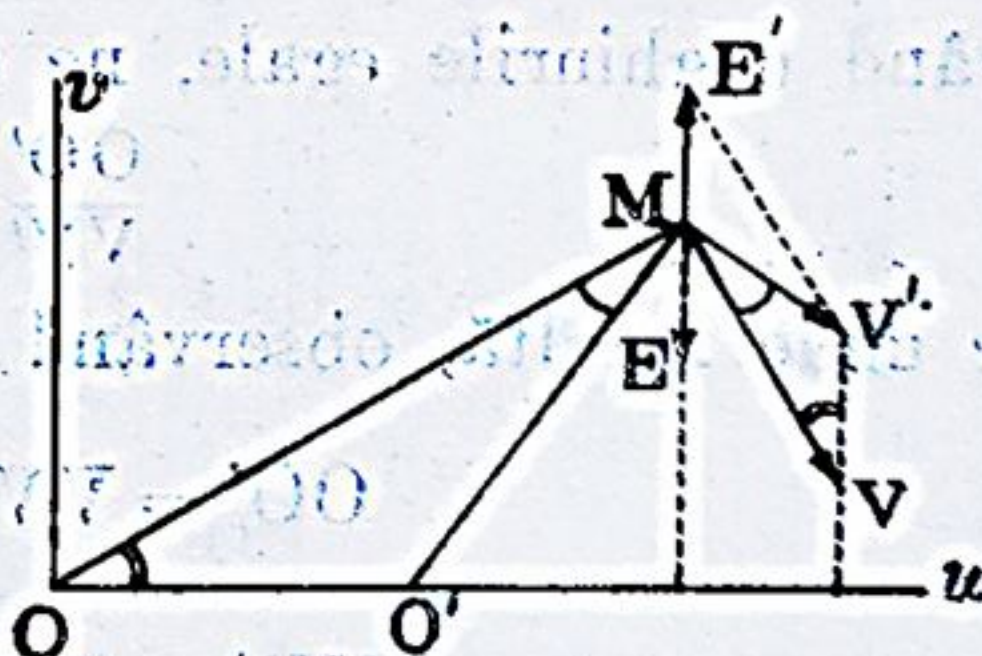


Fig. 244

nește planul  $uOv$  într'un punct M. Să determinăm în mod geometric mișcarea acestui punct, în raport de axele Ou și Ov considerat ca fixe, ținând socoteală de înclinarea tangentei GT pe orizont.

Mișcarea punctului M în planul  $uOv$  fiind o mișcare relativă, viteza ei este rezultanta vitezei de rotație a lui M în



jurul tangentei și a unei viteze egală și direct opusă vitezei de antrenare a acestui punct, când el participă la mișcarea de rotație a planului  $uOv$  în jurul orizontalei  $Gu'$ , mișcare determinată de înclinarea tangentei.

Viteza de rotație în jurul tangentei este un vector  $MV$  perpendicular pe  $OM$ , conținut în planul  $uOv$  și îndreptat în jos, de oare-ce rotația în jurul lui  $GT$  se face dela dreapta la stânga; avem

$$MV = OM \cdot n$$

$n$  fiind viteza de precesiune  $\frac{a}{C\omega}$ .

Viteza de antrenare a punctului  $M$  în rotația planului  $uOv$  în jurul orizontalei  $Gu'$  este și ea conținută în acest plan fiind paralelă cu  $Ov$ ; fie  $ME$  vectorul ei reprezentativ. Valoarea acestei viteze fiind sensibil egală cu aceea a punctului  $O$ , putem scrie

$$ME = GO \cdot \tau' = \tau'$$

căci  $GO$  este egal cu 1. Compunerea vectorului  $MV$  cu vectorul  $ME'$  egal și direct opus lui  $ME$  ne dă un vector  $MV'$  care reprezintă viteza relativă a lui  $M$  în planul  $uOv$ .

Din punctul  $M$  să ducem acum perpendiculara  $MO'$  pe  $MV'$ . Cele două triunghiuri  $OMO'$  și  $VMV'$  fiind asemenea, ca având unghiurile egale, ne dau

$$\frac{OO'}{VV'} = \frac{O'M}{MV'} = \frac{OM}{MV}$$

de unde rezultă, observând că  $VV' = ME = \tau'$ ,

$$OO' = VV' \cdot \frac{OM}{MV} = \frac{\tau'}{n} = \frac{C\omega}{a} \tau'$$

$$MV' = O'M \cdot \frac{MV}{OM} = O'M \cdot n.$$

Aceste două egalități arată că, în fiecare moment, viteza punctului  $M$  este aceeași ca viteza pe care ar avea-o acest punct dacă s'ar învârti în jurul punctului  $O'$  de pe axul  $Ou$  cu viteza de precesiune  $n = \frac{a}{C\omega}$ .

De altfel,  $OO' = u_1$ , adică, egal cu  $z_1$ , când se neglijează ordonata  $v_1$ .



#### IV. DETERMINAREA MIȘCĂRII AXULUI PROECTILULUI PE TOATĂ ÎNTINDEREA TRAECTORIEI.

Pe întinderea ori căruia dintre arcurile în care dividem traectoria centrului de greutate al proiectilului, după principiul știut (pag. 433) poziția axului proiectilului este determinată de valoarea  $z = u + iv$  care are ca expresie

$$(25) \quad z = \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a} + A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t}$$

unde

$$r_1 = i \frac{C\omega}{2A} (1 + \varepsilon) \quad , \quad r_2 = i \frac{C\omega}{2A} (1 - \varepsilon)$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}$$

în care expresie,  $\tau'$ ,  $\tau''$  și  $a$  reprezintă valorile mijlocii ale acestor elemente din lungul arcului considerat iar  $A_1$  și  $B_1$  valorile ce rezultă pentru aceste constante din cunoașterea condițiilor inițiale care corespund originii fie căruia dintre arcuri.

Astfel, pentru primul arc de traectorie  $\tau_0$  la  $\tau_1$ , calculând pe  $v_1$  apoi înlocuind pe  $\tau$  prin  $\frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$  și pe  $v$  prin  $\frac{v_0 + v_1}{2}$  în formulele cunoscute

$$\tau' = -\frac{g \cos \tau}{v}, \quad \tau'' = \tau' \left( \frac{g}{v} \right) \left[ 2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right]$$

$$a = s(1 + \mu) \frac{p}{g} c F(v)$$

obținem valorile mijlocii ale elementelor  $\tau'$ ,  $\tau''$  și  $a$ , apoi, dacă spre exemplu condițiile inițiale ale mișcării sunt acelea specificate la pag. 451, adică

$$\theta_0 = 0 \quad \text{și} \quad \psi_0 = \psi'_0 = 0$$

se determină valorile constantelor  $A_1$  și  $B_1$  așa după cum s'a arătat la aceea pagină.

În expresia elementului  $a$  intră valorile cantităților  $s$  și  $\mu$ . Pe acestea nu le cunoaștem însă așa cum ar trebui. Ele se pot



determina experimental în tuneluri aerodinamice pe forme omo-  
tetică proiectilelor avute în vedere. Nu s'au făcut însă până azi  
experiențe decât cu viteze de cel mult 30 la 40 metri, așa  
că pentru vitezele superioare suntem nevoiți de a păstra pentru  
s și  $\mu$  aceleași valori, considerându-le astfel ca constante pe  
toată întinderea traectoriei. *Și vedem prin aceasta un exemplu*  
*când experiența s'a lăsat întrecută de teorie, în loc de a o în-*  
*soți și a o ajuta.*

Odată determinate valorile lui  $z$  din care rezultă  $u$  și  $v$ ,  
pentru primul arc de traectorie, se trece la arcul al doilea  $\tau_1$   
la  $\tau_2$  în felul următor:

La sfârșitul primului arc se calculează atât valoarea  $z_1$   
cât și valoarea  $z'_1$ , care vor servi amândouă drept condiții ini-  
țiale pentru arcul următor. Pentru determinarea lui  $z'_1$  se deri-  
vează relația (25) considerându-se  $\tau'$ ,  $\tau''$  și  $a$  ca constante.

Valorile lui  $z$  pentru arcul al doilea urmând a fi calculate  
prin formula

$$(26) \quad z_2 = \left( \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a} \right)_2 + A_2 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}$$

valorile mijlocii ale elementelor  $\tau'$ ,  $\tau''$  și  $a$ , care trebuiesc intro-  
duse în această formulă, se vor determina tot astfel cum s'a  
arătat pentru primul arc, noua valoare a lui  $a$  permițând apoi  
de a calcula pe  $r_1$  și  $r_2$ . Rămâne să determinăm constantele  
 $A_2$  și  $B_2$ .

Pentru aceasta, vom egala valorile  $z_1$  și  $z'_1$  dela sfârșitul  
arcului întâi, cu valorile date de relația (26) și de derivata ei  
pentru  $z_2$  și  $z'_2$  când facem pe  $t$  egal cu zero, adică socotind  
timpul pe arcul al doilea cu începere dela origina  $\tau_1$  a acestui arc.

Obținem astfel egalitățile

$$z_1 = \left( \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a} \right)_2 + A_2 + B_2$$

și

$$z'_1 = A_2 r_1 + B_2 r_2$$

din care rezultă valorile noilor constante  $A_2$  și  $B_2$ . Și așa  
mai departe pentru toate arcurile următoare.



Oa o primă aproximație, putem începe prin a calcula mișcarea axului instantaneu de precesiune. Aceasta rezultă din determinarea valorilor

$$z_1 = \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a}$$

adică

$$u_1 = \frac{C\omega\tau'}{a} \quad \text{și} \quad v_1 = \frac{A\tau''}{a}$$

$z_1$  fiind aici extremitatea axului în chestiune.

Cât despre *figura geometrică* a curbei descrise de extremitatea  $z$  a axului proiectilului în planul axelor cordonate  $Ou$  și  $Ov$ , rezultă din cele arătate până aici, că *această figură este constituită dintr'o serie de spire învârtite în jurul extremității  $z_1$  a axului instantaneu de precesiune, ordonata  $v_1$  a punctului  $z_1$  fiind foarte mică iar abscisa  $u_1$ , pozitivă pentru tunurile ghintuite la dreapta, crescând necontenit până în apropierea punctului de viteză minimă al traectoriei, după care  $u_1$  descrește și tinde la limită către zero.*

Dacă la începutul mișcării, axul proiectilului coincide cu direcția tangentei, spirele încep bine înțeles din origina  $O$ .

## V. STABILITATEA PROECTILELOR PE TRAECTORIE.

Se zice că un proiectil are stabilitate pe traectorie când unghiul  $\theta$  dintre axul proiectilului și tangentă rămâne mic în tot cursul mișcării. Artileria nu utilizează de altfel decât proiectile care satisfac acestei condiții, căci dacă unghiul  $\theta$  nu ar rămâne mic, proiectilul nu s'ar mai putea prezenta cu vârful înainte în punctul de cădere, precizia tragerii ar suferi iar bătăile s'ar micșora fiindcă la valori mari ale unghiului  $\theta$  corespund și rezistențe mari din partea aerului.

După cum a stabilit *M. de Sparre*, pentru ca unghiul  $\theta$  să rămână mic, este necesar ca să avem în tot cursul mișcării (pag. 450)

$$(27) \quad \frac{C^2 \omega^2}{4 A a} > 1$$



inegalitate <sup>1)</sup>, care mai poate fi scrisă înlocuind pe  $\alpha$  prin expresia sa  $s(1 + \mu) \frac{p}{g} c F(v)$ :

$$(28) \quad \frac{g}{4p} \frac{C^2 \omega^2}{A s (1 + \mu) c F(v)} > 1$$

sau încă, dacă înlocuim și pe  $c$  și  $\omega$  prin expresiile lor cunoscute și anume (pag. 423 și 456)

$$c = i \Delta \frac{a_1^2}{p} \quad \text{și} \quad \omega = \frac{2 v_0 \operatorname{tg} \eta}{a_1}$$

unde  $a_1$  reprezintă calibrul proiectilului iar  $\eta$  înclinarea ghinturilor:

$$(29) \quad \frac{C^2 g v_0^2 \operatorname{tg}^2 \eta}{A s (1 + \mu) a_1^4 i \Delta F(v)} > 1.$$

Această inegalitate trebuie să aibă loc, după cum am spus, în tot cursul mișcării proiectilului pe traectorie. Avem însă de observat, că dacă inegalitatea are loc la începutul mișcării, ea are loc și mai departe căci în lungul traectoriei produsul  $\Delta F(v)$  rămâne tot timpul mai mic decât  $\Delta_0 F(v_0)$ . *Inegalitatea precedentă, în care înlocuim pe  $\Delta F(v)$  prin  $\Delta_0 F(v_0)$  ne procură deci o valoare minimă pentru  $\eta$  și deci pentru viteza de rotație  $\omega$  a proiectilului necesară stabilității la origină.*

Acestei stabilități i s'a dat numele de *stabilitate esențială*. Ea asigură proiectilului o mișcare cu vârful înainte pe primele elemente ale traectoriei.

Mai putem observa, că pentru un același tun și proiectil, adică pentru aceleași valori  $C$ ,  $A$ , și  $\eta$ , dacă modificăm viteza inițială  $v_0$ , cum avem aproximativ  $F(v) = \beta v^2$ ,  $\beta$  fiind o constantă, raportul  $\frac{v_0^2}{F(v_0)}$  nu variază mult, așa că potrivit inegalității de mai sus: *dacă nu există instabilitate la origină pentru o viteză dată, nu va exista nici pentru o altă viteză inițială.*

M. de Sparre a căutat a preciza valoarea optimă a lui  $\omega$ ,

<sup>1)</sup> Această inegalitate se aplică și problemei stabilității sfârșitului.



în cazul când condițiile inițiale ale mișcării sunt acelea pe care le-am specificat la pag. 451, adică

$$\theta_0 = 0, \quad \phi_0 = \psi'_0 = 0.$$

Să reluăm egalitatea

$$z = \frac{C\omega \tau' + i A \tau''}{a} + A_1 e^{r_1 \tau'} + B_1 e^{r_2 \tau'}$$

unde  $r_1$  și  $r_2$  conțin în factor pe  $i$ . Dacă neglijăm, după cum am mai făcut, pe  $\frac{A}{a} \tau''$  față de  $\frac{C\omega}{a} \tau'$ , modulul lui  $z$  este mai mic decât suma celor trei moduli

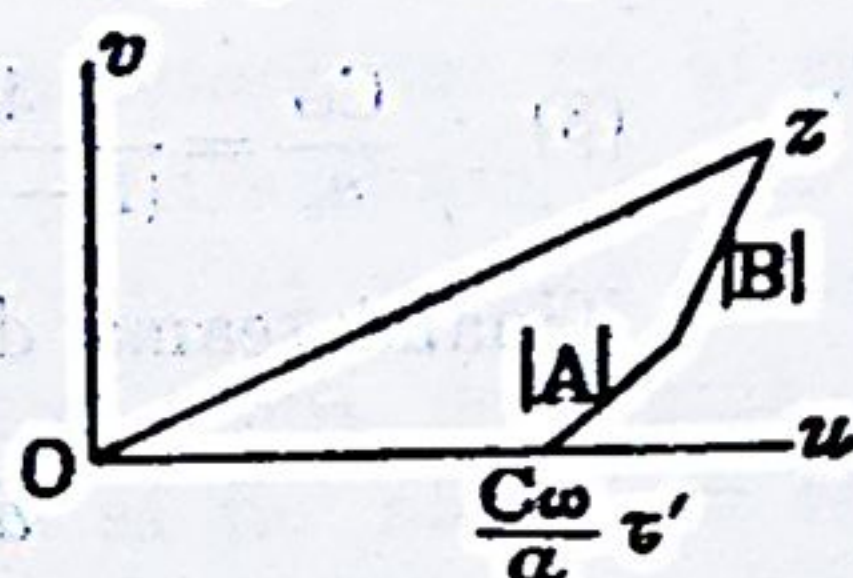


Fig. 245

$$\frac{C\omega}{a} \tau', \quad |A_1| \quad \text{și} \quad |B_1|$$

$\frac{C\omega}{a} \tau'$  fiind o cantitate pozitivă pentru tunurile ghintuite la dreapta ( $\omega$  și  $\tau'$  amândoi negativi). Fie  $d$  această sumă, adică

$$d = \frac{C\omega}{a} \tau'_0 + |A_1| + |B_1|.$$

Să considerăm primul arc de traectorie. În condițiile inițiale de mai sus, putem înlocui valorile mijlocii  $\tau'$  și  $a$  prin  $\tau'_0$  și  $a_0$ , iar pe de altă parte modulii  $|A_1|$  și  $|B_1|$  știm că au ca expresii:

$$|A_1| = \frac{A}{C\omega} \tau'_0 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \quad \text{și} \quad |B_1| = \frac{A}{C\omega} \tau'_0 \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

Făcând aceste înlocuiri, avem ca valoare a lui  $d$  pe arcul considerat:

$$d = \tau'_0 \left[ \frac{C\omega}{a_0} + \frac{A}{C\omega \varepsilon} \left\{ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right\} \right]$$

adică

$$d = \tau'_0 \left[ \frac{C\omega}{a_0} + \frac{2A}{C\omega \varepsilon} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right].$$

Această valoare depinde de  $\omega$ , oăoi  $\varepsilon$  este funcție de  $\omega$ :

$$(a) \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{4Aa_0}{C^2\omega^2}.$$



Ori, modulul lui  $z$  măsoară amplitudinea unghiului  $\theta$  pe care-l formează axul proiectilului cu tangenta traectoriei. Deci, valoarea lui  $\omega$  care asigură lui  $\theta$  cele mai mici amplitudini pe prima porțiune de traectorie este aceea care face pe  $d$  minim.

Să căutăm acest minimum, luând însă ca variabilă independentă pe  $\varepsilon$ ; valoarea lui  $\omega$  va rezulta apoi din aceea găsită pentru  $\varepsilon$ ,

Din relația ( $\alpha$ ) deducem:

$$(\beta) \quad \frac{C\omega}{a_0} = \frac{4A}{(1-\varepsilon^2)C\omega} \quad \text{și} \quad (\gamma) \quad \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{Aa_0}}.$$

Ținând seama de egalitatea ( $\beta$ ) expresia lui  $d$  devine

$$d = \tau'_0 \frac{2A}{C\omega} \cdot \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

iar înlocuind acum pe  $\frac{1}{C\omega}$  prin expresia sa ( $\gamma$ ) obținem

$$d = \tau'_0 \sqrt{\frac{A}{a_0}} \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon \sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Minimul lui  $d$  depinde după cum se vede de minimul funcției de  $\varepsilon$ :

$$f(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon \sqrt{1-\varepsilon}}$$

a cărei primă derivată fiind

$$f'(\varepsilon) = \frac{(2\varepsilon-1)\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

ne dă, prin egalarea ei cu zero și având în vedere că  $\varepsilon$  nu poate fi negativ,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

și prin urmare

$$(30) \quad \frac{C^2\omega^2}{4Aa_0} = \frac{4}{3}$$

relație din care rezultă valoarea lui  $\omega$ , care asigură unghiului  $\theta$  pe primul arc de traectorie o amplitudine minimă.

Acest rezultat datorit lui M. de Sparre corespunde cazului



când condițiile inițiale ale mișcării sunt, după cum am spus:  $\theta_0 = 0$ ,  $\psi_0 = \psi'_0 = 0$  din care rezultă  $\theta'_0 = \tau'_0$ . Totuși, experiența probează că valoarea respectivă a lui  $\omega$  convine pentru toate cazurile normale de tragere.

Potrivit celor mai sus arătate, valoarea lui  $\omega$  care rezultă din egalitatea (30) asigură nu numai la început dar în tot cursul mișcării condiția

$$\frac{C^2 \omega^2}{4 A a} > 1.$$

Această condiție fiind însă numai necesară dar nu și suficientă pentru stabilitatea proiectilului pe traectorie, vedem că valoarea definitivă de adoptat pentru  $\omega$  care să convină întregii traectorii rămâne tot ne-precizată. Putem totuși determina un interval în care această valoare urmează să fie aleasă, în felul următor:

Fie  $\omega_1$  valoarea care rezultă din egalitatea (30). Să comparăm proiectilul în cauză cu un proiectil omotetic de aceeași putere balistică și recunoscut la trageri ca având o bună stabilitate pe traectorie. Fie  $\delta$  depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere pentru acest proiectil, egală de altfel cu  $\frac{C\omega}{a} \tau'$ ,  $a$  și  $\tau'$  referindu-se la punctul de pe traectorie care corespunde lui  $\delta$ . Considerând punctul similar pentru proiectilul celălalt, cu valorile respective ale elementelor  $C$ ,  $a$  și  $\tau'$ , egalitatea

$$\frac{C\omega}{a} \tau' = \delta \quad ^1)$$

ne va da o valoare  $\omega_2$  care este viteza de rotație pe care ar trebui să o aibe proiectilul în cauză pentru ca depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere, pentru acest proiectil, să fie egală cu  $\delta$ . Intervalul în chestiune este atunci intervalul dintre  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , în care, după o discuțiune, sau

<sup>1)</sup> Sau  $\frac{C\omega g^2}{s(1+\mu) p c v F(v)} = \delta$ , dacă înlocuim pe  $\tau'$  și pe  $a$  prin expresiile lor:  $\tau' = -\frac{g \cos \tau}{v}$  și  $a = s(1+\mu) \frac{p}{g} c F(v)$ ,  $\tau'$  fiind unghiul corespunzător depărtării maxime și  $v$  viteza respectivă.



prin comparație cu alte proiectile analoage, se va alege pentru  $\omega$  valoarea cea mai convenabilă.

*Observațiuni.* Inegalitatea (28) arată că pentru un tun dat, dacă se utilizează proiectile din ce în ce mai lungi, cum raportul  $\frac{C^2}{A}$  descrește atunci neîncetat, primul membru al inegalității descrește și el, și, când încetează de a fi superior unității se intră în domeniul instabilității. Mărirea greutatei proiectilului grăbește și ea atingerea acestui domeniu.

Pentru stabilitatea proiectilelor foarte lungi este deci necesar ca viteza de rotație  $\omega$  să fie foarte mare, însă, o asemenea viteză, bună la origină, este nefastă în cursul mișcării, căci depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere, care este proporțională cu  $\omega$ , devine atunci prea mare. Se pot însă concilia aceste două condiții contradictorii creându-se frecări artificiale pe suprafața proiectilului, care să aibe ca efect de a micșora treptat valoarea inițială a lui  $\omega$ .

În cazul proiectilelor alungite prin adăogarea unei coafe goale, raportul  $\frac{C^2}{A}$  variază puțin, însă s crește, căci, prin adăogarea coafei, centrul de greutate se deplasează în lungul axului mult mai puțin decât centrul de rezistență. Greutatea  $p$  a proiectilului rămânând sensibil aceeași, rezultă în cele din urmă potrivit inegalității (28) că pentru stabilitatea lor esențială, proiectilele coafate au nevoie de o viteză de rotație  $\omega$  mai mică decât proiectilele pline de aceeași lungime.

M. de Sparre, în numeroasele sale lucrări, s'a ocupat și de influența diverselor defecte ale proiectilului asupra stabilității. Astfel, dânsul a putut demonstra că neregularitățile mișcării datorite fie unei diferențe dintre direcția vitezei inițiale și axul proiectilului, fie unei ușoare excentricități a proiectilului, au o slabă influență. Din potrivă, neregularitățile datorite unei diferențe dintre axul de figură al proiectilului și axul principal de inerție vecin, sau diferenței dintre axul de figură și vectorul rotației proiectilului, au o influență mai mare.

De asemenea constatări, urmează a se ține seama când se fixează toleranțele de fabricațiune ale proiectilelor.



## VI. EFECTUL FRECĂRILOR LATERALE.

În ceea ce precedă, am neglijat frecările laterale  $F$  ale aerului pe suprafața proiectilului, făcând în consecință pe  $k$  egal cu zero. Să ținem acum seama și de aceste frecări, presupunând pe  $k$  diferit de zero.

Reluând ecuația (15):

$$Az'' - i C \omega z' - (a + i k \omega a) z = -C \omega \tau' - i A \tau''$$

am văzut că soluția generală a acestei ecuații este

$$z = \frac{C \omega \tau' + i A \tau''}{a + i k \omega a} + A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t}$$

$r_1$  și  $r_2$  fiind rădăcinile ecuației caracteristice

$$A r^2 - i C \omega r - (a + i k \omega a) = 0$$

adică

$$r = i \frac{C \omega}{2A} \pm \frac{i}{2A} \sqrt{C^2 \omega^2 - 4A(a + i k \omega a)}.$$

Ori, cantitatea de sub radical poate fi pusă sub forma

$$(C^2 \omega^2 - 4Aa) \left( 1 - i \frac{4Ak\omega a}{C^2 \omega^2 - 4Aa} \right)$$

și, dacă presupunem frecările mici, atunci  $k\alpha$  fiind mic putem scrie <sup>1)</sup>

$$\sqrt{1 - i \frac{4Ak\omega a}{C^2 \omega^2 - 4Aa}} = 1 - i \frac{2Ak\omega a}{C^2 \omega^2 - 4Aa}$$

asa încât expresiunea lui  $r$  devine

$$r = i \frac{C \omega}{2A} \pm \frac{i}{2A} \sqrt{C^2 \omega^2 - 4Aa} \left( 1 - i \frac{2Ak\omega a}{C^2 \omega^2 - 4Aa} \right)$$

sau

$$r = i \left[ \frac{C \omega}{2A} \pm \frac{C \omega}{2A} \sqrt{1 - \frac{4Aa}{C^2 \omega^2}} \right] \pm \frac{k\alpha}{C \sqrt{1 - \frac{4Aa}{C^2 \omega^2}}}$$

<sup>1)</sup> Potrivit formulei  $(1 - \omega)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} \omega + \dots$



Punând în sfârșit ca și până acum

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4 A a}{C^2 \omega^2}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{2 A a}{C^2 \omega^2}$$

avem

$$r = i \frac{C \omega}{2 A} (1 \pm \varepsilon) \pm \frac{k a}{C \varepsilon}$$

semnele  $+$  corespunzându-se reciproc și de asemenea semnele  $-$ .

Soluția generală este în consecință

$$z = z_1 + z_2$$

unde

$$z = \frac{C \omega \tau' + i A \tau''}{a + i k \omega a}$$

și

$$z_2 = A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} \cdot e^{\frac{k a}{C \varepsilon} t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t} \cdot e^{-\frac{k a}{C \varepsilon} t}.$$

Scriind pe  $z_1$  sub forma

$$z_1 = \frac{\frac{C \omega}{a} \tau' + i \frac{A}{a} \tau''}{1 + i \frac{k \omega a}{a}}$$

observăm că punctul  $z_1$  (fig. 239) ale căruia coordonate erau

$$u_1 = \frac{C \omega}{a} \tau' \quad \text{și} \quad v_1 = \frac{A}{a} \tau''$$

iar modulul egal cu  $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ , are acum, când ținem seama de frecări, un modul egal cu

$$\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \omega^2 a^2}{a^2}}}$$

adică un modul mai mic și cu atât mai mic cu cât  $\omega$  și  $k$  sunt mai mari. Așa dar, *frecările laterale apropie axul instantaneu de precesiune de tangentă și aceasta cu atât mai mult cu cât viteza de rotație a proiectilului în jurul axului său este mai mare și frecările mai mari.*

Dar, pentru ca apropierea axului instantaneu de precesiune de tangenta traectoriei să corespundă în același timp și unei apropieri a axului proiectilului de această tangentă, mai



este necesar ca modulul lui  $z_2$  să rămână mic ca în cazul când n'ar exista frecări. Cum patratul acestui modul este

$$\rho^2 = A_1^2 e^{\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} + B_1^2 e^{-\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} + 2A_1B_1 \cos \frac{C\omega}{A}t$$

vedem că valoarea sa depinde de valorile constantelor  $A_1$  și  $B_1$  precum și de acelea ale exponențialelor

$$e^{\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} \quad \text{și} \quad e^{-\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t}.$$

Ori, în condițiunile normale de tragere, valorile constantelor de integrațiune  $A_1$  și  $B_1$  sunt totdeauna mici, după cum s'a văzut prin exemplul dela paragraful 2 al capitölului III, iar pe de altă parte valoarea primei exponențiale care crește odată cu  $t$  rămâne totuși mică, atât din cauză că durata totală a parcurgerii traectoriei până la punctul de cădere este relativ mică, cât mai ales pentru că coeficientul exponențial  $\frac{k\alpha}{C\varepsilon}$  este mic. Cea de a doua exponențială descrește cu timpul și această descreștere este evident favorabilă micșorării lui  $\rho$ .

Așa dar valoarea lui  $\rho$  rămâne mică. *Frecările apropiind axul instantaneu de precesiune de tangenta traectoriei și ne-influențând asupra ordinii de mărime a modulului lui  $z_2$ , produc deci un efect de stabilizare, apropiind axul proiectilului de tangentă.* Aceasta însă cu condițiunea ca frecările să fie mici ( $k\alpha$  mic); când sunt din potrivă exagerate, ele devin hotărât vătămătoare.

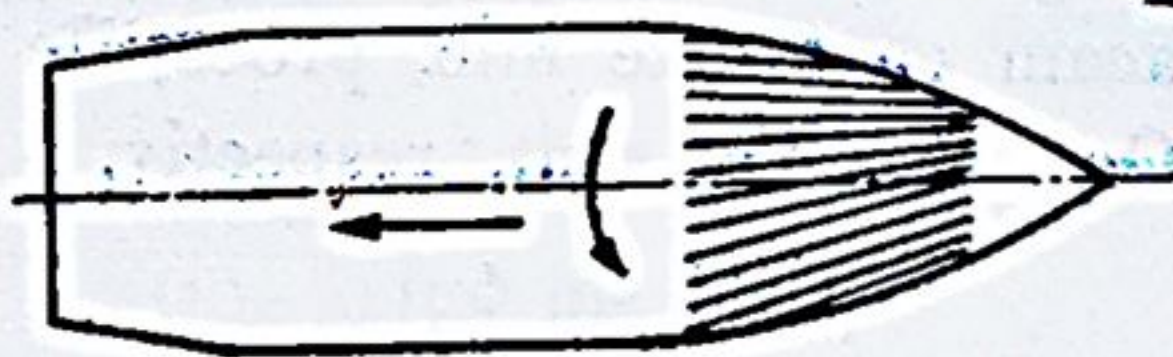


Fig. 246

Astfel, în Franța, nu de multă vreme, s'au putut stabili niște proiectile creându-se frecări artificiale pe partea lor anterioară (fig. 246); exagerându-se apoi aceste frecări, proiectilele au devenit mai puțin stabile chiar de cum erau la început.

Nu încapă nici-o îndoială că este avantajos de a face aspră partea anterioară a proiectilelor și din potrivă perfect netedă partea lor de dinapoi.



## VII. DERIVAȚIUNEA PROECTILELOR.

Să reluăm sistemul de referință  $Gxyz$ , în care  $Gz$  este tangenta traectoriei centrului de greutate al proiectilului, dusă în sensul mișcării;  $Gx$  este orizontala perpendiculară în  $G$  pe planul vertical al traectoriei, îndreptată spre dreapta acestui plan, iar  $Gy$  este perpendiculara dusă planului format de cele două axe  $Gx$  și  $Gz$ , îndreptată în sus și conținută bine înțeles în planul traectoriei.

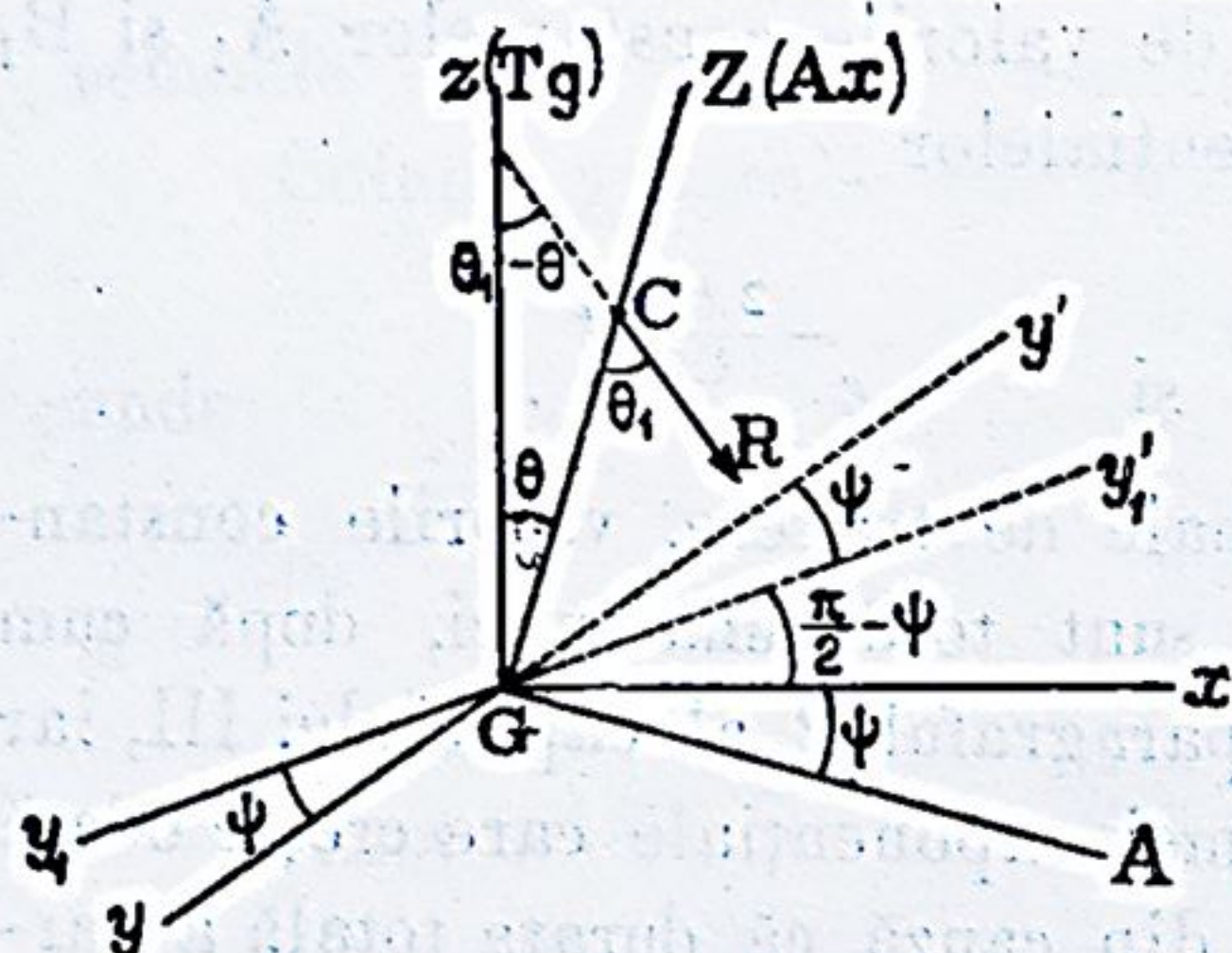


Fig. 247

Neglijând frecările, fie  $R$  rezistența aerului;  $C$  punctul ei de aplicație, adică centrul de rezistență situat pe axul  $GZ$  al proiectilului, și  $y_1$   $Gy'_1$  intersecția planului de rezistență  $zGZ$  cu planul  $xGy$ .

Proiectând forța  $R$  pe direcțiile  $Gz$  și  $Gy'_1$ , obținem

$$-R \cos (\theta_1 - \theta) \quad \text{și} \quad R \sin (\theta_1 - \theta)$$

aceasta din urmă dându-ne apoi în proiecțiune pe  $Gx$  și  $Gy$ :

$$R \sin (\theta_1 - \theta) \sin \psi \quad \text{și} \quad -R \sin (\theta_1 - \theta) \cos \psi.$$

Așa dar, punând  $\theta_1 - \theta = \mu \theta$  și presupunând ca și până acum că  $\theta$  este mic, proiecțiile rezistenței  $R$  pe cele trei axe  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$  sunt, respectiv,

$$\mu R \theta \sin \psi, \quad -\mu R \theta \cos \psi, \quad -R.$$

Dintre aceste trei forțe și referindu-ne la ceea ce am spus la pag. 431, forța  $-R$  reprezintă rezistența tangențială  $R_t$  iar celelalte două sunt componentele forței  $R_n$  pe axele  $Gx$  și  $Gy$ , această forță  $R_n$  fiind de altfel îndreptată pe  $Gy'_1$  și având ca expresie, după cum am spus mai sus,  $R \sin (\theta_1 - \theta)$  sau  $\mu R \theta$ .

Componenta  $\mu R \theta \sin \psi$  a lui  $R_n$ , fiind perpendiculară pe planul traectoriei, depărtează centrul de greutate perpendicular acestui plan, producând ceea ce artileriștii numesc *Derivațiunea*



proectilului. Cealaltă componentă —  $\mu R \theta \cos \psi$ , fiind coprinsă în planul traectoriei, tinde a deplasa centrul de greutate în acest plan.

Introducând variabilele  $u$  și  $v$ , definite prin egalitățile cunoscute,

$$u = \theta \sin \psi, \quad v = -\theta \cos \psi$$

cele două componente ale lui  $R_n$  devin

$$\mu R u, \quad \mu R v.$$

Ori, după cum știm, pentru tunurile ghintuite la dreapta axul  $GZ$  al proectilului rămâne tot timpul la dreapta planului traectoriei, planul de rezistență  $zGZ$  oscilând în jurul tangentei și trecând la scurte intervale de timp când deasupra când dedesubtul orizontalei  $Ou$ <sup>1)</sup>. Rezultă atunci că componenta  $\mu R v$  de pe axul  $Ov$ , care este de altfel mică de oarece  $v$  este mic, este alternativ când pozitivă când negativă și are prin urmare un efect ca și nul asupra deplasării centrului de greutate în planul traectoriei.

Rămâne componenta  $\mu R u$ , care produce derivațiunea. Ecuația respectivă a mișcării este

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 D}{dt^2} = \mu R u$$

însemnând prin  $D$  derivațiunea.

Putem simplifica studiul derivațiunii, presupunând axul proectilului confundat cu axul instantaneu de precesiune, adică luând

$$u = u_1 = \frac{C \omega}{s} \tau' = \frac{C \omega}{s(1 + \mu) R} \tau'$$

Ecuația mișcării devine atunci

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 D}{dt^2} = \mu R u_1 = \frac{\mu C \omega}{s(1 + \mu)} \tau'$$

<sup>1)</sup> Am văzut, în adevăr, că ordonata  $v_1$  referitoare la axul instantaneu de precesiune este foarte mică, așa că ordonata  $v = v_1 + v_2$  referitoare la axul proectilului este ca și egală cu  $v_2$ , adică egală cu ordonata punctului  $s_2$  (fig. 239).



sau

$$(\alpha) \quad \frac{d^2 D}{dt^2} = M \tau$$

punând

$$M = \frac{g}{p} \frac{\mu}{s(1+\mu)} C \omega$$

integrațiunea ecuației ( $\alpha$ ) dându-ne valoarea principală a derivațiunii.

Scriind această ecuație sub forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dD}{dt} \right) = M \frac{d\tau}{dt}$$

sau

$$d \left( \frac{dD}{dt} \right) = M d\tau$$

deducem

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dD}{dt} \right) = M$$

și, inversând ordinea derivărilor,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dD}{d\tau} \right) = M$$

de unde

$$\frac{dD}{d\tau} = Mt$$

și

$$D = M \int_{\tau_0}^{\tau_c} t d\tau$$

$\tau_0$  și  $\tau_c$  fiind valorile lui  $\tau$  la origină și în punctul de cădere al proiectilului.

Ori, integrațiunea pe arcuri succesive ne permite de a cunoaște un mare număr de valori de ale timpului  $t$  corespunzătoare valorilor  $\tau$  dela origină la punctul de cădere, așa încât putem construi curba  $t = f(\tau)$  și evalua aria

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_c} t d\tau.$$

Derivațiunea va fi atunci

$$D = M \cdot S$$

cu

$$M = \frac{g}{p} \frac{\mu}{s(1+\mu)} C \omega.$$



Vedem astfel că derivațiunea este proporțională cu viteza de rotație  $\omega$ , sau cu înclinarea  $\eta$  a ghinturilor, și invers proporțională cu depărtarea  $s$  a centrului de rezistență de centrul de greutate, deci mai mică pentru proiectilele moderne lunguete, unde centrul de rezistență se găsește la o depărtare mai mare de centrul de greutate.

Pentru tunurile ghintuite la dreapta, axul instantaneu de precesiune fiind neconținut la dreapta planului de tragere, derivațiunea are și ea loc tot în această parte, adică spre partea încotro se răsucesc ghinturile.

De altfel, formula  $D = M \cdot S$  ne dă în acest caz o valoare pozitivă pentru  $D$ , de oarece pe de o parte integrala care reprezintă pe  $S$  este negativă căci  $\tau_0 > \tau_c$  iar pe de altă parte  $\omega$  este și el negativ.

Elementele  $s$  și  $\mu$  care intră în expresia lui  $M$  se determină, după cum s'a mai spus, în tunelurile aerodinamice. Invers, dacă pentru o traectorie s'a măsurat pe teren derivația  $D$  și s'a calculat suprafața  $S$ , raportul  $\frac{D}{S}$  ne va da valoarea lui  $M$  și deci valoarea raportului

$$\frac{\mu}{s(1 + \mu)}.$$

Experiențe executate în Franța<sup>1)</sup> au dovedit, că dacă se execută o tragere la  $20^\circ$  și se măsoară pe teren derivațiunea respectivă, evaluându-se și aria  $S$ , toate celelalte derivațiuni pot fi calculate prin formula  $D = M \cdot S$ , luându-se pentru raportul

$\frac{\mu}{s(1 + \mu)}$  valoarea pe care o procură tragerea la unghiul de  $20^\circ$ .

Astfel, acest raport pare a fi independent de unghiul de tragere. Cele mai bune potriviri între derivațiile calculate și cele măsurate pe teren, au fost obținute cu calibrele mici și viteze peste  $400 \text{ m/s}$ .

În practică se utilizează și formule empirice pentru cal-

---

<sup>1)</sup> Lt. Colonel Dufrénois, Conférences sur la Ballistique Extérieure, 1926, pag. 226.



culul derivațiunei. Astfel, formula foarte simplă:

$$D = k T^2$$

unde  $k$  este o constantă pentru un același proiectil, tras cu aceeași viteză inițială în același tun, adică pentru toată întinderea unei table de tragere, iar  $T$  este durata traectului. Valoarea lui  $k$  rezultă din două sau trei experiențe de tragere, sub unghiuri diferite, luându-se mijlocia valorilor ce se obțin pentru raportul  $\frac{D}{T^2}$ .



## ASUPRA FORMELOR CARE ASIGURA PROECTILELOR O REZISTENȚĂ CÂT MAI MICĂ DIN PARTEA AERULUI.

### EXPERIENȚELE DELA POLIGONUL SUDIȚI.

La 26 Ianuarie 1931, am înaintat Ministerului de Război un raport cu următorul conținut:

„Înainte de războiul european, nu s'a ocupat nimeni în mod deosebit cu forma cea mai rațională de dat proiectilelor de artilerie pentru ca ele să bată cât mai departe; aceasta din cauză că toate formele ogivale permiteau de a se obține bătăile socotite necesare pentru diversele cazuri de luptă.

Pe timpul războiului însă, necesitatea unor bătăi mult mai mari decât cele prevăzute din timp de pace devenind imperioasă, chestiunea formei exterioare de dat proiectilelor pentru ca ele să întâmpine o rezistență cât mai mică din partea aerului și prin urmare să bată cât mai departe, a devenit la ordinea zilei.

Studiile care s'au făcut au determinat pe artileriști să admită pentru fundul proiectilelor forma ușor tronconică pe care o poseda deja glonțul de infanterie francez, zis glonțul D., iar pentru ogivă, o formă mult mai ascuțită, fără bine înțeles a schimba prea mult raportul dintre cele două momente de inerție ale proiectilului, longitudinal și transversal, de care depinde stabilitatea proiectilului pe traectorie.

S'a mai recunoscut însfârșit că prin adaptări de coafe de ogive, de lungimi mergând până la 3 și chiar 4 calibre, în loc de un calibru cum au de obicei ogivele, se îmbunătățeau calitățile balistice ale proiectilelor.

Dar, după câte știu, nimeni n'a studiat ce anume profil convine coafelor de ogive, pentru ca ele să permită maximum



de bătae. *Trebue păstrat tot profilul ogival sau se impune vre-un alt profil nou?*

Subsemnatul, pe timpul cât am fost profesor de Mecanică rațională la Universitatea din Cluj, fiind îndemnat prin însăși natura acestei ocupații de a cerceta chestiunile tehnice care ar putea beneficia de resursele transcendente ale Mecanicii, spre a fi rezolvate, am luat în studiu chestiunea determinării profilului ogivelor, punându-mi următoarea problemă:

*Ce profil trebue să-i se dea unei ogive pentru ca rezistența aerului asupra ei să fie minimă?*

Aplicând ecuațiile lui *Euler* din Hidrodinamică și teorema lui *Lagrange*, apoi admitând pentru mișcarea moleculelor de aer din jurul proiectilelor fie legea izotermică fie legea adiabatică, am ajuns la concluzia finală, că pentru ca un proiectil să întâmpine minimum de rezistență din partea aerului și deci să bată cât mai departe, este necesar ca ogiva sa (mai exact: partea sa anterioară) să fie o suprafață de revoluție născută de o anumită generatrice care să fie pe deoparte tangentă generatricei părții cilindrice a proiectilului, iar pe de altă parte tangentă axului longitudinal al proiectilului la infinit.

În mod practic, ogiva falsă poate fi limitată după cum s'a spus la 3 sau 4 calibre, dându-se proiectilului o viteză de rotație în raport cu lungimea admisă.

Acesta fiind rezultatul general al studiului meu, am onoarea a vă propune să binevoiți a-mi da posibilitatea să verific prin trageri rezultatele la care m'au condus studiile teoretice, în credința pe care o am că voi izbuti a mări toate bătăile proiectilelor noastre cu cel puțin 20%.

Alături desenul unui proiectil de 75 mm. cu modelul a două coafe de ogive dintre care cea mai lungă ar fi desigur cea mai avantajoasă, dacă viteza de rotație a proiectilului se va dovedi a fi suficientă pentru adoptarea ei.

Acest raport a fost supus discuției Comitetului Tehnic al Artileriei, care l-a aprobat, deși cu oarecare îndoială asupra obținerii sporului de bătae ce anunțasem.



Ministerul a dispus atunci realizarea coafelor, însă, din diferite motive, experiențele de tragere n'au avut loc decât tocmai în ziua de 23 Aprilie 1940, adică după mai bine de 9 ani dela data aprobării ministeriale pentru realizarea și experimentarea coafelor.

Tragerea s'a executat în poligonul dela Sudiți cu un tun de 75 mm. F. F., în prezența mea și sub conducerea și controlul unei comisii tehnice militare, numită de Ministerul Inzestrării Armatei.

Aceste experiențe au confirmat în totul exactitatea prevederilor mele teoretice. Astfel s'a dovedit că:

- a) Grație profilului special al coafelor mele, bătaile au crescut simțitor, coafa cea lungă dând bătaia cea mai mare;
- b) Sporul de bătae obținut a trecut de 20<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, fiind de 22<sup>0</sup>/<sub>0</sub>;
- c) Stabilitatea proiectilului pe traectorie a crescut considerabil, obținându-se o împrăștiere în bătae și mai ales în direcție mult mai redusă decât în tragerile cu proiectilul ne-coafat <sup>1)</sup>.

Buletinul de tragere ce mi s'a înaintat de președintele comisiei tehnice militare, specifică în adevăr următoarele:

- a) Cu coafa cea lungă bătaia maximă obținută a fost de 9.804 metri față de 8.045 cât s'a obținut cu proiectilul ne-coafat;
- b) Sporul de bătae fiind 1.755 metri reprezintă cu adevărat o creștere a bătaii cu 22<sup>0</sup>/<sub>0</sub>;

c) La tragerea sub unghiul de 33°50' care a dat bătaia maximă de 8.045 cu proiectilul ne-coafat, abaterile probabile în bătae și în direcție au fost respectiv de 72,4 și 7,3 metri, pe când cu proiectilul coafat, care la același unghi de tragere de 33°50' a dat ca bătae 9.575 metri, abaterile nu au fost decât de 48,65 și 2,23 metri, cifre care la bătaia de 8.045 metri cu proiectilul coafat trebuie desigur să fie încă și mai mici. Deci o împrăștiere în bătae și mai ales în direcție foarte strânsă.

*Profilul coafelor mele este o curbă analitică cu dublă curbură, adică prezentând un punct de inflexiune, iar vârful*

---

<sup>1)</sup> Experiențele executate la noi în țară cu coafe cu generatoarei drepte, n'au dat niciodată asemenea rezultate.



**TABEL COMPARATIV**  
*al datelor tragerilor executate în ziua de 23 Aprilie 1940 la Poligonul Suduți: tun de 75 mm. F. F.*

cu: obuzul Md. 15 cu focos scurt Nr. 99/908	$p = 5,315 \text{ kg.}$	$V_0 = 550 \text{ m/m.}$
„ „ semilestat cu coafa scurtă „General Burileanu“	$p = 5,511 \text{ „}$	$V_0 = \text{„}$
„ „ „ „ lungă „General Burileanu“	$p = 5,700 \text{ „}$	$V_0 = \text{„}$

DETALII	$\varphi = 33^\circ 50'$			$\varphi = 41^\circ 45'$	Observații
	Obuze de 75 mm. Model 15				
	cu focos scurt Md. 99/908	semilestat cu coafa scurtă „Gl. Burileanu“ și focos Schneider Md. 16	semilestat cu coafa lungă „Gl. Burileanu“ și focos $U_1$	semilestat cu coafa lungă „Gl. Burileanu“ și focos $U_1$	
Bătaia măsurată	8.049	8.937	9.575	9.804	1) S'a tras seria de 12 lovituri. Precizia calculată din 11 lovituri.
Bătaia corectată pentru condiții normale	8.113	9.035	9.640	9.973	2) S'a tras seria de 10 lovituri. Precizia calculată din 9 lovituri.
Abaterăa probabilă în bătae	72,4	57,48	48,65	—	3) S'au tras numai 2 lovituri luate dela seria 3-a.
Abaterăa probabilă în direcție	7,9	4,36	2,23	—	







coafei, în loc de a fi ascuțit, prezintă o mică suprafață zisă zonă de calm, unde viteza relativă a scurgerii aerului este nulă. Având în vedere forma aceasta deosebită a coafelor mele, se înțelege, că pentru a le propune Ministerului de Război și încă cu atâta siguranță și încredere în rezultatele ce aveau să dea, a trebuit să nu mă las deloc influențat de afirmațiunile unora dintre balisticieni, cum spre exemplu de afirmația cunoscutului profesor german *Cranz*, care în tratatul d-sale de Balistică Exterioară susține că: „*Concluziunile ultime sunt că nu interesează prea mult dacă meridianul vârfului este ogival sau parabolic, ori hiperbolic, etc*”. (Revista Artileriei din Octombrie 1939, pagina 20, *Cranz* și Balistica sa Exterioară).

Am dovedit astfel că asemenea afirmații nu corespundeau realității, iar faptul că eu nu m'am bazat pentru a susține contrariul decât pe simple considerații teoretice din domeniul Mecanicii Fluidelor, pe care tragerile de poligon au venit în urmă să le confirme, probează odată mai mult cât de necesare sunt studiile și cunoștințele teoretice pentru rezolvarea fără pierdere de timp și fără mari cheltuieli a atâtor chestiuni care interesează domeniul artileristic.

---



Nota A.

## ECUAȚII DE ECHILIBRU LA FIGURILE RIGIDE

de D. POMPEIU

Profesor universitar și membru al Academiei Române.

1. Un raționament elementar arată că, pentru o figură plană rigidă, strămutarea cea mai generală, în propriul ei plan, poate fi obținută printr'o translație urmată de o rotire.

Ca leamnă preliminară poate servi propoziția următoare:

*Când, în strămutarea cea mai generală a unei figuri plane rigide, două puncte au ajuns în poziția lor finală, întreagă figura se găsește în poziția ei finală.*

2. Dacă acum, dela strămutarea finită trecem, la limită, la strămutarea infinitezimală (elementară) atunci enunțul general se păstrează iar traducerea lui analitică devine

$$(1) \quad \begin{aligned} dx &= d\xi - (y-b) d\theta \\ dy &= d\eta + (x-a) d\theta \end{aligned}$$

în care:

iar  $[d\xi, d\eta]$  este translația elementară  
 $[-(y-b) d\theta, +(x-a) d\theta]$  rotația elementară.

De remarcat, că traducerea analitică a enunțului ne silește la o exprimare mai corectă a acestui enunțiu:

În adevăr *translația* se înregistrează pe fiecare din cele două axe coordonate iar când zicem „o translație“ de fapt zicem *suma geometrică a două translații independente*.

Așa dar ca încheiere:

Mișcarea elementară (1) a unei figuri plane rigide este rezultatul a *trei* mișcări elementare independente: două translații și o rotație.

3. Mai departe, să observăm că, după cum dreapta poate fi considerată ca un cerc de rază infinită (cu centrul la infinit) tot așa o translație poate fi considerată (eră o expresie favorită a profesorului Koenigs, în cursul său la Sorbona) ca o rotire de amplitudine infinită împrejurul unui centru situat la distanță infinit-mare; prin urmare o *adevărată valoare de forma*  $\infty \cdot 0$ .

4. Dar cu acest mod de a considera translația, putem zice că, strămutarea elementară, cea mai generală, a unei figuri plane rigide: rezultă din *trei* rotiri.

Iar această formulare ne îndeamnă să trecem de la cazul *particular* (când două, din cele trei rotiri au centrele la infinit) la cazul *general* a trei rotiri elementare obișnuite:

$$(2) \quad \begin{aligned} dx &= -(y-y_1) d\alpha_1 - (y-y_2) d\alpha_2 - (y-y_3) d\alpha_3 \\ dy &= +(x-x_1) d\alpha_1 + (x-x_2) d\alpha_2 + (x-x_3) d\alpha_3 \end{aligned}$$



Eu zic că relațiile acestea (2) pot fi identificate cu (1). În adevăr, pentru aceasta trebuie ca

$$\begin{aligned} d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3 &= d\theta \\ y_1 d\alpha_1 + y_2 d\alpha_2 + y_3 d\alpha_3 &= d\xi \\ -x_1 d\alpha_1 - x_2 d\alpha_2 - x_3 d\alpha_3 &= d\eta \end{aligned}$$

ceia ce e totdeauna posibil, dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ceia ce înseamnă că cele trei centre de rotire trebuie să formeze un adevărat triunghi (arie ne-nulă).

5. Iată dar, acum, un enunțiu care pentru mișcarea elementară a unei figuri plane rigide — cuprinde enunțul clasic ca un caz particular:

*Mișcarea elementară, cea mai generală, a unei figuri plane rigide, poate fi obținută prin trei rotiri elementare împrejurul a trei centre formând un triunghi obișnuit (ne-turtit).*

6. Să ne folosim acum, trecând la *Statică*, de acest rezultat din *Cinematică*, ca să obținem pentru o figură plană rigida condiții de echilibru mai generale de cât condițiile clasice.

E destul să aplicăm *principiul lucrului virtual* pentru a obține rezultatul următor:

*Pentru o figură rigidă plană, și forțele fiind în acelaș plan: dacă suma momentelor forțelor, calculată în trei puncte (ne în linie dreaptă) e nulă, atunci avem echilibru.*

Iată o formă, a condițiilor de echilibru, care după explicările cinematice ce au precedat, trebuie considerată ca mai generală de cât forma clasică, în care intră rezultanta generală.

7. O cale absolut analoagă se poate urma, pentru figurile rigide cu trei dimensiuni.

Se stabilește întâiu propoziția de cinematică, după care strămutarea elementară cea mai generală a unui solid — se poate obține ca rezultat a șase rotiri împrejurul a șase muchi (drepte, ca axe) ale unui tetraedru, nedeformat.

Apoi, *principiul lucrului virtual*, ne dă enunțul general pentru echilibrul forțelor la un solid: *suma momentelor forțelor, calculată pe rând în raport cu fiecare din cele șase muchii, să fie nulă.*

8. Această formă a condițiilor de echilibru pentru un solid este bine cunoscută [Appell, *traité de mécanique rationnelle*, I, 3-ième édition, page 139].

Scopul acestei note nu poate fi altul de cât de a pune, mai în vedere, un rezultat de formă generală, în statica corpului solid, evidențiind în acelaș timp substratul lui cinematic.



## ENERGIA.

### MIȘCARE CONSERVATIVĂ ȘI MIȘCARE NECONSERVATIVĂ A ENERGIEI.

de C. POPOVICI

Profesor universitar și Directorul Observatorului Astronomic din București.

1). Reamintim ecuațiile generale ale mecanicii, în primul rând teorema *impulsului*, care se exprimă astfel:

$$(1) \quad d(mv) = F dt$$

în care  $m$  este masa unui punct supus forțelor de rezultantă  $F$ , iar  $v$  vectorul viteză <sup>1)</sup> al masei  $m$  în intervalul  $dt$ .

Dacă masa  $m$  e constantă, sau dacă variația ei o considerăm neglijabilă pentru intervalul de timp în care studiem mișcarea, atunci ecuația (1) devine

$$(2) \quad m dv = F dt$$

care e în fond ecuația lui *Newton* și care proiectată pe cele trei axe de coordonate carteziane ne dă cele trei ecuații generale ale mișcării punctului:

$$(2') \quad m \ddot{x} = X \text{ (notația Newton)} \quad \text{sau} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \text{ (notația Leibnitz)}$$

și alte două similare, ce obținem dacă înlocuim  $x$  și  $X$  respectiv prin  $y$  și  $Y$ , apoi prin  $z$  și  $Z$ . Se vede că  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  și  $\ddot{z}$  sunt componentele accelerației <sup>2)</sup> și  $X$ ,  $Y$  și  $Z$ , componentele rezultantei forțelor aplicate masei  $m$ .

2). **Energie.** Ecuațiile (2') se pot scrie

$$(2'') \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt = \frac{m}{2} d \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = X dx$$

de unde

$$(3) \quad \frac{m}{2} d(v^2) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Acum dacă membrul al doilea este integrabil și o putem constata dacă avem verificate identitățile

$$(4) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

<sup>1)</sup> Cinematica, pag. 43.

<sup>2)</sup> Cinematica, pag. 53.



atunci există o funcțiune  $U(x, y, z)$ , astfel ca

$$(5) \quad dU = X dx + Y dy + Z dz$$

și vom avea o integrală a mișcării dată de *Newton*

$$(6) \quad m \frac{v^2(x, y, z)}{2} - U(x, y, z) = h$$

unde  $h$  este o constantă

$$h = m \frac{v_0^2(x_0, y_0, z_0)}{2} - U(x_0, y_0, z_0).$$

Integrala (6) a fost numită de *Leibnitz*, *integrala forțelor vii*, expresiunea  $m v^2$  *energie cinetică* și  $-U$  *energie potențială*, suma lor *energie totală*.

Dacă relațiile (4) sunt satisfăcute, vedem că *energia totală rămâne constantă* și mișcarea se zice *conservativă*. În cazul contrar mișcarea se zice *neconservativă* (de energie).

Se recunoaște mișcarea conservativă prin faptul că este *reversibilă*, adică dacă dăm vitezei sens invers (păstrându-i mărimea), atunci mobilul, supus aceluiași forțe, descrie îndărăt aceeași traectorie, cu aceleași viteze (schimbate de sens). O imagină: dacă am rula cinematograful mișcării în sens invers (ceia ce revine a schimba  $dt$  în  $-dt$ ), obținem o *mișcare reală*. Exemple: Oscilațiile unui pendul în vid, mișcarea unui obuz în vid, mișcarea unei planete în vid în jurul unui soare stins, etc. Dacă energia totală nu se conservă, mișcarea este *irreversibilă*. Cinematograful unei mișcări reale care, rulat în sens invers, ne va da mișcarea unei bile de biliard mărindu-și viteza sau un pendul mărindu-și oscilațiile, sau un corp aruncat în sus, căzând la orizont cu o viteză mai mare decât viteza inițială, ne va releva (filma) mișcări *ireale* (minuni). În scurt timp ne vom da seamă că a fost schimbat sensul timpului.

În mișcarea neconservativă a sistemelor avem, evident, același fenomen de *irreversibilitate*. Menționăm în plus că nu există centru de gravitate, adică un vector

$$\bar{R} = \frac{\sum m \bar{r}}{\sum m}$$

cu o extremitate în origină și cu cealaltă extremitate având accelerația nulă.

### ATRACTIA LUMINOASĂ.

În 1923 într'un memoriu<sup>1)</sup>, am întreprins studiul mișcării corpurilor cerești, ținând seamă că aceste corpuri sunt supuse nu numai gravității newtoniene, ci și presiunii de lumină. În mișcarea newto-

<sup>1)</sup> *Bulletin Astronomique, Mémoires. Paris 1923. Pag. 257—261.*



niană, ca în orice mișcare datorită unei forțe centrale, funcțiune de distanță, energia se conservă. Nu același lucru se întâmplă dacă se ține seama și de presiunea luminei. Această presiune este și ea o forță centrală, inversă atracției și care se exercită invers proporțional cu patratul distanței; însă, pe când atracția se exercită instantaneu, presiunea de lumină se propagă cu o viteză finită, care depinde de densitatea mediului și care în vid este o constantă și se notează cu  $c$  (300 mii km. pe secundă). Din această cauză forța rezultantă pe care o exercită un soare  $S$ , considerat deocamdată ca un punct fix atractiv și luminos asupra unei planete  $P$ , capătă expresia

$$(1) \quad F = -\frac{A}{r^2} + \frac{R}{r^2} - \frac{R}{r^2} \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}$$

în care  $r$  este distanța dela soare la planetă;  $A$  și  $R$  respectiv atracția newtoniană și repulsia *Maxwel-Bartoli*<sup>1)</sup> exercitate la unitatea de distanță<sup>2)</sup>.

Expresia (1) se mai poate scrie, luând ca unitate massa presupusă constantă a planetei:

$$(1') \quad F = -\frac{k}{r^2} \left( 1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right)$$

unde

$$k = A - R, \quad \varepsilon = \frac{R}{c(A - R)}.$$

<sup>1)</sup> Adică repulsia luminei. *Maxwel* a prevăzut-o prin calcul în 1873 ca o consecință a teoriei sale electromagnetice a luminii, iar *Bartoli* în 1883 prin termodinamică; *Lebedeff*, *Nichols* și *Hull*, în 1900—1901 au verificat-o experimental și au măsurat-o. Lumina solară apasă pe pământ cam cu o jumătate kgr. pe kilometru pătrat.

<sup>2)</sup> Formula (1) se află astfel: Să presupunem în  $S$  un vas pe care se află o mitralieră care aruncă gloanțe și o helice care provoacă valuri cu aceeași frecvență. Gloanțele pleacă și valurile se propagă cu aceeași viteză  $c$ , în toate direcțiile. Dacă un obiectiv care stă la distanța 1 primește  $R$  gloanțe și  $R$  valuri pe secundă, el va primi  $\frac{R}{r^2}$  gloanțe și valuri pe secundă când ar sta la distanța  $r$ . Dacă acum obiectivul (planeta) se mișcă cu viteza radială  $v = \frac{dr}{dt}$  el va primi mai puține gloanțe (sau valuri) dacă se îndepărtează ( $\frac{dr}{dt} > 0$ ) și mai multe dacă se apropie ( $\frac{dr}{dt} < 0$ ) și anume în proporția  $\frac{1}{c} \frac{dr}{dt}$  din  $\frac{R}{r^2}$  cât primea când sta pe loc ( $v = 0$ ).

În cazul nostru gloanțele sunt fotonii de lumină, iar valurile undele brogliene cari li asociază.



Vom arăta că rezultă consecințe noi care privesc filosofia naturii și de o deosebită importanță cosmogonică.

1). Trăvialiul nu mai este integrabil ca în mișcarea newtoniană, deci:

2). *Mișcarea nu mai este reversibilă*; dacă dăm planetei o viteză de aceeași mărime însă de sens contrar, planeta nu mai descrie în sens invers traiectoria pe care a venit.

3). Expresiunea

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{r}$$

care în mișcare newtoniană se numește *energie*, *variază în același sens*. Aceste trei rezultate se văd din faptul că ecuația (3) care ne dă variația energiei cinetice nu este integrabilă în cazul nostru. Intr'adevăr aplicând această ecuație deducem

$$(2) \quad \frac{dE}{dt} = -k\varepsilon \left( \frac{r'}{r} \right)^2 < 0, \quad r' = \frac{dr}{dt}.$$

Vedem că *energia se consumă*, fenomen analog cu o frecare<sup>1)</sup>. Lucru curios, frecare în acțiunile la distanță.

4). *Teorema ariilor se păstrează*, forța fiind centrală.<sup>2)</sup>

5). Deși integrala forțelor vii nu mai există, totuși există o integrală, care nu mai este algebrică și care generalizează integrala forțelor vii, reducându-se la aceasta pentru  $\varepsilon = 0$ . Intr'adevăr avem din (2)

$$(3) \quad \frac{dE}{dr} = -\frac{\varepsilon k}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

și din (4)  $r^2 d\theta = C dt$ .

Expresiunea din 3) devine

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = 2E$$

așa că formula (3) se poate scrie

$$(4) \quad \frac{dE}{dr} = -2\alpha \frac{C}{r^2} \sqrt{2E - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2k}{r}}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon k}{2C}.$$

Punând

$$I = 2E + \frac{k^2}{C^2}, \quad \rho = \frac{C}{r} - \frac{k}{C}$$

<sup>1)</sup> Deosebirea e că frecarea în sens comun e pierderea de energie prin rezistență tangențială vitezei; în presiunea luminii pierderea este tangențială accelerației.

<sup>2)</sup> Cinematica p. 47.



avem

$$dI = 4\alpha \sqrt{I - \rho^2} d\rho$$

iar punând

$$I = \rho^2 (1 + u^2) \quad \text{deci} \quad dI = 2\rho(1 + u^2) d\rho + 2\rho^2 u du$$

se obține ecuația diferențială

$$(1 - 2\alpha u + u^2) d\rho = -\rho u du$$

din care rezultă, însemnăm cu  $G$  o constantă de integrație,

$$G = \rho \sqrt{1 - 2\alpha u + u^2} \cdot e^{s_1}$$

unde

$$s_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left( \arctg \frac{u - \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + n\pi \right).$$

Integrala forțelor vii este înlocuită prin

$$(5) \quad G = \sqrt{I - 2\alpha\rho} \sqrt{I - \rho^2} \cdot e^{s_2}$$

unde

$$s_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left[ n\pi + \arctg \frac{r' - \alpha \left( \frac{C}{r} - \frac{k}{C} \right)}{\left( \frac{C}{r} - \frac{k}{C} \right) \sqrt{1 - \alpha^2}} \right].$$

Pentru  $\alpha = 0$  regăsim integrala forțelor vii din mișcarea kepleriană.

6) Elementele eliptice au variații seculare. Intr'adevăr din (5) deducem

$$(6) \quad r'^2 + \left( \frac{C}{r} - \frac{k}{C} \right)^2 - 2\alpha \left( \frac{C}{r} - \frac{k}{C} \right) r' = G^2 e^{s_3}$$

cu

$$s_3 = -2s_2.$$

Vedem că după  $n$  semitururi distanțele perihelii și afelii sunt date pentru  $r' = 0$  prin

$$(7) \quad \frac{1}{r_n} = \frac{k}{C^2} \pm \frac{G}{C} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} (n\pi + \arcsin \alpha)}.$$

Punând

$$(8) \quad \frac{C^2}{k} = p, \quad \pm G e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} n\pi} = -\frac{\eta_0}{p}$$

aceste distanțe devin

$$(9) \quad \frac{1}{r_n} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p} e^{-\frac{n\pi\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}.$$



Dacă numim după  $n$  semitururi  $\eta_n$  excentricitatea,  $p_n$  parametrul,  $a_n$  semiaxa elipsei unei planete  $P(o)$  osculatrice la mișcarea planetei  $P(\alpha)$  considerată, avem

$$(10) \quad \eta_n = \eta_0 e^{-n\pi\alpha}, \quad p_n = p = a_n(1 - \eta_n^2) = a(1 - \eta_0^2).$$

Vom regăsi aceste rezultate.

7. *Traectoria*. Formula lui Binet<sup>1)</sup> dă

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + 2\alpha \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

deci

$$(11) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p} e^{-\alpha\theta} \sin \sqrt{1 - \alpha^2} (\theta - \theta_0)$$

și regăsim variațiile seculare. Pentru  $\theta = \theta_0$  avem  $r = p$ . Dacă se dau condițiile inițiale  $r_0$  și  $v_0$  deci și  $C$  atunci vedem din (8) că  $p_0$  și  $\eta_0$  depind de  $\epsilon$  (deci intensitatea luminii).

8). *Periheliul are o mișcare*. Lucru important în *Teoria relativității*, deoarece ea se bazează și pe mișcarea periheliului lui Mercur. Vom arăta că presiunea luminii provoacă o asemenea mișcare. Fie într'adevăr două planete: una  $P(\alpha)$  care se va mișca sub acțiunea forței (1') și alta  $P(o)$  adică cu  $\alpha = 0$  deci fără presiune. Presupunem că cele două planete coincid pentru  $r = p$ , atunci  $P(o)$  va descrie traectoria

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p} \sin \theta.$$

Un observator observă  $P(\alpha)$  crezând că observă  $P(o)$  și așteaptă trecerea la periheliu. El va fi surprins să constate că, această trecere (când discul soarelui apare maximum) nu se împlinește pentru  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ci pentru  $\theta$  care anulează pe  $\frac{dr}{d\theta}$  de pe traectorie și care dă

$$\cos \sqrt{1 - \alpha^2} \theta(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Rezultă într'adevăr o mișcare a periheliului lui Mercur, însă care nu e suficientă pentru a înlătura teoria relativității.

9). *A treia lege a lui Kepler nu se mai aplică* pentru că ecuațiile mișcării nu mai rămân invariante dacă schimbăm unitățile de măsură pentru lungimi din  $\lambda_0$  în  $\lambda$  și cele de timp din  $T_0$  în  $T$  astfel ca

$$\frac{\lambda^3}{T^3} = \frac{\lambda_0^3}{T_0^3}$$

<sup>1)</sup> Cinematica p. 81.



cum se întâmplă în mișcarea newtoniană. Va rezulta o corecție de ordinul  $\alpha$ .

În 1937 profesorul Armellini, directorul observatorului din Roma face cinstea formulei (1) ce am dat-o în 1923, de a o propune să înlocuiască legea lui Newton <sup>1)</sup>. Cu această ocazie reiau lucrările mele și în trei note <sup>2)</sup> publicate la Academia de științe din Paris mai adaug următoarele rezultate:

10). *Variația energiei într'un cuplu de stele este finită dela infinit în trecut până la infinit în viitor, chiar dacă strălucirea stelelor ar fi fost și ar rămâne vecinică.*

Intr'adevăr reluând formula care ne dă expresia energiei

$$2 E = r'^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{r}$$

se vede din (7) că variația energiei între două perihelii este termenul unei serii convergente. Acest adevăr se mai poate deduce și din ecuația traiectoriei. Pentru  $t \rightarrow -\infty$  urmează să se ia variația energiei numai dela prima asimptotă.

11). *Diferența până la infinit în viitor între numărul de ani ( rotații) ale planetei în cele două ipoteze: că lumina s'ar produce instantaneu și apoi că s'ar propaga cu viteză finită, este finită.*

12). *Nu există egalitate între acțiune și reacțiune între un soare și o planetă, în sensul că nu există un punct fără accelerație care să dividă raza vectoare soare-planetă în raport constant.*

Pentru a salva principiul egalității acțiunii cu reacțiunea, va trebui să admitem că fotonii au o masă, dar atunci viteza  $c$  a luminii în vid nu mai este constantă. În studiul nostru variația lui  $c$  e neglijabilă.

*Vârsta sistemului solar.*

Folosind faptul că presiunea de lumină tinde să transforme traiectoriile eliptice în cercuri păstrând ariile, putem avea o metodă pentru a găsi o majorantă a timpului de când ultima planetă *Mercur* s'a desprins din nebuloasa soare. *Mercur* descrie o orbită eliptică cu excentricitate pronunțată 0,21 în interiorul orbitei lui *Venus* care descrie un cerc. Ținând seamă de variațiile seculare (10) se poate găsi un timp când orbita lui *Mercur* s'ar fi străpuns cu orbita lui *Venus*. Or

<sup>1)</sup> Rendiconti Accademia dei Lincei 1937—1938 mai multe note.

<sup>2)</sup> C. Rendus. Acad. Paris 1939 T. 208 p. 2052 și 1940 T. 210 p. 39 și 138.



aşa ceva nu se poate să se fi întâmplat, căci atunci inelul din care s'a născut *Mercur* s'ar fi străpuns cu inelul din care s'a născut *Venus*, deci *Mercur* s'a născut mai târziu decât acel timp. Ținând apoi seamă de evoluția soarelui, că a fost mult mai cald, mai mare (până la *Mercur*) și mai luminos, etc., se poate reduce această majorantă în jurul a cinci miliarde de secole.



## ASUPRA NOTAȚIEI VECTORIALE

de VICTOR VÂLCOVICI

Profesor de Mecanică la Facultatea de Științe din București  
și Directorul Institutului de Aerodinamică.

Notația vectorială are avantagii. Se înțelege că ea nu poate avea pretenția de a elimina notația cerută de proiecțiile pe cele trei axe. Însă în multe împrejurări notația vectorială poate da un sprijin real intuiției fenomenului, pe lângă o concentrare în scris adeseori binevenită.

Profitând de amabilitatea d-lui General Burileanu de a mă fi invitat să contribui cu o notă la finele Dinamicii, și încredințat că cetitorii cursului vor putea găsi o complinire utilă în cele ce urmează, îmi propun a ilustra această afirmație printr'un exemplu — așa cum îl fac de multă vreme în lecțiunile mele de Mecanică.

1. Voiu însemna cu  $\vec{r}$  vectorul de poziție al unui punct M, proiecțiile sale pe axele de coordonate fiind  $x, y, z$ . În mod analog:

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ , viteza de proiecțiuni  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ , punctul de asupra literei însemnând derivata în raport cu timpul  $t$ ;

$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  accelerația de proiecțiuni  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ .

$\vec{\rho} = \text{versorul vectorului } \vec{r}$  ( $\vec{\rho} = \text{vers } \vec{r}$ ) adică vectorul unitate având direcția și sensul vectorului  $\vec{r}$ .

Forța centrală  $\vec{F}$  se va putea exprima în felul următor:

$$\vec{F} = F \vec{\rho},$$

unde  $F$  înseamnă valoarea scalară a forței.  $F$  va fi pozitiv când forța va fi dirijată în același sens cu  $\vec{\rho}$ , și negativ în caz contrariu.

Acestea fiind fixate, ecuația lui Newton pentru mișcarea unui punct de masă  $m$  asupra căruia lucrează forța  $\vec{F}$  se scrie:

$$m \ddot{\vec{r}} = F \vec{\rho}.$$

Multiplicând vectorial la stânga această ecuație cu  $\vec{r}$  obținem:

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

de unde deducem prin integrare (lăsând la o parte factorul constant scalar  $m$ );

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C},$$



unde  $\bar{C}$  înseamnă un vector constant. Relația precedentă multiplicată scalar cu  $\bar{r}$  ne dă :

$$0 = \bar{C} \bar{r}$$

sau

$$(1) \quad C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0,$$

unde am însemnat cu  $C_1, C_2, C_3$ , proiecțiunile vectorului constant  $\bar{C}$  pe cele trei axe de coordonate. Deducem că mișcarea mobilului se efectuează în planul a cărei ecuație este (1). Traiectoria însăși va fi o curbă plană.

2. Să considerăm cazul special al forței elastice:

$$\bar{F} = -k \bar{r},$$

unde  $k$  înseamnă o constantă pozitivă de dimensiă  $MT^{-2}$ . Ecuația lui Newton devine

$$m \ddot{\bar{r}} = -k \bar{r}$$

sau

$$(2) \quad \ddot{\bar{r}} + \nu^2 \bar{r} = 0, \quad \nu^2 = \frac{k}{m}, \quad [\nu] = T^{-1}.$$

Ecuația (2) poate fi tratată după modelul ecuațiilor scalare. Fiind o ecuație diferențială (derivate ordinare) de ordinul al doilea, omogenă, cu coeficienți constanți, soluția ei generală va fi :

$$\bar{r} = \bar{C}_1 e^{i\nu t} + \bar{C}_2 e^{-i\nu t}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$\bar{C}_1, \bar{C}_2$  fiind două constante vectoriale de integrare. Eliminând unitatea imaginară cu ajutorul formulelor lui Euler, relația precedentă devine :

$$(3) \quad \bar{r} = \bar{A} \cos \nu t + \bar{B} \sin \nu t,$$

unde  $\bar{A}$  și  $\bar{B}$  sunt două constante vectoriale, reale, de integrare. Determinarea lor se face cu ajutorul condițiilor inițiale :

$$t = 0, \quad \bar{r} = \bar{r}_0, \quad \bar{v} = \bar{v}_0.$$

Vom avea astfel

$$(4) \quad \bar{A} = \bar{r}_0, \quad \bar{B} = \frac{\bar{v}_0}{\nu}$$

dacă ținem seama și de ecuația viteselor dedusă din (3) prin derivare :

$$(5) \quad \bar{v} = -\bar{A} \nu \sin \nu t + \bar{B} \cos \nu t,$$



Introducând valorile (4) în (3) și (5) obținem

$$(6) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 \cos \nu t + \frac{\vec{v}_0}{\nu} \sin \nu t,$$

$$(7) \quad \vec{v} = -\nu \vec{r}_0 \sin \nu t + \vec{v}_0 \cos \nu t.$$

Ecuația carteziană a traiectoriei se află fără nici o dificultate dacă se proiectează relația (6) pe axele de coordonate și se elimină între proiecții timpul  $t$ . Însă am putea determina caracterele esențiale ale mișcării (deci și ale traiectoriei) fără a ne folosi de coordonate carteziane, ci numai cetind cu atenție formulele (6) și (7).

În adevăr, să lăsăm la o parte cazul când vectorii  $\vec{r}_0$  și  $\vec{v}_0$  au aceeași direcție, caz care ne conduce la o mișcare rectilinie.

Presupunând deci că  $\vec{r}_0$  și  $\vec{v}_0$  nu au aceeași direcție și deci că sunt și diferiți de zero amândoi, constatăm din formulele (6) și (7):

1° că mișcarea este plană, de oarece  $\vec{r}$  rămâne permanent în planul vectorilor  $\vec{r}_0$  și  $\vec{v}_0$ ;

2° că traiectoria nu are puncte la infinit,  $\vec{r}$  având tot timpul o valoare finită;

3° că traiectoria este simetrică față de  $O$  pentru că  $\vec{r}$  ia valori de semne contrarii și egale în valoare absolută în două momente care diferă între ele prin  $\frac{\pi}{\nu}$ ;

4° că traiectoria este deci o elipsă având centrul în origine, ea având toate proprietățile precedente și ecuația ei carteziană fiind de gradul al doilea ca rezultând din eliminarea funcțiilor trigonometrice  $\cos \nu t$  și  $\sin \nu t$  între expresiile proiecțiilor lui  $\vec{r}$  pe axe;

5° că viteza nu se anulează niciodată și deci că mișcarea pe elipsă se face tot timpul în același sens;

6° că mișcarea este periodică, perioada fiind egală cu  $\frac{2\pi}{\nu}$ .

3. Se înțelege că notația vectorială câștigă mult dacă cedează pasul, la momentul potrivit, notației carteziane — mai ales când e vorba de clasificat traiectoriile, dat fiind că geometria analitică a curbelor continuă a întrebuința, în general, notația carteziană. Totuși, sunt cazuri când notația vectorială întrebuințată până la capăt, dă formulelor o putere interpretativă pe care formulele carteziane nu o au. Ca exemplu voi cita cazul punctului greu în vid:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g},$$

unde am însemnat cu  $\vec{g}$  vectorul care determină accelerația gravitației (vector constant dirijat pe verticală în jos). Ecuația precedentă se integrează imediat



$$(8) \quad \bar{v} = \bar{g}t + \bar{v}_0,$$

$$(9) \quad \bar{r} = \frac{1}{2} \bar{g}t^2 + \bar{v}_0 t,$$

unde am însemnat cu  $\bar{v}_0$  viteza inițială, presupunând că punctul pornește din origine la momentul  $t = 0$ . Formulele (8) și (9) ne spun că atât viteza  $\bar{v}$  cât și vectorul de poziție  $\bar{r}$  pot lua valori foarte mari (pentru  $t$  foarte mare). Așa dar, traiectoria va avea puncte la infinit. De altfel din (9) deducem că ea este o curbă algebrică de gradul al doilea, așa încât traiectoria va fi o conică cu puncte la infinit. Însă formula (8) ne arată că proiecția pe orizontală a vitezei rămâne constantă, pe când cea verticală poate lua valori oricât de mari, de unde deducem că traiectoria nu poate avea de cât asimptote verticale. Pe de altă parte, din (9) se vede că proiecția orizontală crește de asemeni fără limită, așa că asimptota verticală este îndepărtată la infinit: traiectoria este o parabolă.

Vom presupune că  $\bar{v}_0$  face unghiul  $\alpha$  cu orizontul. Dacă  $\alpha$  este cuprins între zero și  $\pi$ , proiecția pe verticală a lui  $\bar{r}$  ne dă chiar înălțimea  $h$  a mobilului în funcțiune de timp:

$$h = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Se vede că  $h$  începe prin a crește, atingându-și valoarea maximă  $h'$  pentru valoarea

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

a timpului. Vom avea

$$h' = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Aceasta este *săgeata traiectoriei*. Punctul A, cel mai urcat al parabolei, se va proiecta pe orizontală în punctul A' situat la distanța

$$d' = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

de O. Vom presupune  $\alpha$  cuprins între zero și  $\frac{\pi}{2}$  ceea ce evident nu particularizează problema. Atunci expresia lui  $d'$  este pozitivă.

Să considerăm acum două momente pozitive  $t_1$  și  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ). Fie  $\bar{r}_1$  și  $\bar{r}_2$  valorile respective ale vectorului  $\bar{r}$ . Vom avea:

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \frac{1}{2} (t_2^2 - t_1^2) \bar{g} + (t_2 - t_1) \bar{v}_0.$$

Ne propunem a cerceta dacă putem determina momentele  $t_1$  și  $t_2$  așa fel în cât vectorul  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$  să fie orizontal. În acest caz produsul sca-



iar  $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot g$  va fi nul, în cât relația precedentă ne-ar da :

$$\frac{1}{2} (t_2^2 - t_1^2) g^2 + (t_2 - t_1) \bar{v}_0 \bar{g} = 0$$

sau încă,

$$\frac{g^2}{2} (t_1 + t_2) = v_0 g \sin \alpha$$

observând că produsul scalar  $\bar{v}_0 \cdot \bar{g}$  este egal cu  $-v_0 g \sin \alpha$ . Deducem

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = t'$$

de unde scoatem pentru  $t_2$  valoarea :

$$t_2 = 2t' - t_1.$$

Momentele  $t_2$  și  $t_1$  sunt simetric așezate față de momentul  $t'$ . Așa dar, luând două momente  $t_1$  și  $t_2$  simetrice față de  $t'$ , obținem vectorul  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$  orizontal.

Mijlocul vectorului  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$  se proiectează pe orizontala originei O, într'un punct situat la distanța care se obține proiectând vectorul

$$\bar{r}_1 + \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{2}$$

pe acea orizontală. Vom avea astfel

$$v_0 t_1 \cos \alpha + \frac{1}{2} v_0 (t_2 - t_1) \cos \alpha = v_0 t' \cos \alpha$$

sau încă

$$\frac{v_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

adică  $d'$ . Așa dar, verticala vârfului A este chiar axa parabolei. De aici deducem imediat că bătaia OB, adică coarda orizontală trecând prin O, are valoarea:

$$2 d' = \frac{v_0 \sin 2 \alpha}{g}.$$



# TABLA DE MATERII

## PARTEA I-a

### MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL

#### I. INTRODUCERE.

	Pagina
I. Principii fundamentale. Definiția masei. Introducerea noțiunii de forță. Compunerea forțelor. Egalitatea între acțiune și reacțiune. Asupra deviațiunii .....	9
II. Determinarea valorii numerice a masei și a forțelor. Greutate și atracțiune terestră. Cele 3 unități fundamentale. Despre omogenitate și similitudine mecanică .....	16
III. Trăvialul forțelor. Teoreme. Expresia analitică a trăvialului. Funcție de forțe. Suprafețe de nivel. Potențial. Unitate de trăvial și dimensiunile trăvialului .....	22

#### II. MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

I. Ecuațiile generale ale mișcării. Integralele unei probleme de Dinamică. Determinarea forței care produce o mișcare dată. Ecuațiile intrinsece .....	37
II. Cantitatea de mișcare. Teoreme. Aplicațiuni.....	42
III. Forța vie. Teoremă. Integrala forțelor vie. Conservarea forței vie	46
IV. Rezumat .....	50
V. Echilibrul unui punct material liber. Stabilitatea de echilibru....	50

#### III. MIȘCAREA ȘI ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAȚĂ SAU PE O CURBĂ.

I. Mișcarea pe o suprafață. Ecuațiile diferențiale ale mișcării. Presiune pe suprafață.....	54
II. Echilibrul unui punct pe o suprafață. Echilibru stabil.....	58
III. Mișcarea unui punct pe o curbă. Ecuațiile mișcării. Presiune pe curbă .....	59
IV. Echilibrul unui punct pe o curbă.....	63



#### IV. FORȚĂ DE INERȚIE. MIȘCARE RELATIVĂ.

I. Forță de inerție. Forță de inerție tangențială. Forță de inerție centrifugă .....	65
II. Mișcare relativă. Forță de inerție de antrenare. Forță centrifugă, compusă. Ecuațiile mișcării relative. Echilibru relativ .....	66

#### V. EXEMPLE DE MIȘCĂRI. PUNCT LIBER.

I. Mișcare rectilină. Forță constantă. Forță funcție de timp. Forță funcție de poziția mobilului. Forță funcție de viteză.....	69
II. Mișcare în plan. Mișcarea proiectilelor în vid. Mișcarea în aer; curba balistică și particularitățile ei. Atracțiune invers proporțională cu patratul distanței mobilului la un centru fix; traectorie și expresia cordonatelor în funcție de timp.....	74
III. Mișcare în spațiu.....	90

#### VI. MIȘCAREA PLANETELOR. GRAVITAȚIA UNIVERSALĂ.

I. Legile lui Képler .....	92
II. Gravitația universală .....	94

#### VII. EXEMPLE DE MIȘCĂRI PE SUPRAFEȚE ȘI PE CURBE.

I. Pendulul sferic. Ecuațiile diferențiale ale mișcării. Cordonatele sferice. Reducerea problemei la cuadraturi.....	97
II. Pendulul circular. Cazul micilor oscilații. Cazul oscilațiilor oarecare. Mișcarea pendulului într'un mediu rezistent.....	102
III. Pendulul cicloidal. Tautocronism. Curbă brahistocronă.....	111
IV. Presiunea unui punct greu pe o curbă, conținută într'un plan vertical. Exemplu.....	113

#### VIII. EXEMPLE DE ECHILIBRU ȘI MIȘCARE RELATIVĂ.

I. Echilibrul aparent al unui punct material la suprafața pământului. Intensitatea și direcția greutății .....	123
II. Mișcare aparentă a unui punct material liber. Ecuațiile diferențiale ale mișcării. Mișcarea aparentă a proiectilelor în vid. Influența învârtirii pământului asupra bătăii proiectilelor. Deviația. Proiectil aruncat vertical de jos în sus. Mișcarea unui punct greu pe un plan orizontal sub simplul efect al unei viteze inițiale	126
III. Pendulul Foucault. Ecuațiile mișcării. Cazul micilor oscilații. Integrațiune. Interpretare .....	135



## IX. REZUMATUL ECHILIBRULUI ȘI MIȘCĂRII UNUI PUNCT MATERIAL.

- I. Trăvaliul virtual și principiul lui *d'Alembert*..... 142
- II. Rezumatul echilibrului și mișcării unui punct material. Punct liber. Punct supus la legături..... 143
- III. Mișcarea unui punct pe o suprafață sau pe o curbă mobilă..... 146

## PARTEA II-a

### ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE

#### I. TEORIA CENTRELOR DE GREUTATE.

- I. Definiția și coordonatele centrului de greutate. Determinarea centrului de greutate al unui sistem continuu de puncte materiale: spațiuni, suprafețe și linii materiale. Diverse teoreme ..... 147
- II. Teoremele lui *Guldin*. Aplicațiuni..... 154

#### II. ECHILIBRUL UNUI SOLID INVARIABIL.

- I. Reducerea forțelor aplicate unui solid invariabil..... 156
- II. Echilibrul unui solid invariabil liber. Ecuații care exprimă echilibrul. Aplicațiuni ..... 158
- III. Sisteme de forțe echivalente. Ecuații care exprimă echivalența a două sisteme de forțe. Condiție pentru ca un sistem de forțe să se reducă la o forță unică..... 162
- IV. Teoria cuplurilor. Intrebuintarea acestei teorii pentru reducerea forțelor aplicate unui solid..... 169
- V. Echilibrul unui solid care nu este liber. Determinarea condițiilor de echilibru. Echilibrul unui solid care are un punct fix sau un ax fix. Echilibrul unui solid care se reazămă pe un plan. Probleme ..... 171

#### III. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FIGURĂ VARIABILĂ COMPUSE DIN MAI MULTE SOLIDE INVARIABILE.

- I. Condițiuni de echilibru. Exemple explicative. Probleme asupra barelor articulate ..... 181
- II. Poligon funicular. Definiție și condiții de echilibru. Poligonul lui *Varignon* ..... 186
- III. Curbă funiculară. Condiții de echilibru. Lăntșorul. Cablul ponderilor suspendate ..... 188



#### IV. ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE.

- I. Condiții de echilibru prin considerația travaliului virtual. Forțe interioare și forțe exterioare. Sistem material liber. Sisteme materiale cu legături. Aplicații..... 197
- II. Ecuații de echilibru. Metoda multiplicatorilor. Calculul forțelor de legătură. Aplicație la echilibrul solidelor..... 205

#### V. ECHILIBRUL SOLIDELOR NATURALE.

- I. Frecarea de alunecare. Echilibrul unui punct greu pe un plan înclinat. Echilibrul unei scări. Coardă înfășurată pe un cilindru 211
- II. Rezistența la rostogolire. Punct de contact mecanic. Rostogolirea unei perechi de roate cuplate..... 217

### PARTEA III-a

#### MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE

##### I. MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE LIBERE.

- I. Ecuațiile generale ale mișcării unui sistem de puncte libere. Integralele unei probleme de Dinamică..... 220
- II. Teoreme generale asupra mișcării unui sistem de puncte libere:
  - 1<sup>o</sup>. Teorema cantităților de mișcare proiectate pe un ax .. 223
  - 2<sup>o</sup>. „ mișcării centrului de greutate..... 225
  - 3<sup>o</sup>. „ momentelor cantităților de mișcare..... 227
  - 4<sup>o</sup>. „ ariilor ..... 228
  - 5<sup>o</sup>. „ forțelor vii. Integrala forțelor vii. Conservarea forței vii ..... 230
- Rezumat. Cele 7 ecuații universale ale mișcării..... 233
- III. Teoria Energiei. Energie cinetică. Energie potențială. Conservarea energiei ..... 234
- IV. Extinderea teoremelor generale la mișcările relative. Observațiune asupra aplicațiunii teoremei forțelor vii. Mișcare relativă a unui sistem în raport de axe dreptunghiulare de direcții constante trecând prin centrul de greutate al sistemului ..... 236

##### II. MIȘCAREA SISTEMELOR MATERIALE CU LEGĂTURI.

- I. Ecuațiile generale ale mișcării punctelor unui sistem cu legături. Aplicațiunea principiului lui d'Alembert. Ecuația generală a Mecanicei. Metoda multiplicatorilor. Calculul forțelor de legătură 242



	Pagina
II. Extinderea teoremelor generale la sistemele cu legături.....	248
III. Ecuațiile lui <i>Lagrange</i> .....	250
IV. „ „ <i>Hamilton</i> .....	257
V. Teoreme asupra echilibrului sistemelor materiale. Demonstrația lui <i>Lejeune-Dirichlet</i> . Aplicație la sistemele grele .....	261
VI. Asupra energiei potențiale .....	266

### III. APLICAREA DIFERITELOR METODE LA REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE DINAMICĂ.

#### Probleme:

I. Mișcarea sistemului format de 2 puncte grele $M_1$ și $M_2$ pe planurile inclinate $A_1 B$ , $B A_2$ , punctele fiind legate printr'un fir flexibil și inextensibil .....	268
II. Mișcarea într'un plan vertical a unei bare omogene, supusă greutateii și acțiunii unui cuplu .....	274
III. Mișcarea într'un plan vertical a unei bare omogene și grele, extremitățile $A$ și $B$ ale barei fiind obligate de a descrie verticala $Oy$ și orizontala $Ox$ .....	277
IV. Mișcarea unei bare omogene și grele $OA$ , care are punctul $O$ fix .....	282
V. Mișcarea unui punct de masă $m$ , obligat de a aluneca fără frecare pe o curbă, care variază în fiecare moment de poziție și chiar de formă. Exemplu .....	289
VI. Mișcarea unui punct obligat de a se mișca fără frecare pe o suprafață variabilă. Exemplu .....	291
VII. Pozițiile de echilibru ale unei bare grele și omogene $A B$ , ale cărei extremități $A$ și $B$ sunt obligate de a descrie verticala $Oy$ și orizontala $Ox$ , fiecare element al barei fiind supus unei repulsiuni din partea axului $Oy$ , proporțională cu masa elementului și cu distanța acestuia la $Oy$ .....	295
Notă finală .....	297

### IV. ALTE APLICAȚIUNI ALE ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE.

I. Stabilirea ecuațiilor mișcării unui sistem material în cazul legăturilor zise ne-holonoame. Exemplu. Metoda <i>Appell</i> .....	300
II. Aplicațiunea ecuațiilor lui <i>Lagrange</i> la studiul mișcărilor relative. Exemplu .....	308



## PARTEA IV-a

### MIȘCAREA SOLIDELOR INVARIABILE

#### I. TEORIA MOMENTELOR DE INERȚIE.

I. Definiție .....	312
II. Momente de inerție în raport de drepte paralele.....	313
III. Momente de inerție în raport de drepte concurente.....	313
IV. Elipsoid de inerție. Elipsoid central.....	315
V. Axe principale de inerție. Condiții de îndeplinit .....	316
VI. Calcularea momentelor de inerție.....	318

#### II. MOMENTELE DE INERȚIE A CĂTORVA VOLUME OMOGENE.

I. Paralelipiped dreptunghiu .....	320
II. Cilindru circular .....	321
III. Solid de revoluție .....	322

#### III. MIȘCAREA UNUI SOLID ÎN JURUL UNUI AX FIX.

I. Ecuația diferențială a mișcării. Expresia momentului cinetic și a forței vii. Eforturi asupra axului. Cazuri particulare.....	325
II. Pendulul compus .....	334
III. Teoria mașinei lui <i>Atwood</i> .....	336

#### IV. MIȘCAREA UNUI SOLID ÎN JURUL UNUI PUNCT FIX.

I. Ecuațiile diferențiale ale mișcării. Variabilele lui <i>Euler</i> $\theta$ , $\phi$ , $\varphi$ . Variabilele auxiliare $p$ , $q$ , $r$ . Ecuațiile lui <i>Euler</i> . Relațiuni între componentele $p$ , $q$ , $r$ și unghiurile $\phi$ , $\theta$ , $\varphi$ . Expresia forței vii ..	339
II. Cazul când forțele aplicate admit o rezultantă care trece prin punctul fix. Integrațiunea <i>Jacobi</i> . Caz când elipsoidul de inerție este de revoluție.....	349
Metodă geometrică. Polodia și herpolodia lui <i>Poinsot</i> .....	358
III. Mișcarea unui solid de revoluție omogen în jurul unui punct al axului său de figură. Caz când solidul este supus unei singure forțe, aplicată într'un punct al axului de figură. Cazul când el nu este supus decât acțiunii greutății și este animat la începutul mișcării de o foarte mare viteză de rotație în jurul axului său de figură. Sfârleaza giroscopică. Balanța giroscopică .....	362
Giroscopul lui <i>Foucault</i> .....	376



## V. MIȘCAREA UNUI SOLID LIBER.

- I. Ecuațiile mișcării. Cazul mișcării unui solid în vid sub simpla acțiune a gravitației ..... 380

## VI. EFECTUL PERCUȚIILOR ASUPRA UNUI SOLID ÎN MIȘCARE.

- I. Teoria percuțiilor. Teoreme ..... 383  
II. Efectul percuțiilor asupra unui solid care se învârteste în jurul unui ax fix. Percuții asupra axului de rotație. Condiții pentru ca axul să nu sufere nicio percuție. Aplicație ..... 389  
III. Efectul percuțiilor asupra unui solid care se învârteste în jurul unui punct fix. Teoremă. .... 395  
IV. Efectul percuțiilor asupra unui solid liber. Exemplu..... 396  
V. Efectul percuțiilor asupra unui solid plan. Percuțiile tunurilor la trageri. Cabrarea afetelor..... 398

## VII. MIȘCAREA SOLIDELOR NATURALE.

- I. Rostogolirea unui cilindru de revoluție pe un plan orizontal .. 408  
II. Rostogolirea cu alunecare ..... 410  
III. Mișcarea unui cilindru pe un plan înclinat ..... 411  
IV. Mișcarea unei sfere omogene și grele pe un plan orizontal, când se ține seama de frecare (bila de biliard)..... 413

## PARTEA V-a

### MIȘCAREA PROECTILULUI ÎN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE

#### I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

*Greutatea. Rezistența aerului. Frecările laterale. Mișcarea centrului de greutate.*

- I. Variația lui  $g$  cu altitudinea..... 420  
II. Rezistența aerului. Indicele de formă. Coeficientul balistic. Funcția  $F(v)$  ..... 421  
III. Frecările aerului ..... 427  
IV. Cum se pune problema mișcării proiectilului în aer..... 428  
V. Ecuațiile generale ale mișcării centrului de greutate..... 432  
VI. Calculul traiectoriilor prin metoda integrației pe arcuri succesive ..... 433



## II. MIȘCAREA PROECTILULUI ÎN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

- I. Ecuatiile generale ale mișcării. Axe cordonate. Trăvialiul rezis-  
tenței R. Trăvialiul frecărilor. Ecuatiile lui *Lagrange*..... 439
- II. Integrațiune pe arcuri succesive. Schimbare de variabile. Ecuatia  
diferențială a mișcării axului..... 447
- III. Cazul când frecările laterale sunt neglijabile. Soluția mișcării.  
Determinarea constantelor de integrațiune. Partea periodică a  
mișcării axului. Viteza de precesiune. Axul instantaneu de pre-  
cesiune. Partea neperiodică a mișcării axului. Rezumat..... 449  
Notă: Studiul mișcării axului proectilului în mod geometric.... 461
- IV. Determinarea mișcării axului proectilului pe toată întinderea  
traectoriei ..... 465
- V. Stabilitatea proectilelor pe traectorie. Stabilitatea esențială și  
valoarea optimă a lui  $\omega$  pentru asigurarea ei, după *M. de Sparre*.  
Asupra intervalului în care trebuie aleasă valoarea lui  $\omega$  pentru  
asigurarea stabilității pe întreaga traectorie..... 467  
Observațiuni: stabilitatea proectilelor foarte lungi și a celor cu  
coafe; influența diverselor defecte ale proectilului asupra stabili-  
tății, după *M. de Sparre*..... 472
- VI. Efectul frecărilor laterale. Apropierea axului instantaneu de pre-  
cesiune de tangenta traectoriei. Asupra frecărilor artificiale.... 473
- VII. Derivațiunea proectilelor. Ecuatia care dă valoarea principală  
a derivațiunii. Comparația derivațiilor calculate cu cele măsurate  
pe teren. O formulă empirică pentru calculul derivațiunilor.... 476  
Asupra formelor care asigură proectilelor o rezistență cât mai  
mică din partea aerului. Experiențele dela poligonul Sudiți.... 481

\* \* \*

- Nota A. Ecuatii de echilibru la figurile rigide. D. POMPEIU, profesor  
universitar și membru al Academiei Române..... 487
- Nota B. Energia. Mișcare conservativă și mișcare ne-conservativă a  
energiei. Atracția luminoasă. Vârsta sistemului solar. C.  
POPOVICI, profesor universitar și directorul Observatorului  
Astronomic din București ..... 489
- Nota C. Asupra notației vectoriale. V. VÂLCOVICI, profesor de Me-  
canică la Facultatea de Științe din București și directorul  
Institutului de Aerodinamică ..... 497



